Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ασκήσεις στον τύπο του Bayes

(συνέχεια 2ου μαθήματος)

Ασκήσεις στον τύπο του Bayes

1. Έχουμε 3 νομίσματα, δύο αμερόληπτα, με πιθανότητα 0,5 για Κορώνα ή Γράμματα ενώ το τρίτο δεν είναι αμερόληπτο δείχνοντας Κορώνα με πιθανότητα 0,75.

Κάποιος επιλέγει τυχαία ένα από τα νομίσματα, το πετάει 3 φορές και έρχεται 3 φορές Κορώνα. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι αυτό το μη αμερόληπτο νόμισμα;

άλυτη

Ασκήσεις στον τύπο του Bayes

2. Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους ανθρώπους σε μία από τις τρεις κατηγορίες: καλοί πληρωτές, μεσαίοι πληρωτές και κακοί πληρωτές. Οι καταγραφές τους δηλώνουν ότι τα άτομα καλών, μεσαίων και κακών πληρωμών έχουν πιθανότητες να εμπλακούν σε τροχαίο ατύχημα μέσα σ' ένα χρόνο 0,05, 0,15 και 0,30 αντίστοιχα.
(α) Αν 20% του πληθυσμού είναι καλοί πληρωτές, 50% είναι μεσαίοι πληρωτές και 30% είναι κακοί πληρωτές, τι ποσοστό ανθρώπων έχουν ατύχημα μέσα σ' ένα σταθερό χρόνο;

(β) Αν ένας κάτοχος ασφαλιστικού συμβολαίου δεν είχε ατύχημα μέσα σ' ένα χρόνο, ποια είναι η πιθανότητα ότι είναι καλός πληρωτής;

άλυτη

Περιεχόμενα 3ου μαθήματος

- Τυχαίες μεταβλητές.
- Συνάρτηση πιθανότητας (μάζας ή πυκνότητας)
- Συνάρτηση κατανομής.
- Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μίας κατανομής.
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση.

...και αν προλάβουμε:

- Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
- Κοινή συνάρτηση πιθανότητας.
- Περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας.

Γνωστικοί στόχοι 3ου μαθήματος

Στο τέλος αυτού του μαθήματος, ο φοιτητής πρέπει να είναι σε θέση, για μία τυχαία μεταβλητή X, να υπολογίζει τις:

- Συνάρτηση πιθανότητας.
- Συνάρτηση κατανομής.
- Αναμενόμενη τιμή, Διάμεση Τιμή, Επικρατούσα Τιμή.
- Διακύμανση, Τυπική απόκλιση.
- Συντελεστής ασυμμετρίας.
- Συντελεστής κυρτότητας.
- Ροπές, κεντρικές ροπές και Ροπογεννήτρια συνάρτηση.
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση.

– Τυχαίες μεταβλητές

– Συνάρτηση Πιθανότητας

– Συνάρτηση Κατανομής

Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός
Τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια αριθμητική μεταβλητή που η τιμή της προσδιορίζεται από την εξέλιξη ενός τυχαίου πειράματος.

Οι τυχαίες μεταβλητές διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες, **ποιοτικές** και **αριθμητικές ή ποσοτικές**, από τις οποίες οι αριθμητικές διακρίνονται περαιτέρω σε **διακριτές** και **συνεχείς**.
(α) Ποιοτικές (nominal) (Φύλο, τόπος κατοικίας, οικογενειακή κατάσταση κλπ)
(β) Αριθμητικές (numeric)
    (β_1) Διακριτές (ordinal) (πλήθος παιδιών, πλήθος συμβάντων, κλπ)
    (β_2) Συνεχείς (scale) (χρόνος, μήκος, όλες οι ψυχομετρικές μετρήσεις, κλπ)

Μια τυχαία μεταβλητή προσδιορίζεται από το σύνολο των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει και την πιθανότητα να πάρει κάθε μία (για διακριτές τυχαίες μεταβλητές) ή τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές).

Τυχαίες μεταβλητές

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνουν αριθμητικές τιμές.

Ορισμός (ισοδύναμος)
Έστω Ω ο δειγματοχώρος ενός πειράματος. Ως τυχαία μεταβλητή ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής

$$X : \Omega \to A \subseteq R.$$

Ορισμός
Δύο τυχαίες μεταβλητές λέγονται **ίσες** όταν είναι ίσες ως συναρτήσεις $\Omega \to R$.

Σημείωση
Μετά από κατάλληλη κωδικοποίηση, κάθε τυχαία μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί αριθμητική. Για παράδειγμα, αν το πείραμα είναι η τυχαία επιλογή ενός φοιτητή η παρατήρηση του φύλου του, τότε ο δειγματοχώρος είναι
Ω = {Αγόρι, Κορίτσι}, και μπορεί να οριστεί η τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε X({Αγόρι}) = 1 και X({Κορίτσι}) = 0.
Στην περίπτωση αυτή ωστόσο, κάποια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατανομής δεν θα έχουν σαφές νόημα.

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

και

Συνάρτηση Κατανομής

(Διακριτή Τ.Μ.)

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Ορισμός
Ως **συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) (probability mass function p.m.f.)**
f: R → [0, 1] μίας *διακριτής* τυχαίας μεταβλητής, ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{f_X(x) = P(X = x)}$$

Ιδιότητες συνάρτησης μάζας πιθανότητας διακριτής τ.μ.

1. $0 \leq f_X(x) \leq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. $\Sigma_x f_X(x) = 1$.

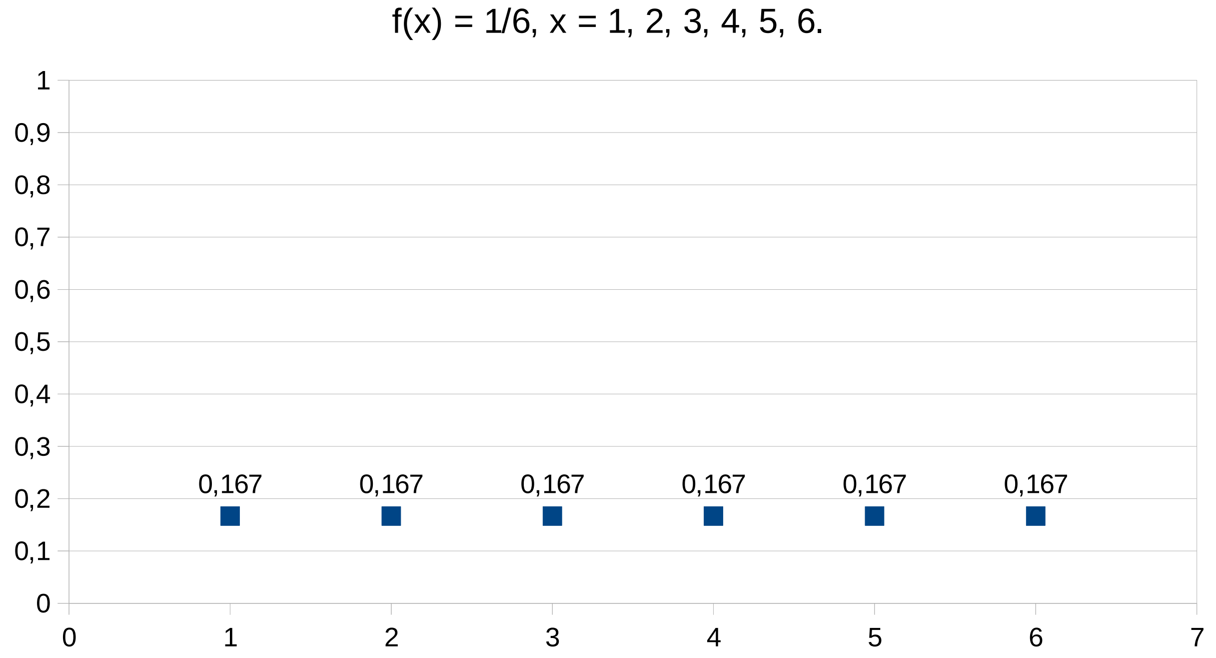
Σημειώσεις

1. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας συμβολίζεται και $p_X(x)$ ή ακόμα και $p(x)$ ή $f(x)$, χωρίς δείκτη X.
2. Η ονομασία “συνάρτηση μάζας πιθανότητας” χρησιμοποιείται αποκλειστικά στις διακριτές τ.μ. Η αντίστοιχη συνάρτηση στις συνεχείς τ.μ. ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
3. Στη συνέχεια, θα αναφερόμαστε στη συνάρτηση μάζας πιθανότητας απλά σαν “συνάρτηση πιθανότητας”.

