

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Για την τυχαία μεταβλητή X , γνωρίζουμε ότι $X = 1, 3, 7$ και

$$f_x(1) = 0,2, f_x(3) = c, f_x(7) = 0,6.$$

i) Να δείξετε ότι $c = 0,2$.

ii) Να υπολογίσετε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατανομής ($E(X)$, $\text{Var}(X)$, σ , γ , α)

iii) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_x , και σχεδιάστε το διάγραμμά της.

iv) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια ($M_x(t) = E(e^{tx})$) και η πιθανογεννήτρια ($G(z) = E(z^x)$) συνάρτηση.

2. Για μία τυχαία μεταβλητή X , γνωρίζουμε ότι $E(X) = 50$ και $\text{Var}(X) = 12$. Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E(X^2)$, $E(3X + 2)$.

Υπόδειξη: $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3/4$, $x \in [0, c]$ και $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} - [0, c]$. Να βρείτε την τιμή του c για την οποία η f γίνεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχή τ.μ. X .

Λύσεις ασκήσεων

1. Για την τυχαία μεταβλητή X , γνωρίζουμε ότι $X = 1, 3, 7$ και
 $f_X(1) = 0,2, f_X(3) = c, f_X(7) = 0,6.$

i) Να δείξετε ότι $c = 0,2$: $0,2 + c + 0,6 = 1 \rightarrow c = 0,2.$

ii) Να υπολογίσετε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατανομής ($E(X), \text{Var}(X), \sigma, \gamma, \alpha$)

$$E(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,6 = 0,2 + 0,6 + 4,2 = 5.$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,6 = 0,2 + 1,8 + 29,4 = 31,4 \text{ και } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 31,4 - 25 = 6,4. \sigma = 6,4^{1/2} = 2,53.$$

$$E(X - \mu)^3 = (1 - 5)^3 \cdot 0,2 + (3 - 5)^3 \cdot 0,2 + (7 - 5)^3 \cdot 0,6 = -64 \cdot 0,2 - 8 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,6 = -9,6 \text{ και } \gamma = \mu_3 / \sigma^3 = -9,6 / 2,53^3 = -0,6.$$

$$E(X - \mu)^4 = (1 - 5)^4 \cdot 0,2 + (3 - 5)^4 \cdot 0,2 + (7 - 5)^4 \cdot 0,6 = 256 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,6 = 64 \text{ και } \alpha = \mu_4 / \sigma^4 = 64 / 2,53^4 = 1,56.$$

iii) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X , και σχεδιάστε το διάγραμμά της.

Συνάρτηση κατανομής: $x < 1$: $F_X(x) = 0, 1 \leq x < 3$: $F_X(x) = 0,2, 3 \leq x < 7$: $F_X(x) = 0,4, x \geq 7$: $F_X(x) = 1.$

iv) $E_X(t) = E(e^{tx}) = e^t \cdot 0,2 + e^{3t} \cdot 0,2 + e^{7t} \cdot 0,6 = 0,2e^t(1 + e^{2t} + 3e^{6t}), G_X(t) = E(z^X) = z \cdot 0,2 + z^3 \cdot 0,2 + z^7 \cdot 0,6 = 0,2z(1 + z^2 + 3z^6).$

2. Για μία τυχαία μεταβλητή X , $E(X) = 50$ και $\text{Var}(X) = 12$. Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E(X^2), E(3X + 2).$

Λύση: $E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2 = 2.512. E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 152.$

3. Πρέπει το ολοκλήρωμα της $x^3/4, x \in [0, c]$, να είναι ίσο με 1. Άρα, $c^4 = 4$ ή $c = \pm 2^{0,5}$. Όμως, $c > 0$, άρα $c = 2^{0,5}.$