

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2025 και ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1

Το εαρινό εξάμηνο το 74,9% των εγγεγραμμένων φοιτητών συμμετείχε στη διαδικασία των ασκήσεων. Μεταξύ των φοιτητών που συμμετείχαν στις ασκήσεις, το 74,3% εξετάστηκε επιτυχώς (βαθμός ≥ 5), ενώ μεταξύ των φοιτητών που δεν συμμετείχαν στις ασκήσεις το 32% εξετάστηκε επιτυχώς. Να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών:

(α) που πέτυχαν στην εξέταση του μαθήματος.

(β) που συμμετείχαν στις ασκήσεις του μαθήματος, δεδομένου ότι δεν πέτυχαν στην εξέταση.

(γ) που δεν συμμετείχαν στις ασκήσεις του μαθήματος, δεδομένου ότι πέτυχαν στην εξέταση.

Βαθμολογία: (α) 0,8μ (β) 0,9μ (γ) 0,8μ

Ενδεικτική λύση

Ορίζουμε $\Sigma = \{\text{ο φοιτητής συμμετείχε στις ασκήσεις}\}$ και $E = \{\text{ο φοιτητής επέτυχε στην εξέταση του μαθήματος}\}$.

Είναι: $P(\Sigma) = 0,749$, $P(E | \Sigma) = 0,743$, $P(E | \Sigma') = 0,32$

(α) $P(E) = P(E | \Sigma) \cdot P(\Sigma) + P(E | \Sigma') \cdot P(\Sigma') = 0,743 \cdot 0,749 + 0,32 \cdot (1 - 0,749) = 0,637 = 63,7\%$.

(β) Είναι $P(E') = 1 - P(E) = 1 - 0,637 = 0,363$, $P(E' | \Sigma) = 1 - P(E | \Sigma) = 0,257$ και

$P(\Sigma | E') = P(E' | \Sigma) \cdot P(\Sigma) / P(E') = 0,257 \cdot 0,749 / 0,363 = 0,530 = 53\%$.

(γ) Είναι $P(\Sigma | E) = P(E | \Sigma) \cdot P(\Sigma) / P(E) = 0,743 \cdot 0,749 / 0,637 = 0,874$ και

$P(\Sigma' | E) = 1 - P(\Sigma | E) = 1 - 0,874 = 0,126 = 12,6\%$.

Θέμα 2

Για την τ.μ. $X \sim B(3, \theta)$ πήραμε ένα δείγμα μεγέθους 5 (δηλαδή 5 φορές επαναλήφθηκε η σειρά των 3 δοκιμασιών) και βρήκαμε τις τιμές 2, 3, 2, 0, 1.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραπάνω παρατηρήσεων είναι η

$$L(\theta) = 27\theta^8(1 - \theta)^7.$$

(β) Να δείξετε ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο θ είναι ο 8/15.

Βαθμολογία: (α) 1,3μ (β) 1,2μ

Ενδεικτική Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι αν $X \sim B(3, \theta)$, τότε $P(X = k) = (3 \text{ ανά } k)\theta^k(1 - \theta)^{3-k}$.

Άρα,

$$P(X = 0) = (3 \text{ ανά } 0)(1 - \theta)^3 = (1 - \theta)^3,$$

$$P(X = 1) = (3 \text{ ανά } 1)\theta(1 - \theta)^2 = 3\theta(1 - \theta)^2,$$

$$P(X = 2) = (3 \text{ ανά } 2)\theta^2(1 - \theta) = 3\theta^2(1 - \theta),$$

$$P(X = 3) = (3 \text{ ανά } 3)\theta^3 = \theta^3.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $L(\theta) = P(X = 0)P(X = 1)P(X = 2)^2P(X = 3) = 27\theta^8(1 - \theta)^7$,

(β) Είναι $l(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln(27) + 8\ln(\theta) + 7\ln(1 - \theta)$.

Επιπλέον, $l'(\theta) = 8/\theta - 7/(1-\theta)$ και $l'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 8/15$.

Παρατηρώντας τον πίνακα προσήμου της 1ης παραγώγου διαπιστώνουμε πως το 8/15 είναι μέγιστο. Άρα η τιμή 8/15 είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο θ .

Θέμα 3

Τέσσερις λαμπτήρες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον έχοντας διάρκεια ζωής που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση διάρκεια 200 ώρες και τυπική απόκλιση 10 ώρες.

(α) Να δείξετε ότι η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να συνεχίσει να λειτουργεί μετά από 210 ώρες λειτουργίας είναι 0,159.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον 2 από τους 4 λαμπτήρες να συνεχίζουν να λειτουργούν μετά από 210 ώρες λειτουργίας.