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Παράδειγμα

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού} τότε $f_X(x) = 1/6$, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Άσκηση 1
(α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας.
(β) Αν X τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και συνάρτηση μάζας πιθανότητας την f, να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχόμενου A = {$0 \leq X \leq 3$}.

Λύση

άλυτη

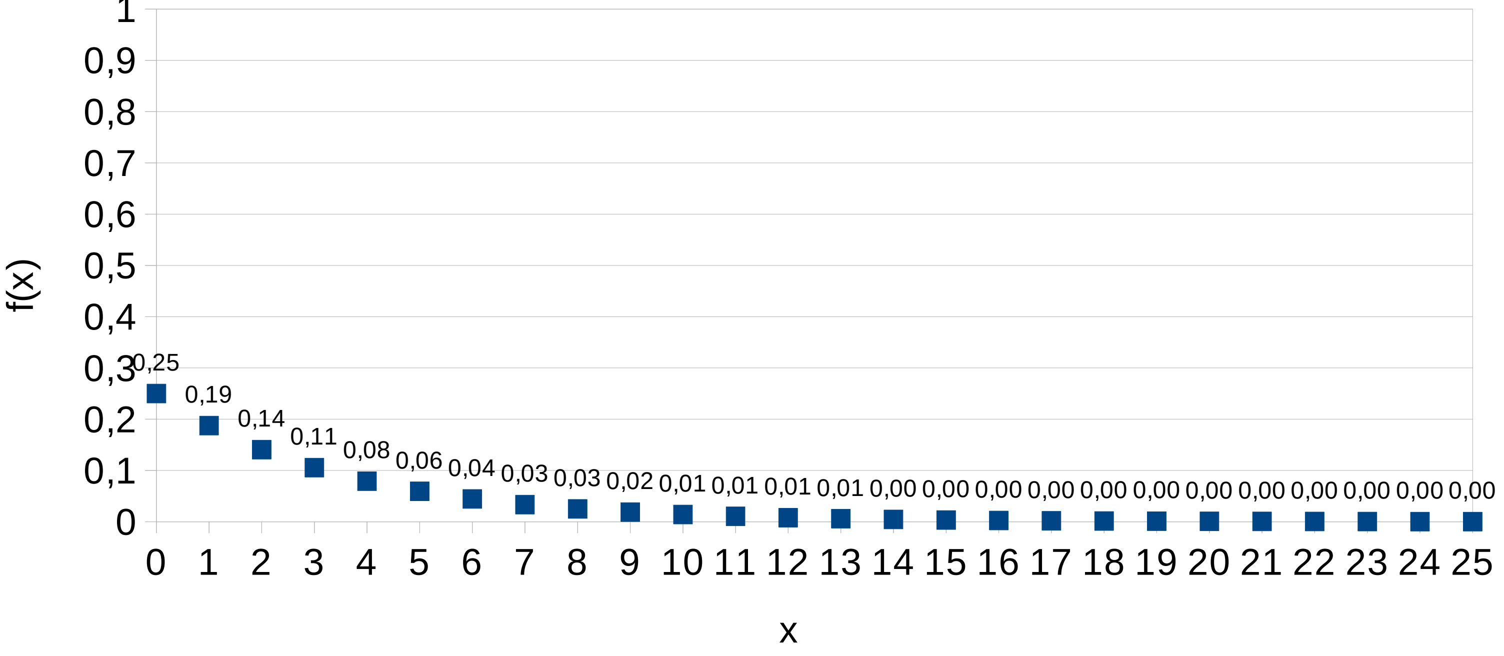
Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Άσκηση 1
(α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας.
(β) Αν X τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και συνάρτηση μάζας πιθανότητας την f, να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχόμενου A = {0 ≤ X ≤ 3}.

Λύση

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$



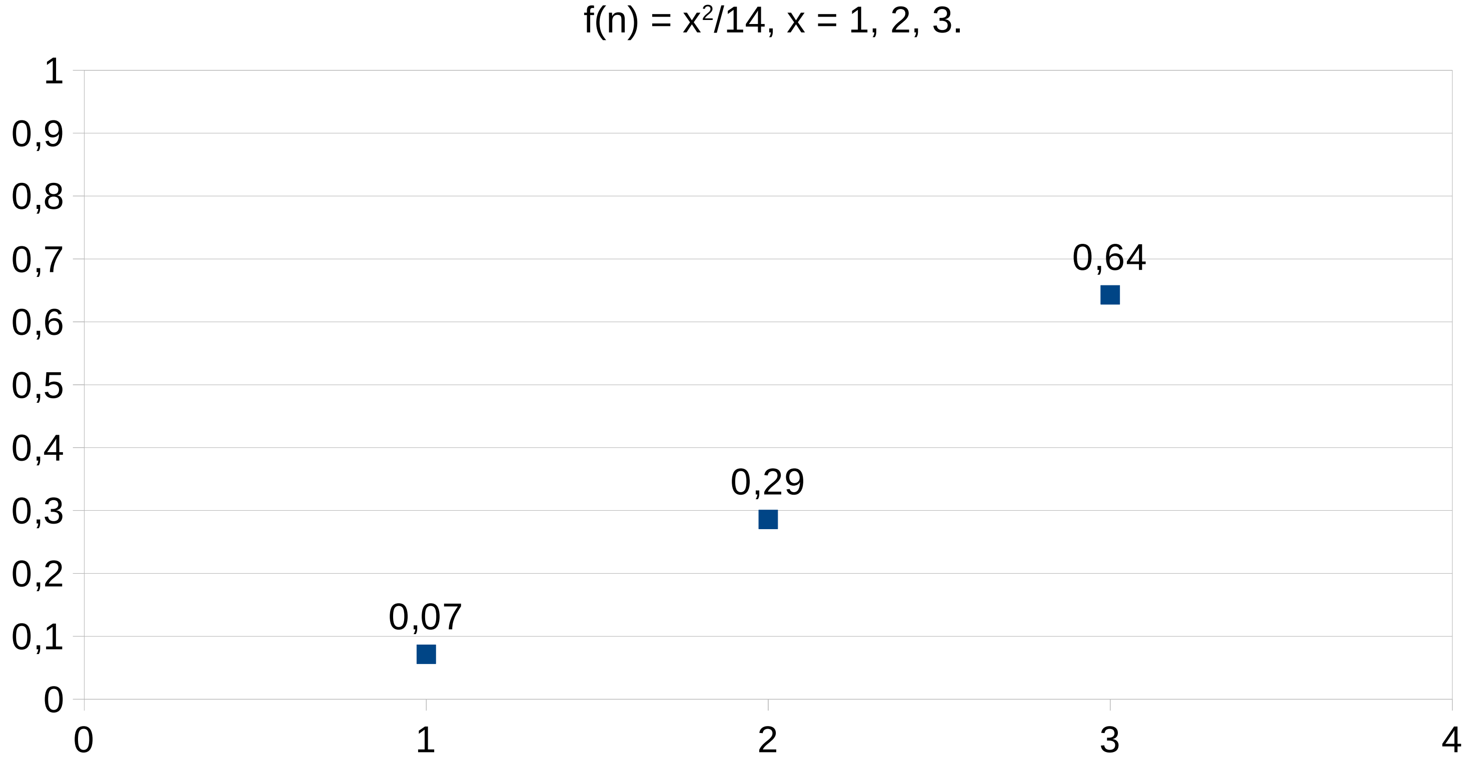
Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Άσκηση 2

Να βρεθεί η σταθερά c є R, ώστε η συνάρτηση $f(x) = c \cdot x^2$, $x = 1, 2, 3$ να είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας.

Λύση

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Άσκηση 3
Γνωρίζουμε ότι το 80% των κατοίκων της Ξάνθης υποστηρίζουν την τοπική ομάδα. Επιλέγουμε τυχαία 3 κατοίκους και έστω

X = {το πλήθος των κατοίκων μεταξύ των τριών που υποστηρίζουν την ομάδα}.

Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.μ. X.
Υπόδειξη: Πρώτα βρείτε το δειγματοχώρο και τις πιθανότητες για κάθε ένα απλό ενδεχόμενο.

Λύση

άλυτη

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Άσκηση 4

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_X(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, \ldots$

(α) Να βρείτε αν είναι περισσότερο πιθανό για την X να λαμβάνει άρτιες ή περιττές τιμές.

(β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) $P(X > 5)$, (β) P(η X διαιρείται με το 3)

Λύση

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Παρατήρηση
Δύο τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται στον ίδιο δειγματοχώρο Ω, μπορεί να έχουν ίδια συνάρτηση πιθανότητας χωρίς να είναι ίσες ως συναρτήσεις του Ω στο R.

Για παράδειγμα, αν $X = \{-1, 1\}$ με $f_X(-1) = f_X(1) = 0{,}5$ και $Y = -X$, τότε

(α) οι X, Y είναι διαφορετικές ως συναρτήσεις ($X \neq Y$).

(β) έχουν ίδια συνάρτηση πιθανότητας καθώς $f_Y(-1) = P(Y = -1) = P(X = 1) = 0{,}5$ και
$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X = -1) = 0{,}5$

Συνάρτηση Κατανομής

(Διακριτή Τ.Μ.)

Συνάρτηση Κατανομής

Ορισμός
Ως **(αθροιστική) συνάρτηση κατανομής** (cumulative distribution function) F: R → [0, 1], ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

Η συνάρτηση κατανομής δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της πιθανότητας η τ.μ. X να ανήκει στο (α, β]:

$$\mathbf{P(\alpha < X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)}$$

Σημείωση: $F_X(x) = P(X \in (-\infty, x])$.

Ιδιότητες συνάρτησης κατανομής
1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. $F_X \uparrow (-\infty, +\infty)$ ή ισοδύναμα $x < y \rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$.
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Συνάρτηση Κατανομής διακριτής Τ.Μ.

Αν X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

$X=x$ ή $X=x-1$ ή ...

και

$$P(\alpha < X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \sum_{\alpha < x_i \leq \beta} P(X = x_i) = \sum_{\alpha < x_i \leq \beta} f_X(x_i)$$

Συνάρτηση Κατανομής διακριτής Τ.Μ.

Παράδειγμα

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού}

τότε $f_X(x) = 1/6$, $x = 1, ..., 6$

και

$F_X(x) = 0$, $x < 1$,

$F_X(x) = 1/6$, $1 \leq x < 2$,

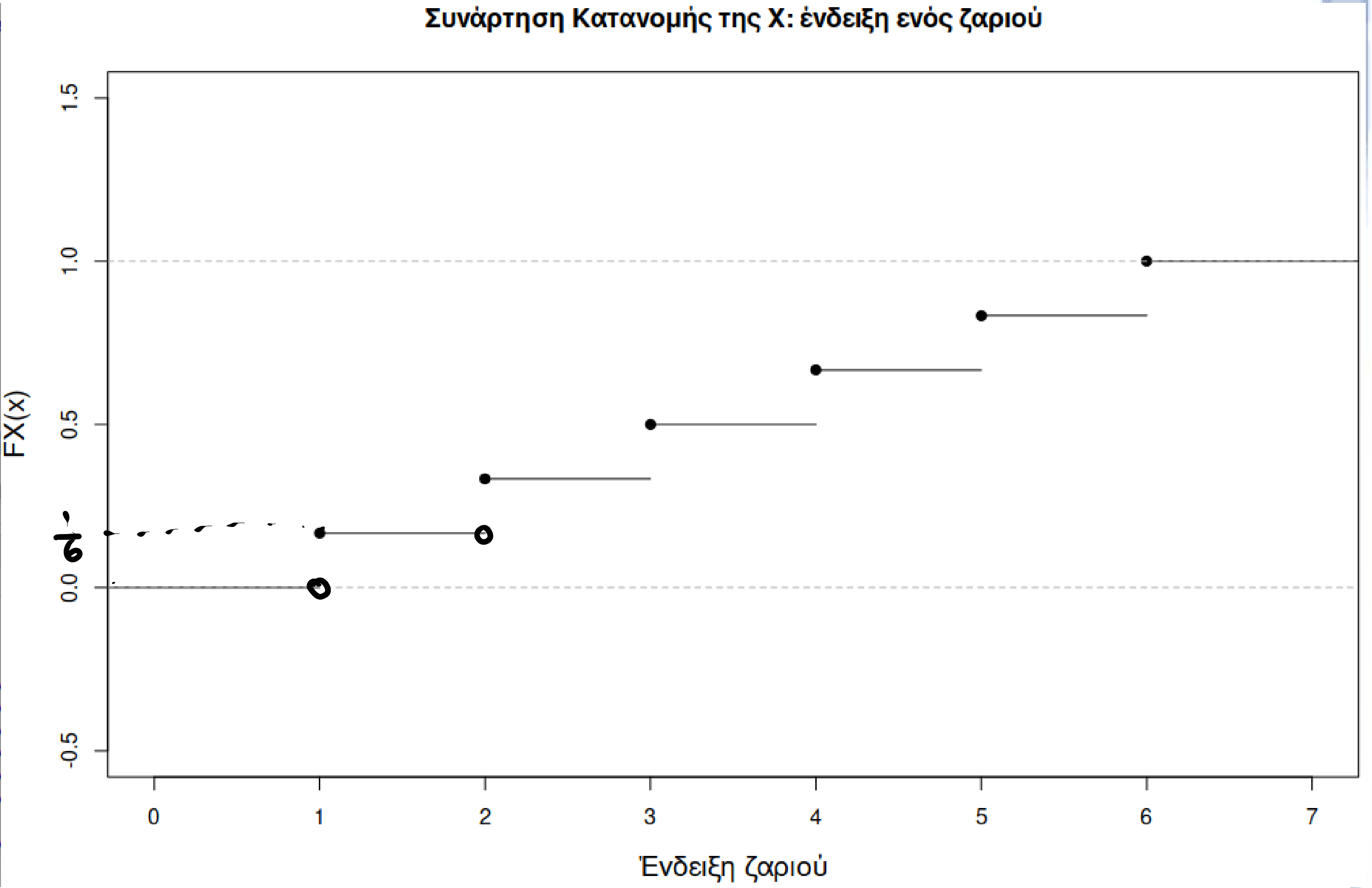
$F_X(x) = 2/6$, $2 \leq x < 3$,

$F_X(x) = 3/6$, $3 \leq x < 4$,

$F_X(x) = 4/6$, $4 \leq x < 5$,

$F_X(x) = 5/6$, $5 \leq x < 6$,

$F_X(x) = 1$, $x > 6$,



Συνάρτηση Κατανομής διακριτής Τ.Μ.

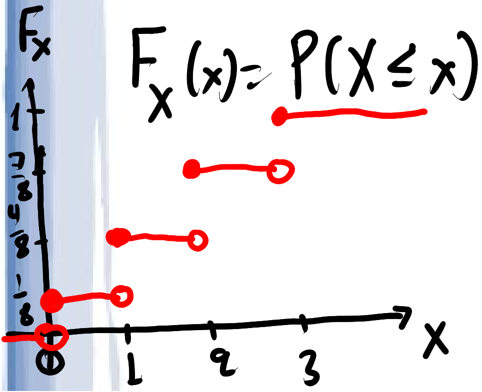
Άσκηση

Ρίχνουμε ένα κέρμα τρεις φορές και ορίζουμε X = {το πλήθος από Κ}. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X.

Λύση

$X = 0, 1, 2, 3$. $\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

$f_X(0) = P(X=0) = \frac{1}{8}$, $f_X(1) = \frac{3}{8}$, $f_X(2) = \frac{3}{8}$, $f_X(3) = \frac{1}{8}$.



$F_X(x) = P(X \leq x)$.

Αν $x < 0$: $F_X(x) = 0$. Αν $0 \leq x < 1$: $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{8}$

Αν $1 \leq x < 2$: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{8}$

Αν $2 \leq x < 3$: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{7}{8}$

Αν $x \geq 3$: $F_X(x) = 1$.

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

και

Συνάρτηση Κατανομής

(Συνεχής Τ.Μ.)

