

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Σύνοψη διακριτών κατανομών

Κατανομή	Παράμετροι	Περιγραφή	Πιθανότητα $P(X = k)$
Διωνυμική	$B(n, p)$	Ένα πείραμα εκτελείται n φορές με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και $X = \{\text{πλήθος επιτυχιών στις } n \text{ επαναλήψεις}\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Υπεργεωμετρική	$HG(N, K, n)$	Σε ένα σύνολο με N αντικείμενα, υπάρχουν K που έχουν μία ιδιότητα. Εμείς επιλέγουμε n και $X = \{\text{πλήθος αντικειμένων στα } n \text{ που έχουν την ιδιότητα}\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Poisson	$P(\lambda)$	Γεγονότα συμβαίνουν με σταθερό ρυθμό λ γεγονότα / μονάδα χρόνου και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. $X = \{\text{πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}\}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
Γεωμετρική	$G_T(p)$ ή $G_F(p)$	Μία δοκιμασία έχει δύο πιθανά αποτελέσματα, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα $1 - p$. Αν $X = \{\text{πλήθος δοκιμασιών μέχρι την } 1^{\text{η}} \text{ επιτυχία}\}$ και $Y = \{\text{πλήθος αποτυχιών μέχρι την } 1^{\text{η}} \text{ επιτυχία}\}$, τότε $X \sim G_T(p)$, $Y \sim G_F(p)$ και $Y = X - 1$.	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ $P(Y = k) = (1-p)^k p$
Αρνητική διωνυμική	$NB(r, p)$	Μία δοκιμασία έχει δύο πιθανά αποτελέσματα, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα $1 - p$. Αν $X = \{\text{πλήθος δοκιμασιών μέχρι την } r^{\text{η}} \text{ επιτυχία}\}$, τότε $X \sim NB(r, p)$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

Περιεχόμενα 6^{ου} μαθήματος

- Βασικές κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών.
 - Ομοιόμορφη κατανομή.
 - Εκθετική κατανομή.
 - Κανονική κατανομή.
 - Προσέγγιση της Διωνυμικής από την Κανονική κατανομή.
 - Προσέγγιση της Poisson από την Κανονική κατανομή.
 - Άλλες ενδιαφέρουσες κατανομές
 - Κατανομή Γάμμα $\Gamma(k, \lambda)$.
 - Κατανομή $\chi^2(n)$.
 - Κατανομή Βήτα $B(\alpha, \beta)$.
 - Κατανομή Student $t(n)$.
 - Κατανομή $F(d_1, d_2)$.

Κατανομές πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

α) $f(x) \geq 0$ σχεδόν παντού.

$$\beta) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζει μία συνάρτηση κατανομής για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X , ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Αντίστροφα, αν $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ είναι μία *συνεχώς διαφορίσιμη* συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X , τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X , ορίζεται ως

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ο προσδιορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, εκτός από τον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής $P(\alpha < X < \beta)$, προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατανομής.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

$$E(x) = \int x \cdot f(x)$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

$$\gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx.$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

$$\alpha = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx.$$

$$G_X(z) = E(z^X) = \int_{-\infty}^{\infty} z^x f(x) dx.$$

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

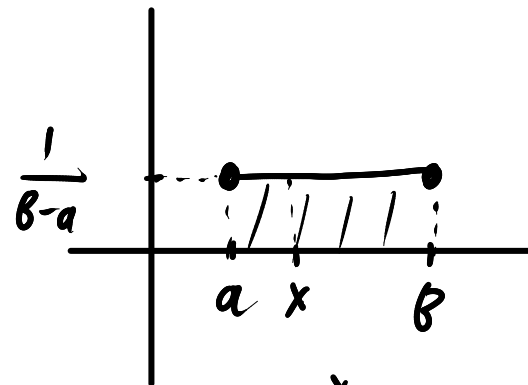
κατανομή	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	παράμετροι	μέση τιμή	διακύμανση
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Κανονική	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$	μ	σ^2
Εκθετική	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γάμμα	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\alpha/(\beta^2)$
Βήτα	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Cauchy	$\left(\pi\beta \left(1 + \left(\frac{x-a}{\beta} \right)^2 \right) \right)^{-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$	δεν υπάρχει	δεν υπάρχει
Weibull	$\frac{c}{\alpha} x^{c-1} e^{-\frac{x^c}{\alpha}}$	$\alpha, c > 0$	$\alpha^{\frac{1}{c}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$	$\alpha^{\frac{2}{c}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 \right)$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Ομοιόμορφη Κατανομή

Η συνεχής, ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha, \beta)$, είναι μία συμμετρική κατανομή πιθανότητας στην οποία, όλα τα υποσύνολα του $[\alpha, \beta]$ ίσου μήκους είναι ισοπίθανα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X \sim U(\alpha, \beta)$ είναι:

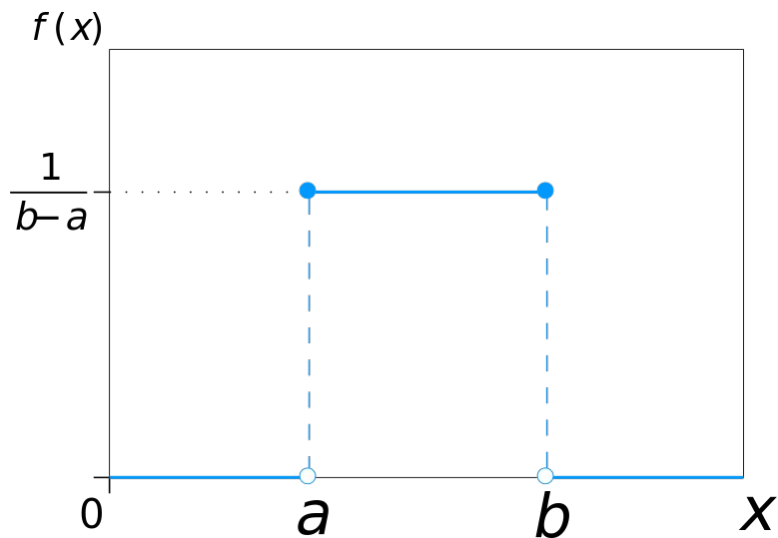
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & , \quad x < \alpha \text{ ή } x > \beta. \end{cases}$$



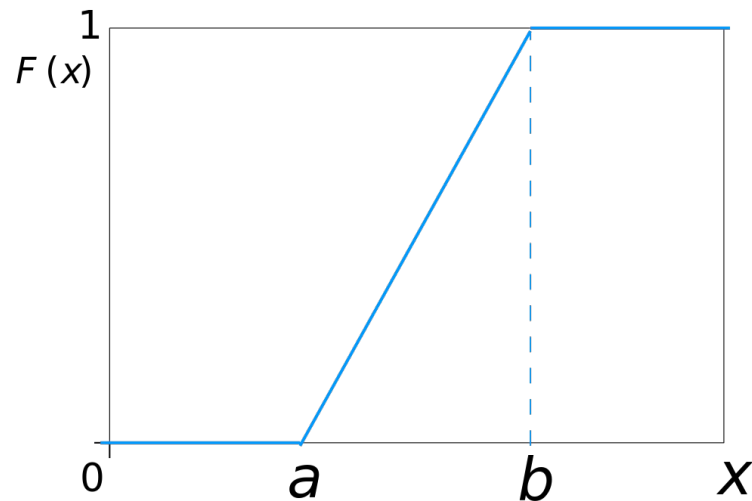
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1 & , \quad x > \beta. \end{cases}$$

$$P(\alpha \leq X \leq x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Ομοιόμορφη Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$



(Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 1

Αν $X \sim U(\alpha, \beta)$, τότε να δείξετε ότι $E(X) = (\alpha + \beta)/2$.