Βαθμολογία: (α) 1μ (β) 1μ

Ενδεικτική Λύση

Αν X ο χρόνος λειτουργίας ενός λαμπτήρα, τότε $X \sim N(200, 10^2)$.

(α)

$$\begin{aligned} P(X > 210) &= P(Z > (210 - 200)/10) = P(Z > 1) \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866 \approx 0,159. \end{aligned}$$

(β) Αν $Y = \{\text{πλήθος λαμπτήρων από τους 3 που συνεχίζουν να λειτουργούν μετά από 210 ώρες λειτουργίας}\}$, τότε $Y \sim B(4, 0.159)$ και

$$\begin{aligned} P(\{\text{τουλάχιστον 2 από τους 4 λειτουργούν μετά από 110 ώρες}\}) &= P(Y \geq 2) \\ &= 1 - P(Y < 2) \\ &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - (4 \text{ ανά } 0) (1 - 0.159)^4 - (4 \text{ ανά } 1) 0.159(1 - 0.159)^3 = \\ &= 0,121. \end{aligned}$$

Θέμα 4

Για τα δεδομένα του πίνακα:

x	3	2	1
y	3	5	10

- (α) Να βρεθεί η συνδιακύμανση των x, y.
(β) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των x, y.
(γ) Να βρεθεί γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης της y από την x.
(δ) Να γίνει διάγραμμα διασποράς των τιμών στο οποίο να εμφανιστεί και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης.
(ε) Να βρεθούν τα αθροίσματα τετραγώνων TSS, ESS, RSS.
(ζ) Να βρεθεί ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 .

Βαθμολογία: (α) 0,5μ (β) 0,5μ (γ) 0,5μ (δ) 0,5μ (ε) 0,8μ (ζ) 0,2μ

Ενδεικτική λύση

(α) Είναι $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 6$, και $s_{xy} = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (x_i - 2)(y_i - 6) = -3,5$.

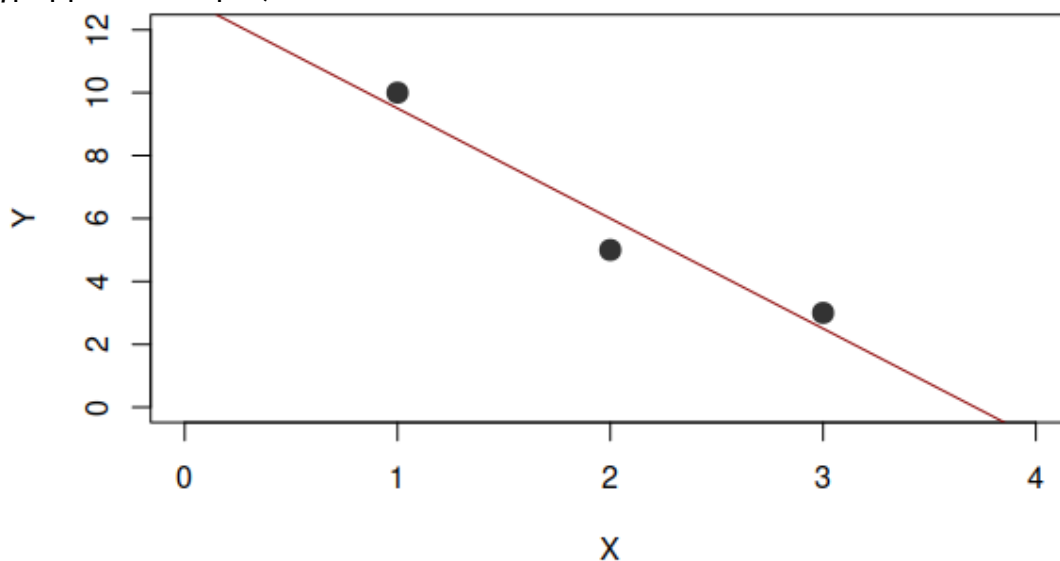
(β) $s_x^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (x_i - 2)^2 = 1$, $s_y^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (y_i - 6)^2 = 13$ και

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -0,971.$$

(γ) $\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} = -3,5$ και $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 13$. Η εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης είναι η

$$Y = -3,5 \cdot X + 13$$

(δ) Διάγραμμα διασποράς



(ε)

X	3	2	1
Y	3	5	10
$\hat{Y}$	2,5	6	9,5
$Y - \hat{Y}$	0,5	-1	0,5

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 26, \quad ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 24,5, \quad RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 1,5$$

(ζ) $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{24,5}{26} = 0,942.$