Η αναγκαιότητα ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχής Τ.Μ. Χ

Έστω Χ μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (ύψος, βάρος, μήκος κλπ), δηλαδή μία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές σε ένα διάστημα (α, β) $\subseteq$ R.

Η **συνάρτηση κατανομή**ς της τ.μ. Χ είναι η

$$F_X(x) = P(X \leq x),\ x \in R.$$

Σε αντίθεση με την διακριτή περίπτωση αν η τ.μ. Χ είναι συνεχής τότε δεν έχει νόημα να γράψουμε $F_X(x) = \Sigma_{k<x} P(X = k)$, καθώς η άθροιση θα έπρεπε να γίνει σε μη αριθμήσιμο σύνολο δεικτών.

Επιπλέον, το παραπάνω άθροισμα δεν έχει νόημα καθώς στην περίπτωση μίας συνεχούς τ.μ. είναι $P(X = k) = 0$, για κάθε $k \in R$.

Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής πρέπει να εκφραστεί με άλλο τρόπο.

Η αναγκαιότητα ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχής Τ.Μ. Χ

Ξεκινώντας από τον de Moivre το 1733 και τον Simpson το 1757, καθιερώθηκε ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

ως ένα ολοκλήρωμα

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx.$$

Η συνάρτηση f_X παίζει το ρόλο της συνάρτησης μάζας πιθανότητας για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**.

Φανερά, ο προσδιορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, περιγράφει πλήρως την κατανομή πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση f: R → R που ικανοποιεί τις ιδιότητες

α) $f(x) \geq 0$ σχεδόν παντού. β) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζει μία συνάρτηση κατανομής για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X, ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Αντίστροφα, αν F_X: R → [0, 1] είναι μία *συνεχώς διαφορίσιμη* συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X, ορίζεται ως

$$f(x) = F_X'(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$ και $f(x) = 0$, $x \in R - [0, 1]$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχή τ.μ. X.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής F_X που αντιστοιχεί στη συνάρτηση πυκνότητας f.

(γ) Να αναπαραστήσετε γραφικά και να υπολογίσετε αλγεβρικά τις πιθανότητες $P(X < 0)$, $P(X < ½)$, $P(X \leq ½)$, $P(X \geq ½)$, $P(X > 3)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) $f(x) \geq 0$ φανερά. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = 1 \Rightarrow f$: σ.π.π.

(β) $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Αν $x < 0$: $F_X(x) = 0$

Αν $x \in [0,1]$. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = 3\frac{t^3}{3}\Big|_0^x = x^3$.

Αν $x > 1$: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^1 3t^2 dt = 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

άλυτη

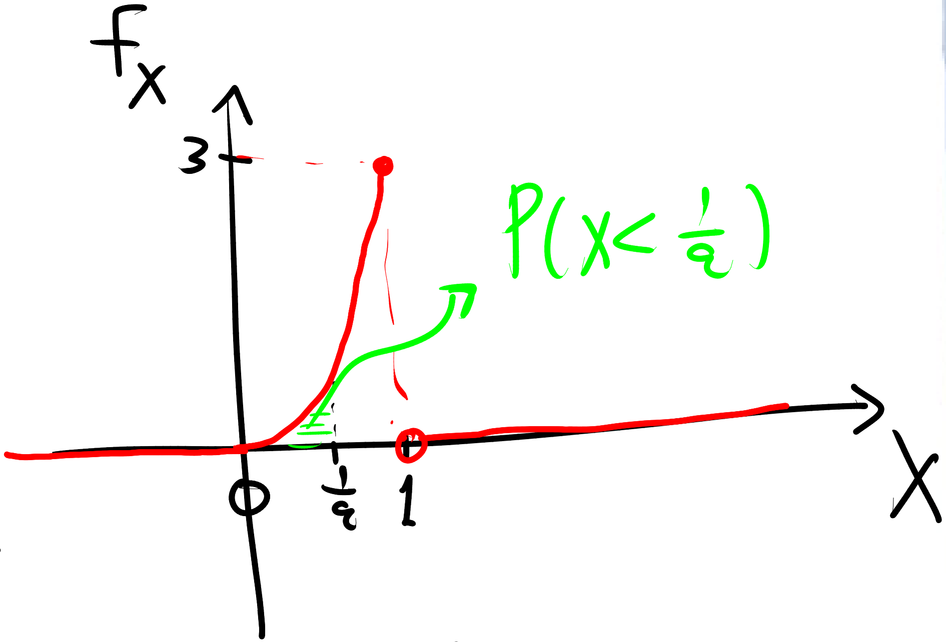
(γ) $P(X<0) = F_X(0) = 0$

$P(X<\frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$P(X\leq \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$.

$P(X\geq \frac{1}{2}) = 1 - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(X>3) = 1 - F_X(3) = 1 - 1 = 0$



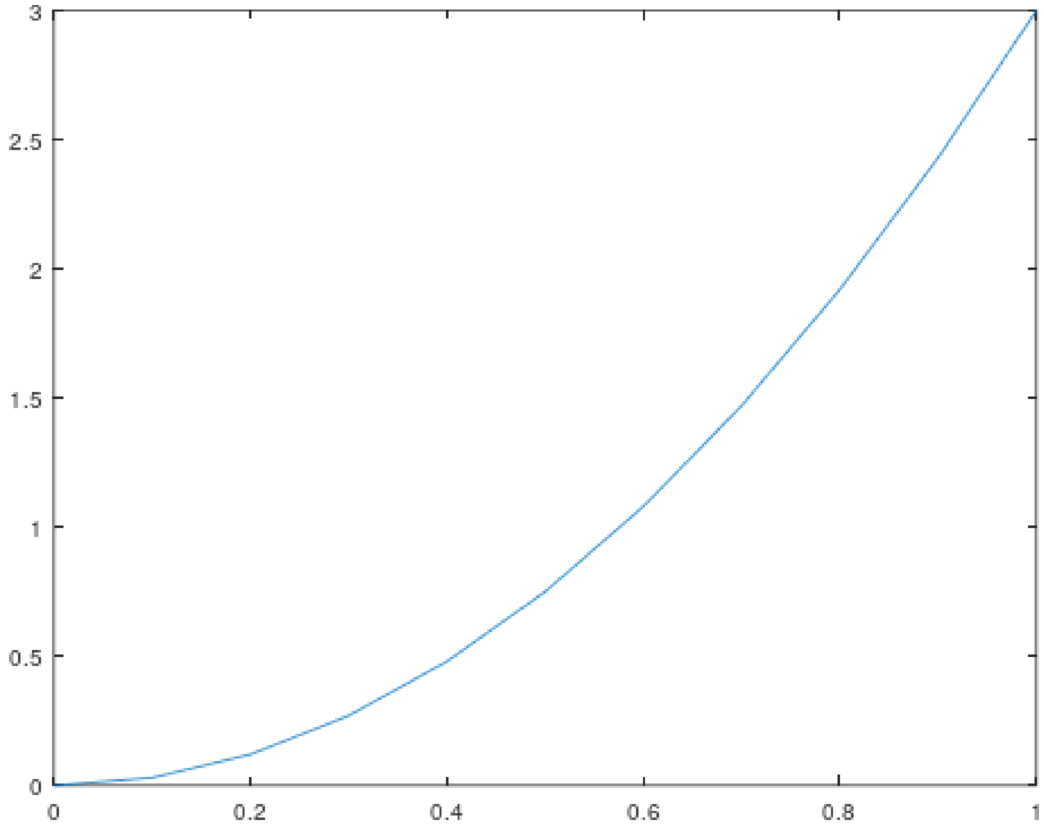
$P(X<0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$

$P(X<\frac{1}{2})$

άλυτη

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$f(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$



Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x³/ 4, x є [0, c] και f(x) = 0, x є R – [0, c]. Να βρείτε την τιμή του c για την οποία η f γίνεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχή τ.μ. Χ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4}, & 0 \le x \le c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad c = ;$$

Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^c \frac{x^3}{4} dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^c = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \cdot (c^4 - 0^4) = 1 \Leftrightarrow c^4 = 16 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2.$$

Αλλά, $c > 0$, άρα $c = 2$.

άλυτη

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

3. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x + 1, x ϵ (-1, 0] και f(x) = 1 – x, x ϵ [0, 1).

(α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τ.μ. X.