Απόδειξη

$$X \sim U(a, b) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b-a} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}$$

Ομοιόμορφη: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$$X \sim U(\alpha, \beta): f(x) = 1/(\beta - \alpha), \alpha \leq x \leq \beta.$$

Αναμενόμενη τιμή: $EX = (\alpha + \beta) / 2.$

Διακύμανση: $VarX = (\beta - \alpha)^2 / 12.$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = (\beta - \alpha) \frac{\sqrt{3}}{6}.$

Ασυμμετρία: $skew(X) = \gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

Κυρτότητα: $kurt(X) = \alpha = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{9}{5}$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 2

Αν $X \sim U(0, 18)$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες (α) $P(X < E(X))$, (β) $P(X > 12 | X > 8)$.

Λύση

$$X \sim U(0, 18), \quad E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+18}{2} = 9.$$

$$(a) P(X < E(X)) = P(X < 9) = \int_0^9 \frac{1}{18} dx = \frac{1}{18} \cdot 9 = 0,5.$$

$$(b) P(X > 12 | X > 8) = \frac{P(X > 12, X > 8)}{P(X > 8)} = \frac{P(X > 12)}{P(X > 8)} = \frac{\int_{12}^{18} \frac{1}{18} dx}{\int_8^{18} \frac{1}{18} dx} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

$$(\because P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12))$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 3

Αν $X \sim U(1, 2)$, να βρεθεί $s \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $P(X > s + \mu_X) = 1/4$.

Λύση

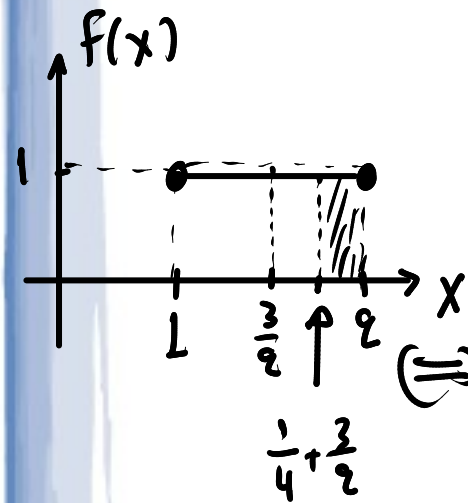
$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

$$X \sim U(1, 2) \quad P(X > s + \mu_X) = \frac{1}{4}$$

$$P(X > s + \frac{3}{2}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \int_{s + \frac{3}{2}}^2 dx = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - (s + \frac{3}{2}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - s = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{s = \frac{1}{4}}$$



Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 4

Γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με αναμενόμενη τιμή 1 και διακύμανση $4/3$.
Να βρεθεί η $P(X < 0)$.

Λύση

$$X \sim U(a, b) \quad E(X) = 1, \quad \text{Var}(X) = \frac{4}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ \text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a+b &= 2 \\ (b-a)^2 &= 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a+b &= 2 \\ b-a &= 4 \quad \vee \quad b-a = -4 \end{aligned} \right\}$$
$$\underline{\underline{b=3, a=-1 \quad \vee \quad b=-1, a=3.}}$$

$$X \sim U(-1, 3) \Rightarrow P(X < 0) = \int_{-1}^0 \frac{1}{3-(-1)} dx = \frac{1}{4} [0 - (-1)] = \frac{1}{4}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 5

Αν $X \sim U(0,1)$ τότε να υπολογισθεί η $E(X^3)$.

Λύση

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^3 \cdot 1 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 6

Ο χρόνος σε λεπτά που περιμένει κάποιος στην στάση το λεωφορείο (min) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, 15)$.

(α) Να βρεθεί η $f(x)$ και η $F(x)$.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να περιμένει λιγότερο από 12,5 min;

(γ) Ποια είναι η αναμενόμενη αναμονή στη στάση και ποια η τυπική απόκλιση αυτής;

Λύση

$$U(0, 15) : f(x) = \frac{1}{15-0} = \frac{1}{15} \cdot F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-0}{15-0} = \frac{x}{15}, & 0 \leq x \leq 15 \\ 1, & x > 15 \end{cases}$$

$$(β) P(X < 12,5) = F(12,5) = \frac{12,5}{15} = 0,833.$$

$$(γ) E(X) = \frac{15+0}{2} = 7,5 \text{ min}, \quad Var(X) = \frac{(15-0)^2}{12} = 18,75 \text{ min}^2 \Rightarrow \sigma = 4,33 \text{ min}$$

Εκθετική Κατανομή

Εκθετική Κατανομή

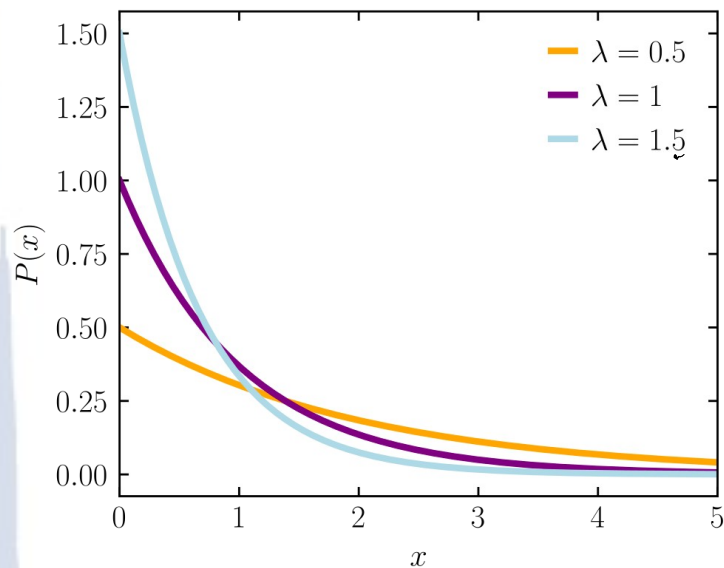
Λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X , ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ (γράφουμε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$) αν η κατανομή πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

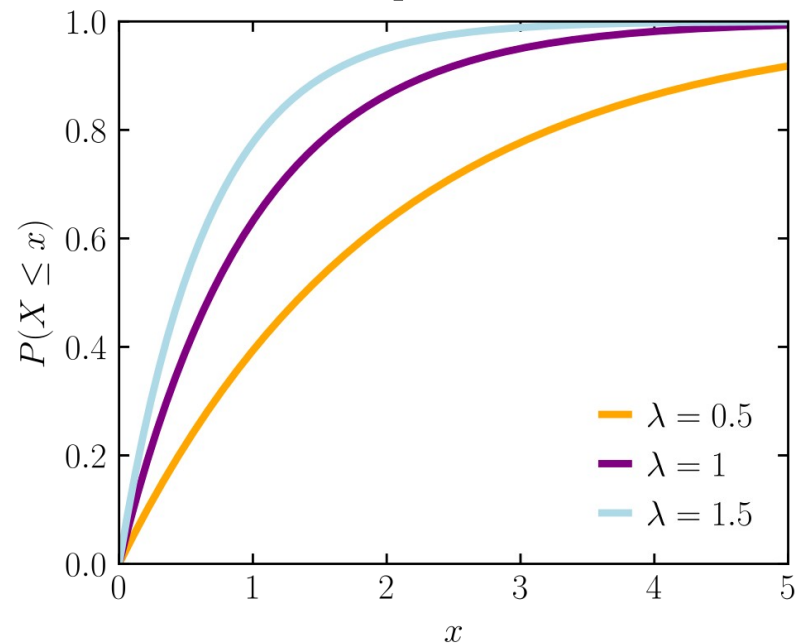
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$



(Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Εκθετική Κατανομή

Άσκηση 1

Αν $X \sim \text{Exp}(2)$ να βρεθούν οι πιθανότητες (α) $P(X > 1)$, (β) $P(X < 2)$, (γ) $P(0,5 \leq X \leq 2)$.

