ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εξ αποστάσεως εξεταστική: Ιουνίου-Ιουλίου
Μάθημα: Επιστημονικοί Υπολογισμοί
Διδάσκων: Σ.-Α.Ν. Αλεξανδρόπουλος — Ξάνθη : 01 / 07 / 2021

---

1. (20%) Αξιοποιώντας κατάλληλη αριθμητική μέθοδο γραμμικής άλγεβρας να υπολογίσετε με ακρίβεια 2 δ.ψ.

(α) την απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή και

(β) τη μικρότερη ιδιοτιμή

του τετραγωνικού μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

λαμβάνοντας ως αρχικό διάνυσμα το $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ακολούθως, να επαληθεύσετε τα συμπεράσματά σας αναλυτικά.

---

2. (35%) Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Σωστό (Σ) / Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας:

(α) Αν $|A| \neq 0$ και $|B| \neq 0$ τότε τα μητρώα AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(β) Το διάνυσμα $d^n = \nabla f(x)$ (όπου $\nabla f(x)$ εκφράζει την κλίση (gradient) της συνάρτησης f), αποτελεί κατεύθυνση μείωσης για μια μέθοδο ελαχιστοποίησης της μορφής $x^{n+1} = x^n + \lambda^n d^n$, όπου $n = 0, 1, 2, ...$

(γ) Η μέθοδος ελαχιστοποίησης του **Armijo** δε δύναται να εφαρμοστεί για την εύρεση ριζών μιας συνεχούς παραγωγίσιμης συνάρτησης της μορφης $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(δ) Το πλήθος συναρτησιακών υπολογισμών που απαιτούνται στην αριθμητική μέθοδο του **Newton** για την επίλυση ενός μη-γραμμικού συστήματος $n-$τάξης μετά από δώδεκα επαναλήψεις είναι $144n^2 + 12n$.

(ε) Η εφαρμογή της μεθόδου του **Banach** εκτός από τον υπολογισμό ενός σταθερού σημείου μιας συνάρτησης g, δύναται να εφαρμοστεί και για την εύρεση ριζών μιας συνεχούς συνάρτησης f, εάν μετασχηματίσουμε κατάλληλα την f, στη μορφή $f(x) = x - g(x)$. Ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι μοναδικός.

(στ) Μια αριθμητική **μη-γραμμική** μέθοδος **SOR** για να συγκλίνει στην επιθυμητή λύση ενός συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων θα πρέπει η παράμετρος χαλάρωσης να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(0, 1]$.

(ζ) Το τετραγωνικό μητρώο $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιο.

---

3. (30%) (i) Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

Δεδομένης μιας συνεχώς παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, να βρεθεί ένα $x^* \in \mathbb{R}^n$, για το οποίο ισχύει η σχέση $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ποιά ή ποιές από τις ακόλουθες αριθμητικές μεθόδους θα επιλέγατε για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος:
α)Cauchy β)Armijo γ)Ελαχιστοποίησης Newton δ) Fletcher-Reeves
Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την επιλογή που θα κάνετε.

(ii) Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$f_1(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 8 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 5x_1^2 + (x_2 - 3)^2 - 9 = 0$$

Παίρνοντας ως αρχική προσέγγιση της λύσης τη $x^0 = (2, 0)^\top$, να επιλέξετε ποιά από τις παρακάτω επιλογές ανταποκρίνεται στη δεύτερη προσεγγιστική τιμή $x^2 = (x_1, x_2)^\top$ της λύσης του παραπάνω συστήματος, εάν χρησιμοποιήσετε την αριθμητική μέθοδο του **Newton** και ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.
α) $(1.57, 0.54)^\top$ β) $(1.75, 0.45)^\top$ γ) $(-1.75, 0.11)^\top$ δ) καμία

---

4. (15%) Να βρεθούν κατάλληλα υποδιαστήματα στο καθένα από τα οποία να περιέχεται μία μόνο ιδιοτιμή του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο **Householder** (λαμβάνοντας υπόψιν σας ότι όλες οι ιδιοτιμές του δοθέντος μητρώου βρίσκονται στο διάστημα (-12,13)).

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας και τα συμπεράσματά σας.

ΚΑΛΗ ΔΥΝΑΜΗ