(β) Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής.

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y = 2X + 1.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1,0] \\ 1-x, & x \in [0,1) \end{cases}.$$

(α) $f(x) \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x+1)\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\,dx$

$$= \left.\frac{x^2}{2}+x\right|_{-1}^{0} + \left.x-\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

(β) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Αν $x<-1$: $F_X(x)=0$

Αν $x \in (-1,0]$: $F_X(x) = \int_{0}^{x}(t+1)\,dt = \left.\frac{t^2}{2}+t\right|_{0}^{x} = \frac{x^2}{2}+x.$

Αν $x \in [0,1)$: $F_X(x) = \int_{-1}^{0}(t+1)\,dt + \int_{0}^{x}(1-t)\,dt$

$$= \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$$

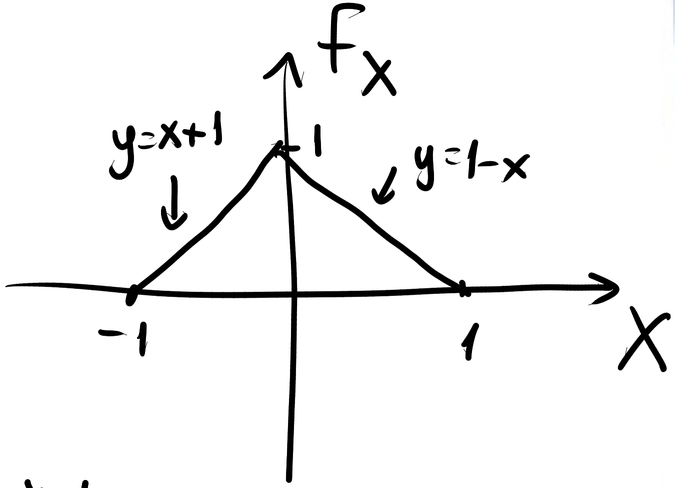
Αν $x>1$: $F_X(x)=1.$

άλυτη

(β) $Y = 2X + 1$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(2X+1 \le x) = P(2X \le x-1) =$$

$$= P\left(X \le \frac{x-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{x-1}{2}\right)$$



Αν, $\frac{x-1}{2} < -1$, $F_Y(x) = 0$
$\Leftrightarrow x < -1$

Αν $-1 \le \frac{x-1}{2} < 0$, $F_Y(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{2} + \frac{x-1}{2} = \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{x-1}{2}$
$\Leftrightarrow -1 \le x < 1$

Αν $0 \le \frac{x-1}{2} < 1$, ...

Αν $\frac{x-1}{2} > 1 \Leftrightarrow x > 3$: $F_Y(x) = 1$.

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = (x + 1)^2/4$, $x \in (-1, 1)$.

(α) Να δείξετε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής για κάποια συνεχή τυχαία μεταβλητή X.

(β) Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

άλυτη

Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά Κατανομής

Αναμενόμενη (ή Μέση) Τιμή Τ.Μ.

Ορισμός
Η **αναμενόμενη τιμή** (expected value) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ ορίζεται ως:

EX

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i \cdot f_X(x_i)$$

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη τιμή για μία συνεχή ΤΜ, Υ ορίζεται ως:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx\,.$$

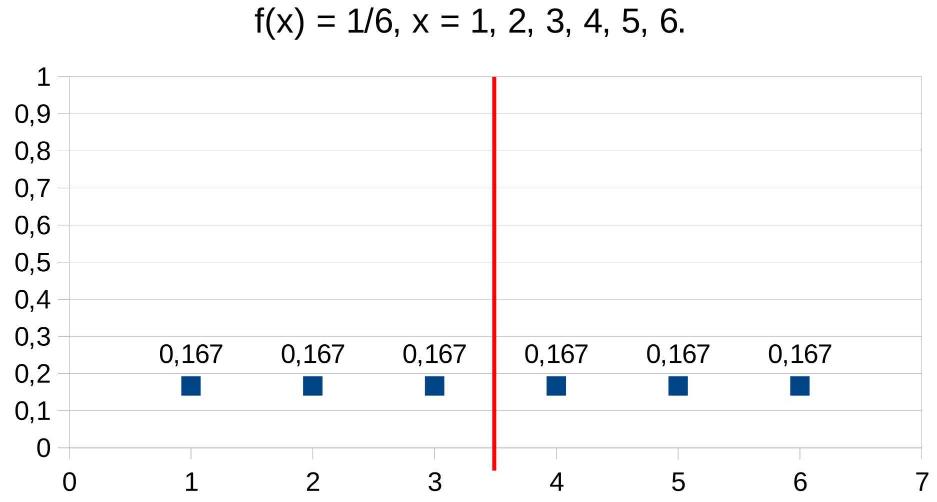
Αναμενόμενη (ή Μέση) Τιμή Τ.Μ.

Παράδειγμα 1

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού} τότε

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, και $f_X(x_i) = 1/6$, $i = 1, 2, .., 6$, άρα

$$E(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 21/6 = \underline{3{,}5}.$$

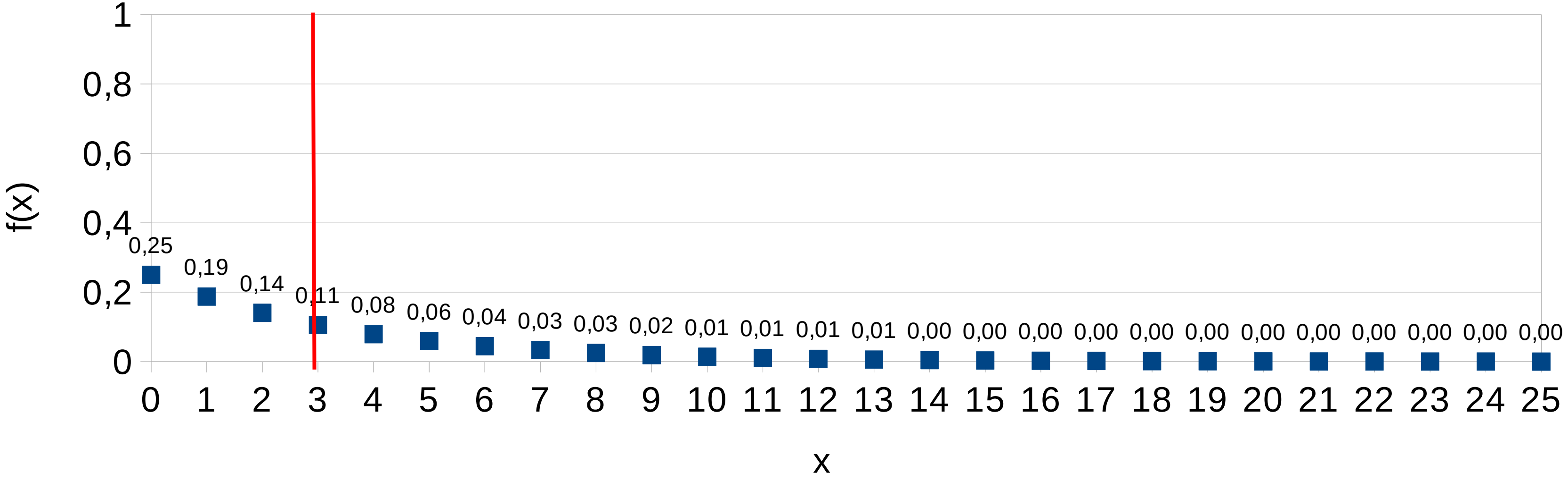


Αναμενόμενη (ή Μέση) Τιμή Τ.Μ.