Λύση

$$X \sim \text{Exp}(2) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-2x}, \quad f(x) = 2e^{-2x}$$

$$(a) \quad P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} = 0,135.$$

$$(b) \quad P(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-2 \cdot 2} = 1 - e^{-4} = 0,982$$

$$(c) \quad P(0,5 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0,5) = F(2) - F(0,5) = e^{-2 \cdot 0,5} - e^{-2 \cdot 2} = e^{-1} - e^{-4} = 0,350$$

Εκθετική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Αναμενόμενη τιμή: $EX = 1 / \lambda$.

Διακύμανση: $\text{Var}X = 1 / \lambda^2$.

Τυπική απόκλιση: $\sigma = 1 / \lambda$

Ασυμμετρία: $\gamma = 2$.

Κυρτότητα: $\alpha = 9$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$
$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Η εκθετική ως συνοδευτική κατανομή
της κατανομής Poisson

Χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός

$$F(x) = P(X \leq t). \quad P(X > t)$$

$Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. $Y = \{\text{αφίξεις σε μονάδα του χρόνου}\} = 0, 1, 2, \dots$

λ : αναμενόμενο αριθμός αφίξεων./μονάδα χρόνου

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$X = \{\text{χρόνος μέχρι την 1^η αφίξη}\} \in (0, \infty)$.

$$\begin{aligned} P(X > t) &= P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (0, t]\}) = \\ &= P(Y_t = 0) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

λt : αναμενόμενο
αριθμός
αφίξεων
στο $(0, t]$.

$Y_t = \{\text{αφίξεις στο } (0, t]\}$

$Y_t \sim \text{Poisson}(\lambda t).$

Χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου και έστω $Y(t)$ η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Τότε $Y(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Έστω

X_1 : ο χρόνος που περνάει από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι να συμβεί το 1^ο γεγονός.

Αναζητούμε την κατανομή της τ.μ. X_1 , δηλαδή, την τιμή της πιθανότητας $P(X_1 \leq t)$, για $t \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$\{X_1 > t\} = \{\text{δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο χρονικό διάστημα } (0, t]\} = \{Y(t) = 0\},$$

$$\text{άρα, } P(X_1 > t) = P(Y(t) = 0) = e^{-\lambda t} \lambda^0 / 0! = e^{-\lambda t} \text{ ή } P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \text{ (και } P(X_1 \leq t) = 0, t < 0),$$

Δηλαδή η τ.μ. X_1 έχει τη συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ . Συμπεραίνουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

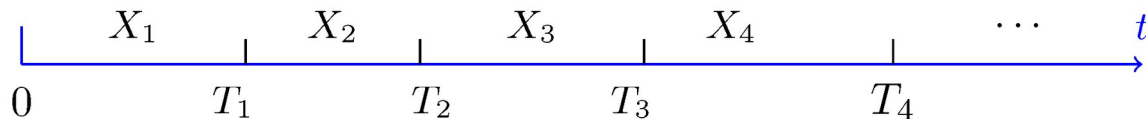
Χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός

Βρήκαμε, ότι αν X_1 : ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^ο γεγονός, τότε $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Άμεσα συμπεράσματα είναι τα εξής:

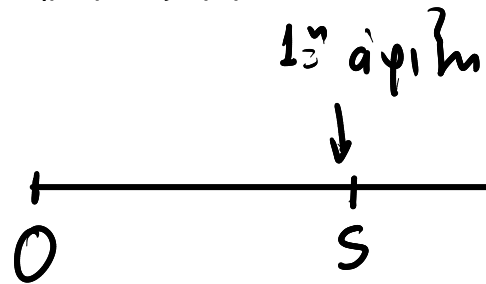
- Αναμενόμενος χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός: $E(X_1) = 1/\lambda$
- Διασπορά χρόνου μέχρι το 1^ο γεγονός: $\text{Var}(X_1) = 1/\lambda^2$ (τυπική απόκλιση $\sigma = 1/\lambda$).

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κατανομή του χρόνου X_i , $i = 2, 3, \dots$, που μεσολαβεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβάντων.



Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

X_2 : χρόνος μεταξύ $1^{\text{ου}}$ και $2^{\text{ου}}$ αφίξης



λ : αφίξεις / μονάδα

$$P(X_2 > t) = P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (s, s+t]\})$$

$$= P(Y_t = 0)$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$$

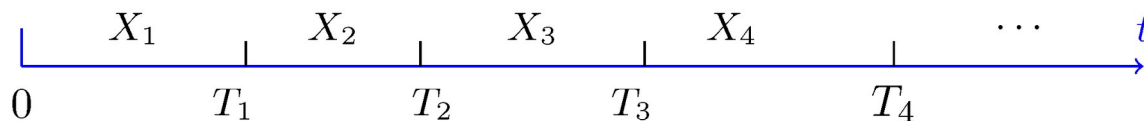
$$\left[\begin{array}{l} \text{αφίξεις στο } (s, s+t] \\ \underline{\underline{\lambda t}} \end{array} \right]$$

$$Y_t : \text{αφίξεις στο } (s, s+t]$$

$$Y_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Έστω ότι το $n-1$ γεγονός έχει συμβεί τη χρονική στιγμή s και X_n το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ του $n-1$ και του n γεγονότος. Αναζητούμε την κατανομή πιθανότητας της X_n .



Ορίζουμε $Y(t) = \{\text{πλήθος γεγονότων στο } (s, s + t]\}$.

Το αναμενόμενο πλήθος συμβάντων στο διάστημα $(s, s + t]$ είναι $\lambda(s + t - s) = \lambda t$ και $Y(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ και

$$\begin{aligned} P(X_n > t) &= P(\{\text{κανένα γεγονός στο διάστημα } (s, s+t]\}) \\ &= P(Y(t) = 0) \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, ότι $P(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ ή $P(X_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_n \leq t) = 0$, $t < 0$).

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. X_n έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , δηλαδή $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Φυσική σημασία της παραμέτρου στην εκθετική κατανομή

Η παράμετρος λ στην εκθετική κατανομή αποκτά φυσική σημασία μόνο μέσα από την κατανομή Poisson που τη συνοδεύει ως η κατανομή που περιγράφει το πλήθος κάποιων γεγονότων στη μονάδα του χρόνου.

Δηλαδή, αν X είναι μία μεταβλητή που εκφράζει χρονικό διάστημα και $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, τότε

- Μπορεί να οριστεί και μία $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ που εκφράζει πλήθος (κάποιων) συμβάντων που συμβαίνουν στη μονάδα του χρόνου.
- Το λ θα είναι το μέσο πλήθος συμβάντων στη μονάδα του χρόνου.

Εύρεση εκθετικής από τη συνοδευτική Poisson

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αν $Y = \{\text{αναμενόμενο πλήθος πελατών σε μία ώρα}\}$ τότε $Y \sim \text{Poisson}(30)$.

Έστω $X = \{\text{χρόνος αναμονής μεταξύ δύο πελατών}\}$. Είναι $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $EX = 1/\lambda$.

Όμως, έρχονται 30 πελάτες / ώρα = 1 πελάτης / 2 λεπτά, άρα ο αναμενόμενος χρόνος μεταξύ των αφίξεων είναι 2 λεπτά.

Συμπεραίνουμε ότι, $EX = 1/\lambda \leftrightarrow 2 = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 2$ και $X \sim \text{Exp}(2)$ και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ερωτήματα που αφορούν το χρόνο αναμονής.

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad P(X > t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Παράδειγμα Poisson - Εκθετική

Παράδειγμα

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min και έστω $Y = \{\text{πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}\}$. Τότε $Y \sim \text{Poisson}(5)$. Να βρεθούν:

- (α) το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1^η άφιξη.
- (β) η πιθανότητα η 1^η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

$$Y \sim \text{Poisson}(5)$$

(α) Αν $X : \{\text{χρονικό διάστημα μέχρι 1^η άφιξη}\}$, τότε $X \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(5)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} \text{ min} = 12 \text{ sec.}$$

$$(β) P(X > 0,5) = 1 - F(0,5) = e^{-0,5 \cdot 5} = e^{-2,5} = 0,082.$$

Παράδειγμα Poisson - Εκθετική

Παράδειγμα

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min και έστω $Y = \{\text{πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}\}$. Τότε $Y \sim \text{Poisson}(5)$. Να βρεθούν:

- (α) το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1^η άφιξη.
- (β) η πιθανότητα η 1^η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $E(X_1) = 1/\lambda = 1/5 \text{ min} = 0,2 \text{ min} = 12 \text{ sec}$.

(β) Γνωρίζουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(5)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0,5) = 1 - P(X_1 \leq 0,5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0,5}) = e^{-2,5} = 0,082 = 8,2\%$$

Η εκθετική κατανομή ως μία κατανομή με “απώλεια μνήμης”

Έστω $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Τότε, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, και

$$\begin{aligned} P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) &= P(X > t + \alpha, X > \alpha) / P(X > \alpha) \\ &= P(X > t + \alpha) / P(X > \alpha) \\ &= (1 - F(t + \alpha)) / (1 - F(\alpha)) \\ &= e^{-\lambda(t + \alpha)} / e^{-\lambda\alpha} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P(X > t). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, ότι η **τυχαία μεταβλητή X , χαρακτηρίζεται από “απώλεια μνήμης”**, δηλαδή πως η κατανομή των τιμών της μετά την τιμή α , είναι ανεξάρτητη του α .

Σημείωση: Η αντίστοιχη διακριτή κατανομή με την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (αποδεικνύεται ότι) είναι η γεωμετρική (το πλήθος των δοκιμασιών που έχουμε ήδη κάνει προσπαθώντας να πετύχουμε μία επιτυχία δεν συσχετίζεται με το πλήθος των δοκιμασιών που θα κάνουμε στο μέλλον, αφού κάθε μία δοκιμή είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας κάθε φορά).

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Η ιδιότητα της απώλειας μνήμης φαίνεται εκ πρώτης όψεως παράδοξη. Δηλαδή, προκύπτει το ερώτημα:

“Αν υπάρχει μία ακολουθία γεγονότων που εξελίσσονται με ρυθμό λ και εγώ αρχίζω να παρατηρώ το σύστημα μία ορισμένη χρονική στιγμή, τότε πως είναι δυνατόν να μην συσχετίζεται ο χρόνος που θα περιμένω μέχρι το επόμενο γεγονός με το χρόνο που ήδη έχει περάσει από το προηγούμενο γεγονός;”

Η απάντηση κρύβεται σε δύο σημαντικές λεπτομέρειες:

- Τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο
- Ο πιθανός χρόνος αναμονής δεν έχει άνω όριο.

Δηλαδή, η “απώλεια μνήμης” της εκθετικής κληρονομείται από την βασική προϋπόθεση της κατανομής Poisson πως τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα με το άλλο (η οποία ανεξαρτησία με τη σειρά της κληρονομήθηκε από την ανεξαρτησία των δοκιμών στη διωνυμική κατανομή)

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Το γεγονός της “απώλειας μνήμης” έχει και μία απλή και ενδιαφέρουσα γεωμετρική αναπαράσταση: Καθώς, κάθε πιθανότητα ερμηνεύεται ως ένα εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και κάθε δεσμευμένη πιθανότητα ως πιθανότητα σε περιορισμένο δειγματοχώρο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη σχέση

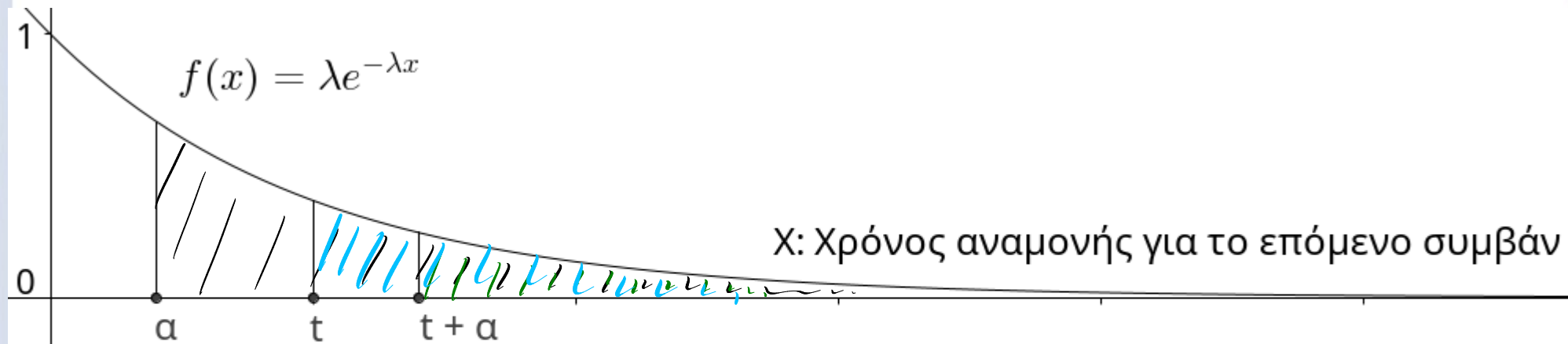
$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$$

ως μία μοναδική αλγεβρική ιδιότητα της συνάρτησης $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ που αντανakλάται σε μία ιδιαίτερη συμμετρία της γραφικής της παράστασης. Αν

- $A = \{\text{εμβαδόν της } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ μεταξύ } x'x, \text{ για } x \in (t + \alpha, +\infty)\}$
- $B = \{\text{εμβαδόν της } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ μεταξύ } x'x, \text{ για } x \in (\alpha, +\infty)\}$
- $\Gamma = \{\text{εμβαδόν της } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ μεταξύ } x'x, \text{ για } x \in (t, +\infty)\},$

τότε $A / B = \Gamma$.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”



$$\underbrace{P(X > t + \alpha | X > \alpha)}_{\text{memoryless}} = \frac{\int_{t+\alpha}^{\infty} f(x) dx}{\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx} = \int_t^{\infty} f(x) dx = \underbrace{P(X > t)}_{\text{memoryless}}$$

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν περάσει 10 λεπτά από την άφιξη του τελευταίου πελάτη. Δεδομένου ότι πρόκειται για ασυνήθιστα μεγάλο χρονικό διάστημα, φαίνεται πιο πιθανό για έναν πελάτη να φτάσει μέσα στο επόμενο λεπτό.

Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει.

Ο χρόνος αναμονής για την άφιξη του επόμενου πελάτη δεν εξαρτάται από τον χρόνο που έχει περάσει από την άφιξη του τελευταίου πελάτη.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος χρόνος ενός τηλεφωνήματος σε ένα καρτοτηλέφωνο είναι 5 min και πως η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Τότε $EX = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 5$ και αν $X = \{\text{διάρκεια ενός τηλεφωνήματος}\}$, θα είναι $X \sim \text{Exp}(1/5)$.