Παράδειγμα 2

Αν Χ μία τ.μ. με σ.μ.π. $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, τότε

$$E(X) = \Sigma_{n \geq 0}\, n f(n) = 1/4\, \Sigma_{n \geq 0}\, n(3/4)^n$$
$$= 1/4\, \Sigma_{n \geq 1}\, n(3/4)^n$$
$$= 3/16\, \Sigma_{n \geq 1}\, n(3/4)^{n-1}$$
$$= 3/16\, [1 / (1 - 3/4)^2] = 3.$$

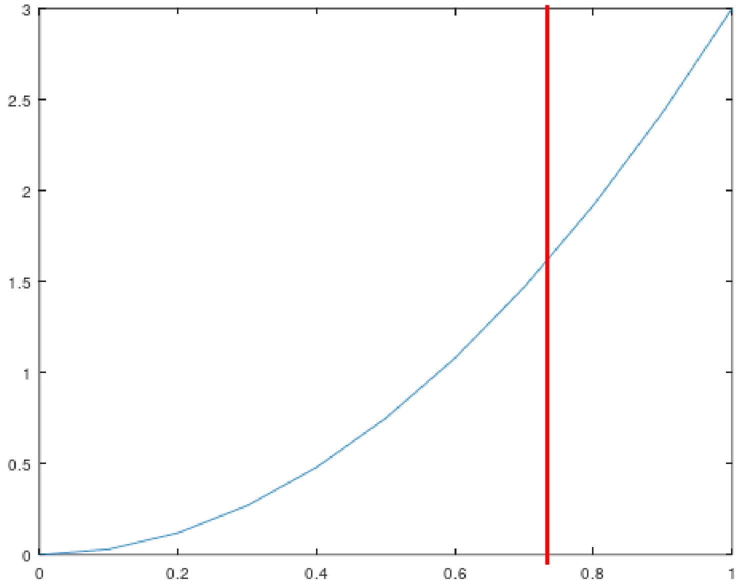


Αναμενόμενη (ή Μέση) Τιμή Τ.Μ.

Παράδειγμα 3

Αν X συνεχής με σ.π.π. $f(x) = 3x^2$, x ϵ [0, 1] και $f(x) = 0$, x ϵ R – [0, 1], τότε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(3x^2\right)dx = 3\int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{4}.$$



Ιδιότητες αναμενόμενης τιμής E(X)

1. Για κάθε λ ϵ R και για κάθε τ.μ. X είναι **$E(\lambda X) = \lambda E(X)$.**

2. Η αναμενόμενη τιμή έχει την αθροιστική ιδιότητα: **$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$**

3. **$E(\lambda) = \lambda$** (ειδική περίπτωση της 1 για X = 1 παντού).

4. Αν g: R → R κυρτή, τότε **$E(g(X)) \geq g(E(X))$.**

5. Αν g: R → R κοίλη, τότε **$E(g(X)) \leq g(E(X))$**

Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Η αναμενόμενη τιμή δεν είναι η ίδια έννοια με τη μέση τιμή όπως συνήθως υπολογίζεται αυτή ως αριθμητικός μέσος.

Η μέση τιμή αναφέρεται σε συγκεκριμένη υλοποίηση ενός πειράματος για κάποιο πλήθος επαναλήψεων ενώ η αναμενόμενη τιμή υπολογίζεται από όλες τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές και τις αντίστοιχες πιθανότητες με τις οποίες μπορεί να συμβούν.

Για παράδειγμα, αν ρίξω ένα ζάρι 10 φορές και φέρω 1, 5, 3, 6, 6, 2, 2, 3, 4, 1, τότε η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 33/10 = 3,3 που απέχει κατά 0,2 από την αναμενόμενη τιμή (που είναι 3,5).

Ωστόσο, αν ρίξω το ίδιο ζάρι Ν φορές με $N \to \infty$, τότε, επειδή η πιθανότητα εμφάνισης για κάθε αριθμό είναι η ίδια (1/6), μακροπρόθεσμα, η μέση τιμή θα προσεγγίσει την αναμενόμενη τιμή.

Αυτό το γεγονός είναι γνωστό και ως **Νόμος των Μεγάλων Αριθμών.**

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 1

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού}, να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της $Y = X^2$.

Λύση

Υπόδειξη

Βρείτε πρώτα την f_Y.

$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $f_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

$Y = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$

$$E(Y) = \sum_{y_i} y_i \cdot P(Y = y_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} \simeq 15{,}2.$$

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 2

Αν X = 0, 1, 2, … και $f_X(0) = 1/2$, $f_X(1) = 1/2$, $f_X(n) = 0$, $n > 1$, τότε να βρεθεί η E(X).

$P(X=0)$ $P(X=1)$ $P(X=n), n>1$

Λύση

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i \cdot f_X(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 3
Αν E(X) = 2 και E(Y) = 1 να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της Z = 2X – Y.

Λύση

$E(Z) = E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 4

Αν X είναι μία τ.μ. με E(X) = 1 τότε να βρεθεί το πρόσημο της E(ln X).

Λύση

άλυτη

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f(x) = $x^3/4$, x є [0, 2] και f(x) = 0, x є R – [0, 2]. Να βρεθεί η E(X).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^5}{5} = \frac{32}{20} = 1{,}6$$

άλυτη

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = x + 1$, $x \in (-1, 0]$ και $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1)$. Να βρεθεί η $E(X)$.

άλυτη

Ασκήσεις στην αναμενόμενη τιμή

Άσκηση 7

Δίνεται η συνεχής τ.μ. X με σ.κ. $F(x) = (x + 1)^2/4$, $x \in (-1, 1)$. Να βρεθεί η $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{x+1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \rightarrow F_X'(x) = f_X(x)$$

$$f_X(x) = \left(\frac{(x+1)^2}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (x+1) = \frac{x+1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

άλυτη

Επικρατούσα Τιμή και Διάμεση Τιμή

Επικρατούσα Τιμή και Διάμεση Τιμή

Δύο ακόμα μέτρα “θέσης” μίας κατανομής είναι η επικρατούσα τιμή και η διάμεση τιμή.

Αν X είναι μία τ.μ. και f_X η συνάρτηση (μάζας ή πυκνότητας) πιθανότητας, τότε:

Επικρατούσα τιμή (mode) της X είναι το/τα x ϵ R τα οποία μεγιστοποιούν την τιμή της f_X.

Διάμεση τιμή (median) της X είναι το x_0 ϵ R για το οποίο ισχύει

$$\sum_{x \leq x_0} f_X(x) \leq 0{,}5 \text{ και } \sum_{x \geq x_0} f_X(x) \geq 0{,}5$$

Επικρατούσα Τιμή και Διάμεση Τιμή

Άσκηση

Αν το πείραμα είναι η ρίψη 2 ζαριών και X = {το άθροισμα των δύο ρίψεων}, τότε να βρεθούν:

(α) η επικρατούσα τιμή M.

(β) η διάμεσος δ.

Λύση

Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση

Διακύμανση Τ.Μ.

Ορισμός
Διακύμανση ή **διασπορά** (variance) μίας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι η ποσότητα:

$$= \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X = E(X - \mu)^2}, \text{ όπου } \boldsymbol{\mu = EX}.$$

Αποδεικνύεται ότι, $\boldsymbol{\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2}$, όπου $\boldsymbol{\mu = EX}$.

Απόδειξη
Είναι $(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$. Από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής, προκύπτει

$$\begin{aligned} E(X - \mu)^2 &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Διακύμανση Τ.Μ.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Αν **X διακριτή τ.μ.** και f_X, η σ.μ.π. τότε

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \underbrace{\sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot f_X(x_i)} = \sum_{x_i} x_i^2 \cdot f_X(x_i) - \mu^2.$$

Αν **X συνεχής τ.μ.** και f_X, η σ.π.π. τότε

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \mu^2.$$

Τυπική απόκλιση Τ.Μ.

Αν η τυχαία μεταβλητή δηλώνει κάποια φυσική ποσότητα, τότε η διακύμανση αποδίδει την “διασπορά” των πιθανών τιμών της σε μονάδες τετραγωνικές αυτών που λαμβάνει η τυχαία μεταβλητή. Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας της διακύμανσης λύνει αυτό το πρόβλημα προσφέροντας ένα μέτρο διασποράς που ιστορικά καταδείχθηκε ως το πλέον σημαντικό.

Ορισμός
Τυπική απόκλιση (standard deviation) μίας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι η ποσότητα:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{Var\,X}}, \text{ όπου } \mathbf{Var\,X} = \mathbf{E}\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right)^{2}, \text{ και } \boldsymbol{\mu} = \mathbf{EX}.$$

Ασκήσεις στην διακύμανση

Άσκηση 1

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού}, να βρεθούν τα VarX, σ.