Αν θέλεις να πάρεις τηλέφωνο και βρεις κάποιον εκεί ήδη να τηλεφωνεί, τότε η κατανομή του χρόνου που θα περιμένεις μέχρι να τελειώσει το τηλεφώνημα θα είναι και αυτός $\text{Exp}(1/5)$ **ανεξάρτητα από το χρόνο που έχει ήδη μιλήσει ο προηγούμενος.**

Δηλαδή, η γνώση του χρόνου που έχει ήδη μεσολαβήσει, δεν βοηθάει στην πρόβλεψη του χρόνου που απομένει μέχρι να γίνει το επόμενο συμβάν.

Παράδειγμα “μη απώλειας μνήμης”

Είναι γνωστό ότι μια συγκεκριμένη μάρκα φορητών υπολογιστών διαρκούν περίπου 6 χρόνια, κατά μέσο όρο, πριν σταματήσουν να λειτουργούν. Έτσι, αν γνωρίζουμε ότι ένας συγκεκριμένος φορητός υπολογιστής είναι 5 ετών τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μικρός. Ωστόσο, εάν ένας άλλος φορητός υπολογιστής είναι μόλις 1 έτους, τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μεγάλος.

Σε αυτό το παράδειγμα, γνωρίζοντας το χρονικό διάστημα που έχει περάσει κατά τη διάρκεια ζωής κάθε φορητού υπολογιστή, μας ενημερώνει για πόσο καιρό ο φορητός υπολογιστής θα συνεχίσει να λειτουργεί μέχρι να πεθάνει. Έτσι, αυτή η κατανομή πιθανοτήτων δεν θα έχει μια ιδιότητα χωρίς μνήμη.

Αντίστοιχο είναι και το παράδειγμα της στάσης λεωφορείου όπου είναι βέβαιο ότι θα έρθει μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή το επόμενο λεωφορείο. Στην περίπτωση αυτή, αν βρεθούμε τυχαία στη στάση μία χρονική στιγμή, ο χρόνος αναμονής για την επόμενη άφιξη λεωφορείου θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Η σημαντική αλγεβρική διαφορά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των παραπάνω κατανομών σε σχέση με αυτήν της εκθετικής είναι πως οι παραπάνω είναι διάφορες του μηδενός σε ένα διάστημα πεπερασμένου μήκους, σε αντίθεση με την εκθετική που έχει μη μηδενικές τιμές στο $(0, +\infty)$.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 1/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι θετική. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:
 $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0 \leftrightarrow f(x) > 0$ καθώς η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική.

Θέτοντας $x = y = 0$ παίρνουμε, $f(0) = f(0)^2 \leftrightarrow f(0) = 0$ ή $1 \leftrightarrow \mathbf{f(0) = 1}$ καθώς $f(x) \neq 0$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, γενικότερα προκύπτει ότι:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 2/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση για τον φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζουμε:

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = \underbrace{f(1)}_1^n$$

Τώρα, αν $m \in \mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$, τότε $-m \in \mathbb{N}$, και $f(-m) = f(1)^{-m}$. Επιπλέον:

$$\underbrace{f(m)}_1 \cdot \underbrace{f(-m)}_1 = \underbrace{f(m - m)}_1 = \underbrace{f(0)}_1 = 1, \text{ άρα } f(m) = f(-m)^{-1} = [f(1)^{-m}]^{-1} = f(1)^m,$$

Δηλαδή $f(m) = f(1)^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 3/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Περνώντας από τους ακέραιους στους ρητούς, παρατηρούμε ότι για κάθε ρητό $1/\lambda$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$ είναι:

$$f(1) = f(1/\lambda) + f(1/\lambda) + \dots + f(1/\lambda) \text{ (}\lambda \text{ φορές)} = [f(1/\lambda)]^\lambda \leftrightarrow f(1/\lambda) = f(1)^{1/\lambda},$$

Ενώ αξιοποιώντας την $f(1/\lambda) \cdot f(-1/\lambda) = f(1/\lambda - 1/\lambda) = f(0) = 1$, βρίσκουμε ότι το ίδιο ισχύει για $\lambda \in \mathbb{Z}^-$. Γενικότερα, αν $k/\lambda \in \mathbb{Q}$ με $k \geq 0, \lambda > 0$, τότε

$$f(k/\lambda) = f(1/\lambda + 1/\lambda + \dots + 1/\lambda) \text{ (}\kappa \text{ φορές)} = f(1/\lambda)^k = f(1)^{k/\lambda}.$$

Συμπέρασμα που ανάλογα γενικεύεται για $k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^*$.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 4/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έχοντας αποδείξει ότι $f(p) = f(1)^p$, για κάθε $p \in \mathbb{Q}$, η συνέχεια είναι απλή:

Οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $\rho_n \rightarrow x$. Καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής είναι:

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\rho_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1)^{\rho_n} = f(1)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n} = f(1)^x = e^{cx}, \text{ για } c = \ln(f(1)).$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 5/5

Θεώρημα

Έστω X μία συνεχής θετική πραγματική τυχαία μεταβλητή. Η X ικανοποιεί την συνθήκη “απώλειας μνήμης”

$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t), \quad t > 0, \alpha \in \mathbb{R},$$

αν και μόνο αν ακολουθεί την εκθετική κατανομή, δηλαδή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $P(X \leq x) = 1 - e^{-cx}$ για κάποια πραγματική σταθερά c . Από τη σχέση $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$ και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας παίρνουμε

$$P(X > t + \alpha, X > \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha) \leftrightarrow P(X > t + \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha)$$

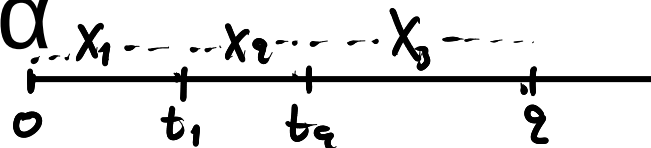
Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση **$f(x) = P(X > x)$** και παρατηρούμε ότι

$$f(x + y) = P(X > x + y) = P(X > x) \cdot P(X > y) = f(x) \cdot f(y).$$

Καθώς, η f είναι συνεχής και μη μηδενική, από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $f(x) = e^{-cx}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα ότι $P(X > x) = e^{-cx}$, από όπου $P(X \leq x) = 1 - e^{-cx}$ ή **$X \sim \text{Exp}(c)$** .

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, F_{X_1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Παράδειγμα



Έστω μία διαδικασία αφίξεων που συμβαίνει με ρυθμό $\lambda = 2$ συμβάντα / λεπτό και έστω $X_1, X_2, \dots$, οι αντίστοιχοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

$$(a) P(X_1 > 0,5) = 1 - F(0,5) = e^{-2 \cdot 0,5} = e^{-1} = 0,368.$$

$$(b) P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 3 - 1) = P(X_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0,018.$$

$$(c) P(\underbrace{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}_{> 4} \mid \underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{= 2}) = P(X_4 > 4 - 2) = P(X_4 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = 0,018.$$

Παράδειγμα

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

Είναι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $\lambda = 2$, άρα $X_1 \sim \text{Exp}(2)$.

Υπολογίζουμε $P(X_1 > 0,5) = e^{-2 \cdot 0,5} = e^{-1} = 0,368 = 36,8\%$.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

Λύση

$$P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 1 + 2 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0,0183 = 1,83\%$$

Παράδειγμα

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Λύση

Αν X_3 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 2η και 3η μέτρηση τότε $X_3 \sim \text{Exp}(2)$.

Αν X_4 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 3η και 4η μέτρηση τότε $X_4 \sim \text{Exp}(2)$.

{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} = $\{X_4 > 4\}$

{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 = 2\}$

$P(\{\text{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό}\} \mid \{\text{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό}\}) =$

$$= P(X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2)$$

$$= P(X_4 > 4 - 2) = P(X_4 > 2)$$

(ανεξαρτησία των γεγονότων)

$$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0,0183 = 1,83\%$$

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Έστω $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, ο χρόνος μέχρι την υλοποίηση του 1^{ου}, 2^{ου}, ..., n – οστού, ... γεγονότος. Αν X_1 : ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^ο γεγονός, και X_n : ο χρόνος που περνάει μεταξύ του $n - 1$ και του n γεγονότος, τότε:

$$T_1 = X_1,$$

$$T_2 = X_1 + X_2$$

$$T_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

.....

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Κάθε

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots,$$

είναι μία συνεχής τ.μ. που προκύπτει ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την $\text{Exp}(\lambda)$. Άρα, $T_n \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ (κατανομή Erlang), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_n(t) = \lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t} / (n-1)!, t > 0.$$

Επιπλέον,

$$E(T_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n/\lambda,$$

$$\text{Var}(T_n) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) = n/\lambda^2 \text{ (} X_i, i = 1, 2, \dots \text{ ανεξάρτητες).}$$

Σημειώσεις

1. Οι τ.μ. $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, δεν είναι ανεξάρτητες. Ιδιαίτερα, ισχύει: $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots$,

2. Ακριβολογώντας είναι $T_n \sim \text{Γάμμα}(n, \lambda)$, καθώς $\text{Γάμμα}(\alpha, \beta) \equiv \text{Erlang}(\alpha, \beta)$, για $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Σύνοψη

- Αν X είναι ο χρόνος μεταξύ της εμφάνισης γεγονότων σε μία Poisson διεργασία, τότε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (εκθετική κατανομή με παράμετρο λ).
- Έστω T_n η χρονική στιγμή κατά την οποία το νιοστό γεγονός συμβαίνει σε μία Poisson διεργασία. Η αναμενόμενη τιμή της T_n είναι $E(T_n) = n/\lambda$ και η διακύμανση αυτής $\text{Var}(T_n) = n/\lambda^2$.

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$: Σύνοψη

- λ : ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν κάποια γεγονότα.
- $X = \{\text{χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων}\}$
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.
- $EX = 1 / \lambda$ (αναμενόμενος χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων)
- $\text{Var}X = 1 / \lambda^2$
- $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t), t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, (ιδιότητα απώλειας μνήμης)
(ο χρόνος που θα περιμένεις δεν εξαρτάται από το πόσο ήδη περιμένεις, συνέπεια της ανεξαρτησίας των γεγονότων και της έλλειψης άνω φράγματος στις τιμές της X)

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

1. Δείξτε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $EX = \theta$, τότε $P(X > x) = e^{-x/\theta}$.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \quad E(X) = \theta \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \theta \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\theta}$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$F(x) = P(X \leq x) \quad . \quad P(X > x) = 1 - F(x).$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

2. Έχει παρατηρηθεί πως οι ταξιδιώτες αγοράζουν τα αεροπορικά τους εισιτήρια πριν το ταξίδι σε ένα πλήθος ημερών X που ακολουθεί εκθετική κατανομή. Το μέσο πλήθος ημερών είναι ίσο με 15 ημέρες.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ένας ταξιδιώτης να αγοράσει ένα εισιτήριο έως και 10 ημέρες πριν από το ταξίδι που θα κάνει.

(β) Ποιο είναι το διάστημα μέσα στο οποίο αγοράζουν εισιτήριο οι μισοί από τους ταξιδιώτες;

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την 1^η άσκηση.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad . \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 15 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{15} \quad .$$

$$X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{15}\right) \quad (a) \quad \underline{P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 10}} \\ = 1 - e^{-2/3} = \underline{0,487}.$$

$$(b) \quad t = ? \quad \text{ώστε} \quad P(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{15}} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-t/15} = 0,5 \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{15} = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = -15 \cdot \ln(0,5) = \underline{10,4 \text{ ημέρες}}$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

3. Κατά μέσο όρο, ένα συγκεκριμένο εξάρτημα υπολογιστή διαρκεί 10 χρόνια. Γνωρίζουμε ότι το χρονικό διάστημα που διαρκεί το εξάρτημα του υπολογιστή κατανέμεται εκθετικά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκεί περισσότερο από 7 χρόνια;

(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκούσαν πέντε εξαρτήματα υπολογιστή εάν χρησιμοποιούνται το ένα μετά το άλλο;

(γ) Ποια είναι η διάρκεια ζωής του 80% των εξαρτημάτων αυτού του τύπου;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκέσει από 9 έως 11 χρόνια;

Υπόδειξη για το (β): Η αναμενόμενη τιμή έχει την αθροιστική ιδιότητα.

$$X = \{\text{χρόνος ζωής}\} \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}, f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}.$$

$$(a) P(X > 7) = 1 - F(7) = e^{-7/10} = 0,497.$$

$$(b) E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = E(X_1) + \dots + E(X_5) = 10 + \dots + 10 = 5 \cdot 10 = 50.$$

$$(γ) P(X > t) = 0,8 \Leftrightarrow e^{-t/10} = 0,8 \Leftrightarrow -\frac{t}{10} = \ln(0,8) \Leftrightarrow t = -10 \cdot \ln(0,8) = 9,23 \text{ χρ.}$$

$$(f) P(9 < X < 11) = F(11) - F(9) = e^{-9/10} - e^{-11/10} = 0,074.$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

4. Κατά μέσο όρο, ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο διαρκεί 18 μήνες εάν χρησιμοποιείται κάθε μέρα.

Γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ενός ζευγαριού κατανέμεται εκθετικά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο να διαρκέσει περισσότερο από 15 μήνες;

(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκέσουν έξι ζευγάρια παπούτσια για τρέξιμο αν χρησιμοποιηθούν το ένα μετά το άλλο;

(γ) Πόσους μήνες αντέχει το 80% των παπουτσιών που χρησιμοποιούνται κάθε μέρα;

$$X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$(a) P(X > 15) = e^{-\frac{15}{18}} = 0,435$$

$$(b) E(X_1 + \dots + X_6) = 6 \cdot E(X) = 6 \cdot 18 = 108 \text{ μήνες}$$

$$(c) P(X > t) = 0,8 \Leftrightarrow e^{-t/18} = 0,8 \Leftrightarrow e^{-t/18} = 0,8 \Leftrightarrow t = -18 \ln(0,8) \rightarrow \approx 4,01.$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

5. Ο αριθμός των χιλιομέτρων που μπορεί να διανύσει ένα συγκεκριμένο αυτοκίνητο πριν τελειώσει η μπαταρία του κατανέμεται εκθετικά με μέσο όρο 50.000 χιλιόμετρα. Ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου πρέπει να κάνει ένα ταξίδι 5.000 χιλιομέτρων. Ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να ολοκληρώσει το ταξίδι χωρίς να χρειαστεί να αντικαταστήσει την μπαταρία του αυτοκινήτου;

$$X : \{\text{χλμ μπαταρίας}\} \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{50.000}\right)$$

$$P(X > 5.000) = e^{-\frac{5.000}{50.000}} = e^{-0,1} = 0,904.$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

6. Σε ένα συγκεκριμένο τμήμα της Εγνατίας οδού, περνούν πέντε αυτοκίνητα ανά λεπτό. Υποθέτουμε ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ των διαδοχικών διελεύσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

(α) Πόσα δευτερόλεπτα περνούν κατά μέσο όρο μεταξύ δύο διαδοχικών αυτοκινήτων;

(β) Αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, πόσο χρόνο θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να περάσουν άλλα επτά αυτοκίνητα;

(γ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, το επόμενο αυτοκίνητο θα περάσει μέσα στα επόμενα 20 δευτερόλεπτα.