Λύση

$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad f_X(x) = \frac{1}{6}.$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6} = 15{,}2.$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 15{,}2 - 3{,}5^2 = 2{,}95.$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2{,}95} = 1{,}72.$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx \quad \text{ή} \quad \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

Ασκήσεις στην διακύμανση

Άσκηση 2

Αν X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f(x) = x + 1, x є (-1, 0] και f(x) = 1 – x, x є [0, 1), να βρεθούν τα VarX, σ.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x \le 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\cdot(x+1)\,dx + \int_0^1 x\cdot(1-x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\cdot(x+1)\,dx + \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$ Άρα, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6}$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

άλυτη

Ιδιότητες Var(X)

Οι βασικότερες ιδιότητες της διακύμανσης είναι οι εξής:

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(X) = 0 \rightarrow$ υπάρχει x_0 є R, τέτοιο ώστε $P(X = x_0) = 1$.
- $Var(X + \alpha) = Var(X)$.
- $Var(\lambda) = 0$.
- $Var(\lambda X) = \lambda^2 \cdot Var(X)$.

Ασυμμετρία και κυρτότητα κατανομής

Ασυμμετρία και κυρτότητα κατανομής

Δύο ακόμα *γεωμετρικά χαρακτηριστικά* μίας κατανομής πιθανότητας είναι τα εξής:

- Ο **συντελεστής ασυμμετρίας** (skewness)

$$\mathbf{skew}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{E}\left[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^3\right]}{\boldsymbol{\sigma}^3} = \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)^3$$

- Ο **συντελεστής κυρτότητας** (kurtosis)

$$\mathbf{kurt}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{E}\left[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^4\right]}{\boldsymbol{\sigma}^4} = \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)^4$$

Ασυμμετρία και κυρτότητα κατανομής

Άσκηση

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού} να βρεθούν τα γ, α.

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad . \quad \mu = 3,5 = E(X).$$

$$\gamma = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{1}{1,72^3} \cdot \left[(1-3,5)^3 \cdot \frac{1}{6} + (2-3,5)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6-3,5)^3 \cdot \frac{1}{6} \right] = 0$$

$$\alpha = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{1}{1,72^4} \cdot \left[(1-3,5)^4 \cdot \frac{1}{6} + (2-3,5)^4 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6-3,5)^4 \cdot \frac{1}{6} \right] = \dots$$

Ασυμμετρία και κυρτότητα κατανομής

Άσκηση

Αν X = {το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού} να βρεθούν τα γ, α.

x	f(x)	x – EX	$(x – EX)^2$	$(x – EX)^3$	$(x – EX)^4$
1	0,167	-2,5	6,25	-15,63	39,06
2	0,167	-1,5	2,25	-3,38	5,06
3	0,167	-0,5	0,25	-0,13	0,06
4	0,167	0,5	0,25	0,13	0,06
5	0,167	1,5	2,25	3,38	5,06
6	0,167	2,5	6,25	15,63	39,06

EX	3,5
VarX	17,5
StDev	4,18
γ	0
α	0,05

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κατανομής

Σύνοψη:

- Η αναμενόμενη τιμή EX, η διάμεσος δ και η επικρατούσα τιμή M εκφράζουν το “κέντρο” της κατανομής των τιμών.
- Η διασπορά Var X εκφράζει το “άπλωμα” της κατανομής των τιμών.
- Ο συντελεστής ασυμμετρίας γ ανιχνεύει την ύπαρξη “ουράς” προς τα δεξιά ($\gamma > 0$) ή τα αριστερά ($\gamma < 0$) ή ισοδύναμα την ύπαρξη τιμών με ιδιάζων μέγεθος.
- Ο συντελεστής κυρτότητας α ποσοτικοποιεί το ρυθμό μεταβολής της μάζας πιθανότητας γύρω από την αναμενόμενη τιμή ή ισοδύναμα, ποσοτικοποιεί το “πλάτος” της ουράς δεξιά ή αριστερά από την αναμενόμενη τιμή.

– Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

– Πιθανογεννήτρια Συνάρτηση

Ροπές τυχαίας μεταβλητής

Η EX ονομάζεται **1η ροπή** (moment) της τυχαίας μεταβλητής X. Γενικότερα, η **n-οστή ροπή** (n-th moment) της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι

$$\kappa_n = EX^n$$

ενώ αν μ = EX είναι η αναμενόμενη τιμή τότε η **n-οστή κεντρική ροπή** (n-th central moment) της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι

$$\mu_n = E[(X - EX)^n] = E[(X - \mu)^n]$$

Παρατηρούμε ότι **EX = κ_1, Var X = μ_2.**

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx$ ή $\sum_{x_i} e^{t x_i} \cdot P(X = x_i)$

Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Έστω X μία τ.μ. (διακριτή ή συνεχής). Η **ροπογεννήτρια** (moment-generating function) της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{M_X(t) = E(e^{tX}),\ t \in (-\infty, +\infty)}$$

Από τον ορισμό της, οι ροπές είναι συντελεστές στο ανάπτυγμα Taylor.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = E\left(1 + Xt + \frac{X^2}{2!}t^2 + \cdots\right) \\ &= 1 + E(X)t + \frac{E\left(X^2\right)}{2!}t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E\left(X^n\right)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!}t^n. \end{aligned}$$

$\kappa_n = E(X^n)$ $\quad \kappa_1 = \mu$, $\mathrm{Var}X = \kappa_2 - \kappa_1^2$

Σημείωση
Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν ορίζεται πάντα, καθώς απαιτείται η ύπαρξη των ροπών κάθε τάξης. Αυτό δεν συμβαίνει με βεβαιότητα, όπως για παράδειγμα στην κατανομή Cauchy.

Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Η ονομασία **ροπογεννήτρια** δικαιολογείται από τις παρακάτω προφανείς σχέσεις:

$$M^{(1)}_X(0) = EX, \quad M^{(2)}_X(0) = E(X^2) \quad , \ldots, \quad M^{(n)}_X(0) = E(X^n).$$

Επιπλέον, από τον ορισμό προκύπτει οτι:

$$M_{\alpha X + b}(t) = e^{bt}M_X(\alpha t)$$

Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Άσκηση 1

Δίνεται η διακριτή Τ.Μ. X με σ.μ.π. $f(x) = 0{,}5^x$, $x \geq 1$.

(α) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X.

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

(γ) Να δοθεί ο τύπος της ροπογεννήτριας της τυχαίας μεταβλητής Y = 3X + 2.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{t\cdot x}\cdot f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx}\cdot 0{,}5^{x} = \sum_{\substack{n=1\\ n-1=0}}^{+\infty} (0{,}5\cdot e^{t})^{n} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{+\infty} (0{,}5\cdot e^{t})^{\lambda+1} = 0{,}5\cdot e^{t}\cdot \frac{1}{1-0{,}5\cdot e^{t}} = \frac{0{,}5\cdot e^{t}}{1-0{,}5\cdot e^{t}}, \quad t\in\mathbb{R}$$

άλυτη

$$E(X) = M'_X(0) \quad , \quad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ όπου } E(X^2) = M''_X(0).$$

$$M_X(x) = \frac{0{,}5e^t}{1-0{,}5e^t} \Rightarrow M'_X(x) = \frac{0{,}5e^t\cdot(1-0{,}5e^t) - 0{,}5\cdot e^t\cdot(-0{,}5e^t)}{(1-0{,}5e^t)^2} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot e^t}{(1-0{,}5e^t)^2}$$

Άρα, $E(X) = M'_X(0) = \frac{0{,}5}{(1-0{,}5)^2} = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2.$

$$M''_X(x) = \left(\frac{0{,}5e^t}{(1-0{,}5e^t)^2}\right)' = \cdots \text{ και } E(X^2) = M''(0) \text{ και}$$

$$Var(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = \cdots$$

άλυτη

Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Άσκηση 2

Δίνεται η Τ.Μ. Χ με ροπογεννήτρια $M_X(t) = \exp(e^t - 1)$. Να βρεθούν τα EX, VarX.

άλυτη

Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Άσκηση 3

Δίνεται η Τ.Μ. X με σ.π.π. $f_X(x) = \theta e^{-\theta(x-\alpha)}$. $x > \alpha$ όπου $\alpha, \theta > 0$. Να βρεθούν τα $F_X(x)$, $M_X(t)$, EX, $VarX$.