(δ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, δεν θα περάσει άλλο για τουλάχιστον άλλα 15 δευτερόλεπτα.

$$(a) X = \{\text{χρόνος μεταξύ 2 διελεύσεων}\} \sim \text{Exp}(5) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{5} \text{ min} = 12 \text{ sec.}$$

$$(b) E(X_1 + X_2 + \dots + X_7) = 7 \cdot E(X) = 7 \cdot \frac{1}{5} = 1,4 \text{ min.}$$

X_1 : χρόνος για το 1ο Ι.Χ. μετά από το περάσει.

$$(c) P(X < \frac{1}{3} \text{ min}) = 1 - e^{-\frac{5}{3}} = 0,811.$$

$$(d) P(X > \frac{15}{60}) = e^{-5 \cdot \frac{15}{60}} = e^{-1,25} = 0,286.$$

Κανονική Κατανομή

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Η κανονική κατανομή (normal distribution) χρησιμοποιείται για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες λαμβάνουν τιμές ύστερα από την επίδραση πολλών ανεξάρτητων και αθροιστικών μεταξύ τους σφαλμάτων.

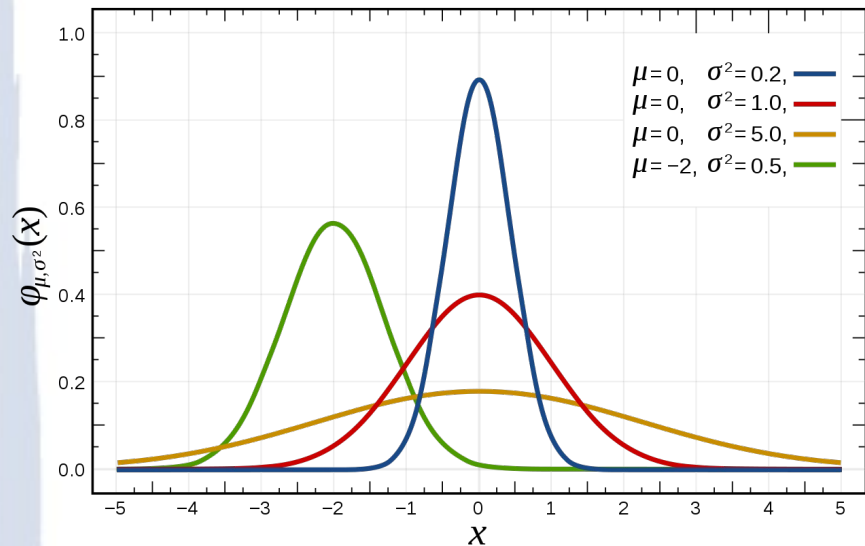
Αν $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0, +\infty)$ τότε $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι η

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Σημειώσεις:

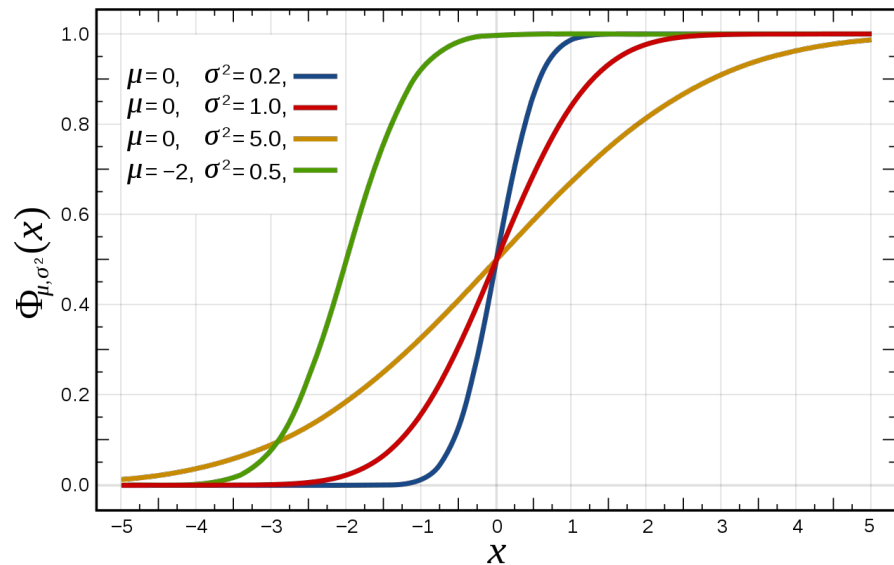
1. Η συνάρτηση κατανομής $F_X(X \leq x)$ δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το ολοκλήρωμα της $f(x)$ από το $-\infty$ έως το x δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθοδο

Κανονική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Κανονική Κατανομή: Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά

$$X \sim N(\mu, \sigma^2): f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Αναμενόμενη τιμή: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

$$\text{Διακύμανση: } \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Τυπική απόκλιση: σ .

$$\text{Συντελεστής ασυμμετρίας: } \gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx = 0. \quad (\text{απολύτως συμμετρική κατανομή γύρω από το } \mu)$$

$$\text{Συντελεστής κυρτότητας: } \alpha = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx = 3.$$

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα

μ $\sigma = s$
 $\downarrow$ $\downarrow$

1. Αν $X \sim N(10, 25) = N(10, 5^2)$, τότε $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$

2. Αν $X \sim N(0, 2) = N(0, (2^{1/2})^2)$, τότε $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

3. Αν $X \sim N(0, 1)$, τότε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Η περίπτωση $N(0, 1)$ είναι ιδιαίτερης σημασίας. Ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή** (standard normal distribution).

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα

1. Αν $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$, τότε $\mu = 2$ και $\sigma = 3$ ή $X \sim N(2, 3^2) = N(2, 9)$.

2. Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$, τότε $\mu = -1$ και $\sigma = 1$ ή $X \sim N(-1, 1^2) = N(-1, 1)$.

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθοδο. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα έχει καθιερωθεί μία διαδικασία σε δύο βήματα:

1^ο βήμα

Η αναγωγή της τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σε μία νέα τ.μ. $Z \sim N(0, 1)$.

2^ο βήμα

Η εύρεση της ζητούμενης πιθανότητας $\Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \leq z)$ από έτοιμους πίνακες της $N(0, 1)$ που έχουν βρεθεί με αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους.

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

1^ο βήμα: Αναγωγή της $N(\mu, \sigma^2)$ στη $N(0, 1)$.

Πρόταση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z είναι φανερό ότι $Z \sim N(0, 1)$.

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$1,68 < \begin{matrix} 1,6 \\ 0,08 \end{matrix}$$

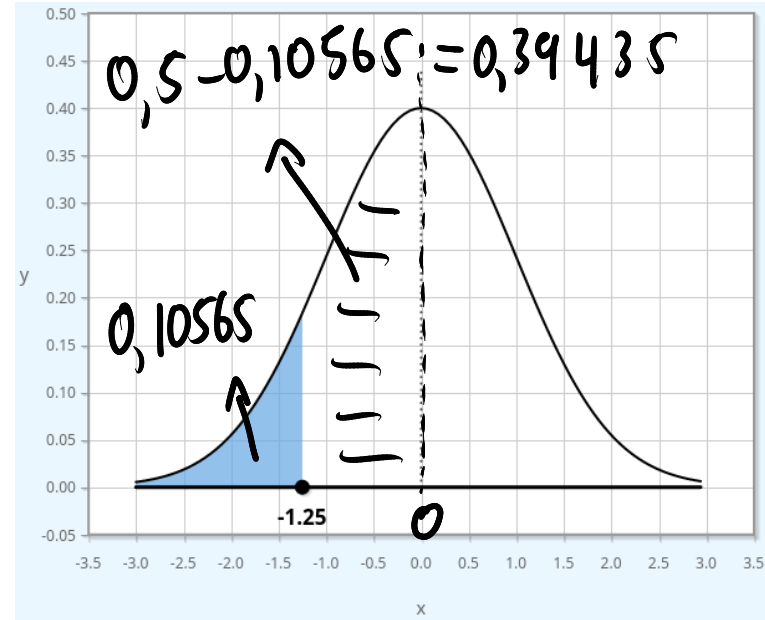
τό έτοιμους πίνακες της $N(0, 1)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



π.χ. Αν $Z \sim N(0, 1)$, να βρεθούν οι

(α) $P(Z < -1,25) = 0,10565$

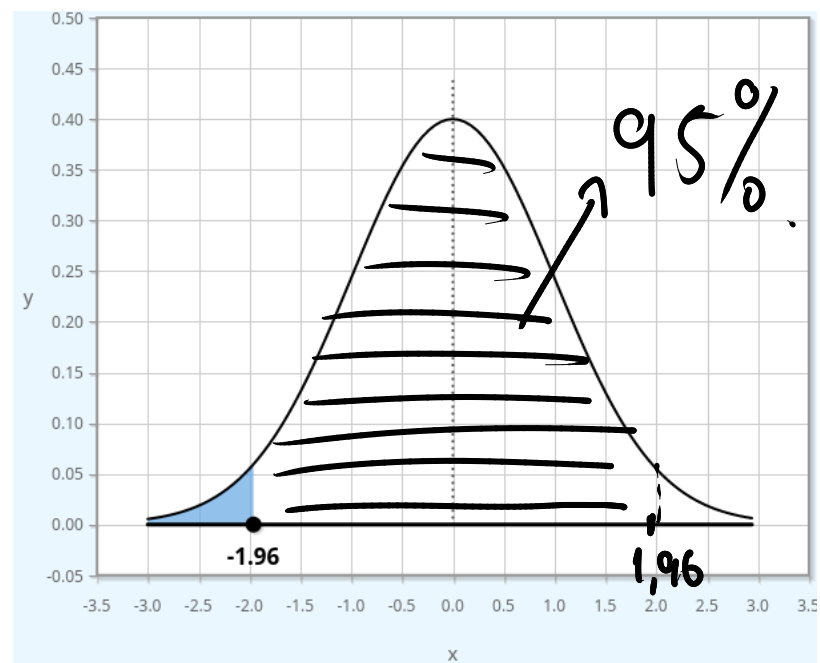
(β) $P(-1,25 < Z < 0) = 0,39435$

(γ) $P(Z > -1,25) = 1 - 0,10565 = 0,89435$

-1,25 < -1,2 γραμμ
0,05 : σφάλμα

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



π.χ. Αν $Z \sim N(0, 1)$, να βρεθεί η $P(Z < -1.96)$

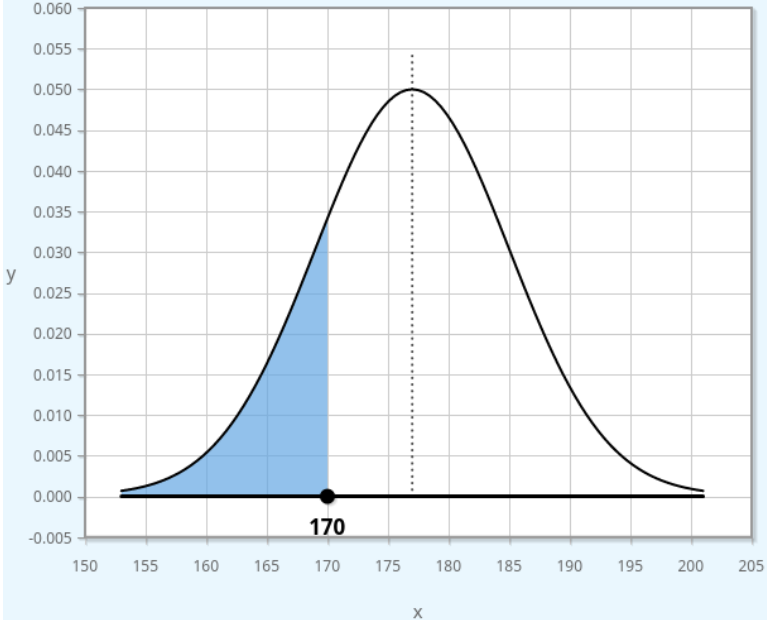
$$P(Z < -1.96) = 0.025.$$

$$-1.96 < -1.9 \text{ γραμμ}$$

$$0.06 : \text{από}$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



$\pi.\chi.$ Αν $X \sim N(177, 8)$, να βρεθεί η $P(X < 170)$

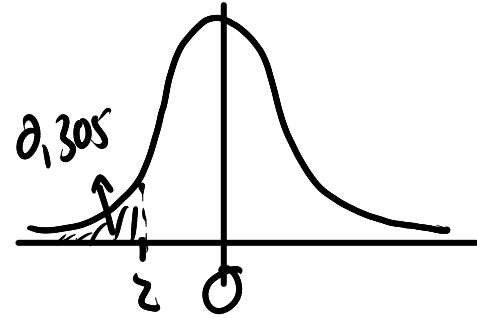
$$\begin{aligned} P(X < 170) &= P\left(\frac{X - 177}{\sqrt{8}} < \frac{170 - 177}{\sqrt{8}}\right) \\ &= P(Z < -2.47) = \Phi(-2.47) \\ &= 0.0676. \end{aligned}$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

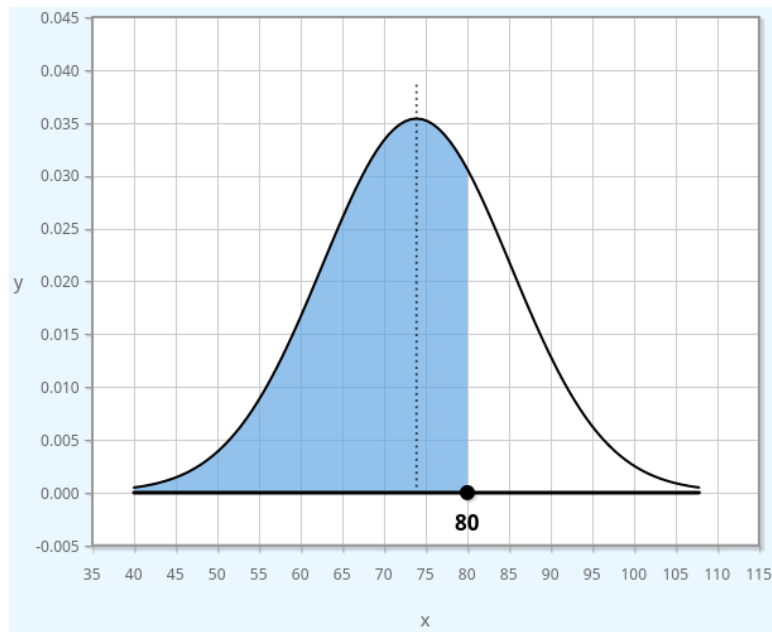
Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

$$P(Z < z) = 0,305$$



Είναι $P(Z < -0,51) = 0,30503$

$$\Rightarrow z \approx -0,51.$$



Το μέσο βάρος των νέων 20 – 29 ετών ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 73,9 kg και τυπική απόκλιση 11,3 kg.

(α) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μικρότερο από 80 κιλά.

(β) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μεγαλύτερο από 80 κιλά.

$$X \sim N(73.9, 11.3^2)$$
$$a) P(X < 80) = P\left(\frac{X - 73.9}{11.3} < \frac{80 - 73.9}{11.3}\right)$$
$$= P(Z < 0.54) = 0.7054 \quad \begin{array}{l} (b) 1 - 0.7054 \\ = 0.2946 \end{array}$$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

(α) $P(Z < z) = 0.9664$

(β) $P(Z > z) = 0,0078$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997