άλυτη

Ροπογεννήτρια και συνάρτηση κατανομής

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t) = E(e^{tX})$, $t \in R$, όταν υπάρχει και ορίζεται καλώς, προσδιορίζει πλήρως τη συνάρτηση κατανομής.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα

Αν X, Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε

$$M_X(t) = M_Y(t),\ t \in R,$$

τότε θα είναι και

$$F_X(x) = F_Y(x),\ x \in R.$$

Σημείωση
Η απόδειξη του θεωρήματος είναι διαθέσιμη εδώ:

https://math.stackexchange.com/questions/458680/how-to-prove-moment-generating-function-uniqueness-theorem

$G_X(z) = \sum_{x_i} z^{x_i} \cdot P(X = x_i)$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Έστω X μία διακριτή μεταβλητή που *λαμβάνει ακέραιες τιμές*. Η **πιθανογεννήτρια συνάρτηση** (probability-generating function – PGF) της τ.μ. X ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{G_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n) \cdot z^n, \ \text{όπου} \ f_X(n) = P(X = n).}$$

Καθώς $0 \leq P(X = n) \leq 1$, n є N, η συνάρτηση G_X συγκλίνει πάντα για κάθε $|z| < 1$. Είναι ωστόσο πιθανό να συγκλίνει σε χωρίο μεγαλύτερης ακτίνας, ακόμα και στο σύνολο του μιγαδικού επιπέδου C.

Σημειώσεις

1) Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ στη συνέχεια θα αξιοποιηθεί ως μία πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής.

2) Η πιθανογεννήτρια $G_X(z)$ συνδέεται στενά με τη ροπογεννήτρια M_X με τη σχέση $G_X(e^t) = M_X(t)$ ή ισοδύναμα $G_X(z) = M_X(\log z)$.

3) Η πιθανογεννήτρια μπορεί να οριστεί και για τ.μ. που λαμβάνουν μη ακέραιες ή αρνητικές τιμές, με προσοχή ωστόσο ως προς τη σύγκλιση της απειροσειράς. Μία σχετική συζήτηση παρουσιάζεται εδώ:
https://stats.stackexchange.com/questions/107479/probability-generating-function-for-negative-values-of-random-variables

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Άσκηση

Αν X = 0, 1, 2 με f(0) = ½, f(1) = ¼, f(2) = ¼, να βρεθεί η $G_X(z)$.

$$G_X(z) = E(z^X) = z^0 \cdot f(0) + z^1 \cdot f(1) + z^2 \cdot f(2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + z \cdot \frac{1}{4} + z^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (z^2 + z + 2).$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Η συνάρτηση $G_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n) \cdot z^n$, στο χωρίο που ορίζεται καλώς, παραγωγίζεται ως εξής:

$G^{(1)}{}_X(z) = \Sigma_{n = 1, 2, \ldots}\ n \cdot P(X = n) \cdot z^{n-1}$

$= P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) \cdot z + 3 \cdot P(X = 3) \cdot z^2 + \ldots$

$G^{(2)}{}_X(z) = \Sigma_{n = 2, 3, \ldots}\ n \cdot (n-1) \cdot P(X = n) \cdot z^{n-2}$

$= 2 \cdot P(X = 2) + 6 \cdot P(X = 3) \cdot z + 12 \cdot P(X = 4) \cdot z^2 + \ldots$

$G^{(3)}{}_X(z) = \Sigma_{n = 3, 4, \ldots}\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot P(X = n) \cdot z^{n-3}$

$= 6 \cdot P(X = 3) + 24 \cdot P(X = 4) \cdot z + 60 \cdot P(X = 5) \cdot z^2 + \ldots$

...

$G^{(k)}{}_X(z) = \Sigma_{n = k, k+1, \ldots}\ n! / (n-k)! \cdot P(X = n) \cdot z^{n-k}$

Πιθανογεννήτρια και συνάρτηση πιθανότητας

Η ονομασία “πιθανογεννήτρια συνάρτηση” για την $G_X(z)$ δικαιολογείται από τις εξής ιδιότητες:

$G_X(0) = \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} P(X = 0) \cdot 0^n = P(X = 0)$ ή $\mathbf{P(X = 0) = G_X(0)}$

$G^{(1)}{}_X(0) = \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} n \cdot P(X = n) \cdot 0^n = P(X = 1)$ ή $\mathbf{P(X = 1) = G^{(1)}{}_X(0)}$

$G^{(k)}{}_X(0) / k! = 1 / k! \cdot \Sigma_{n = k, k+1, \ldots} n! / (n - k)! \cdot P(X = n) \cdot 0^{n-k} = P(X = k)$ ή $\mathbf{P(X = k) = G^{(k)}{}_X(0)/k!}$

Συμπεραίνουμε ότι:

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, προσδιορίζει πλήρως τη συνάρτηση πιθανότητας $f_X(n) = P(X = n)$, n = 0, 1, 2, ….

Ιδιαίτερα, αν για δύο τ.μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς X, Y είναι $G_X(z) = G_Y(z)$, τότε θα είναι και $f_X(n) = f_Y(n)$.

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Άσκηση

Έστω X διακριτή τ.μ. που λαμβάνει τιμές φυσικούς αριθμούς με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z) = z(2 + 3z^2) / 5$. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $P(X = κ)$ της X, κ = 0, 1, 2, ….

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις τιμές $G^{(n)}_X(0) / n!$ για διάφορές τιμές του n.

$G(z) = z \cdot (2 + 3z^2)/5$

$G'(z) = \frac{1}{5}(2 + 9z^2)$

$G''(z) = \frac{18}{5} z$

$G'''(z) = \frac{18}{5}$

$G^{(n)}(z) = 0, \ n \geq 4.$

$P(X=0) = G_X(0) = 0.$

$P(X=1) = G_X'(0) = \frac{2}{5}$

$P(X=2) = \frac{G_X''(0)}{2!} = 0$

$P(X=3) = \frac{G^{(3)}(0)}{3!} = \frac{18/5}{6} = \frac{3}{5}$

$P(X=n) = 0, \ n \geq 4$

άλυτη

Πιθανογεννήτρια και γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Η ονομασία πιθανογεννήτρια αιτιολογείται <u>και</u> από τις παρακάτω ιδιότητες

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z)$ και $\lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z) = G^{(1)}_X(1)$, τότε για την πιθανογεννήτρια $G_X(z)$ ισχύουν τα εξής:

- $E(X) = \Sigma_{\kappa = 1, 2, \ldots}\ \kappa \cdot P(X = \kappa) = \lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z) = G^{(1)}_X(1)$
- $E(X \cdot (X - 1) \cdot \ldots \cdot (X - n + 1)) = \Sigma_{\kappa = n, n+1, \ldots}\ \kappa! / (\kappa - n)! \cdot P(X = \kappa) = \lim_{z \to 1} G^{(n)}_X(z) = G^{(n)}_X(1)$
- $Var(X) = E(X - E(X))^2$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

$$= E(X(X - 1)) + E(X) - (E(X))^2$$

$$= \lim_{z \to 1} G^{(2)}_X(z) + \lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z) - [\lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z)]^2$$

$$= G^{(2)}_X(1) + G^{(1)}_X(1) - [G^{(1)}_X(1)]^2$$

Πιθανογεννήτρια και γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Σχόλιο

Η επιλογή ορισμού της G ως μιγαδική συνάρτηση αιτιολογείται από αποτελέσματα όπως αυτό:

Αν X: διακριτή τ.μ. τότε

P({X είναι πολλαπλάσιο του 4}) = ($G_X(1) + G_X(i) + G_X(-1) + G_X(-i)$)/4.

Η απόδειξη αξιοποιεί το γεγονός ότι οι αριθμοί 1, i, -1, -i είναι οι 4^ες^ ρίζες της μονάδας.

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://math.stackexchange.com/questions/3213142/root-of-unity-filter

Γραφική Σύνοψη

Τυχαία Μεταβλητή X

Κατανομή Τιμών

Συναρτήσεις

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας f_X
Συνάρτηση Κατανομής F_X
Ροπογεννήτρια
Πιθανογεννήτρια

Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά Κατανομής

Αναμενόμενη Τιμή
~~Επικρατούσα Τιμή~~
~~Διάμεση Τιμή~~
Διακύμανση
Τυπική Απόκλιση
Ροπές – Κεντρικές ροπές
Συντελεστής Ασυμμετρίας
Συντελεστής Κυρτότητας