Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Μη γραμμικές μέθοδοι – m-βηματικές μη-γραμμικές μέθοδοι

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

8 Απριλίου 2021

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα I

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής

Κατασκευή

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k}, \ldots, x_n^{k}) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

Κατασκευή

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αν η λύση της παραπάνω σχεσης είναι η $\hat{x}_i$, θέτουμε

$$x_i^{k+1} = \hat{x}_i$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

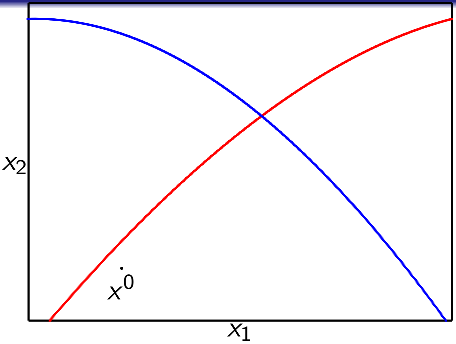
$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

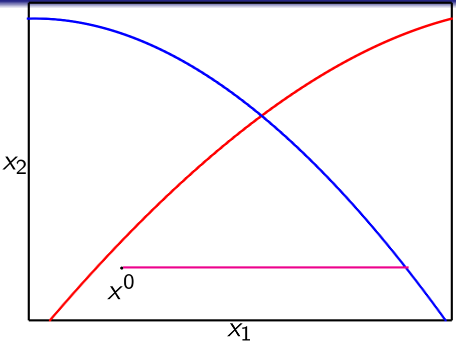
- Η παραπάνω μέθοδος έχει νόημα μόνο όταν οι εξισώσεις f_i έχουν μοναδικές λύσεις στη δοσμένη περιοχή

Γεωμετρική ερμηνεία



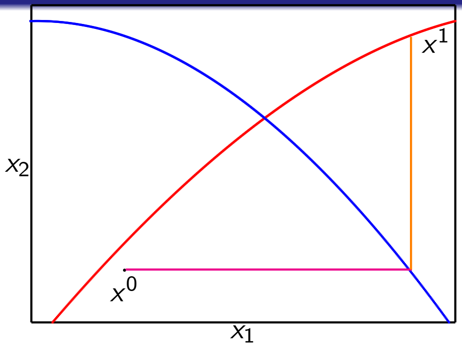
x^0	

Γεωμετρική ερμηνεία



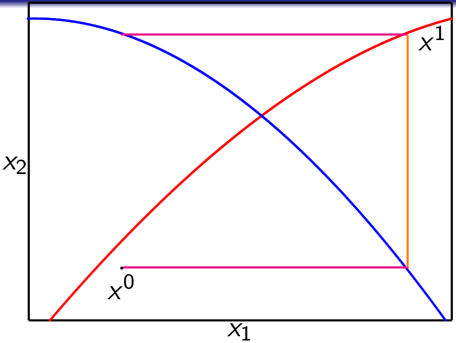
x^0 κρατάμε x_2 σταθερό	

Γεωμετρική ερμηνεία



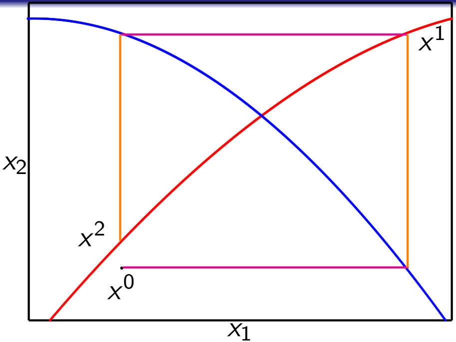
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό		

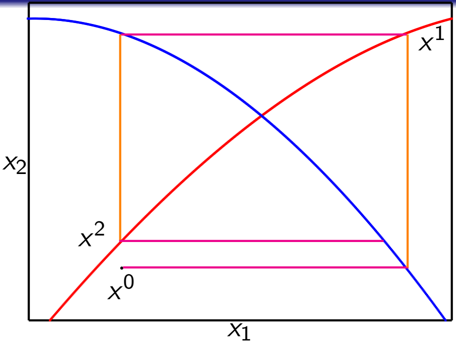
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

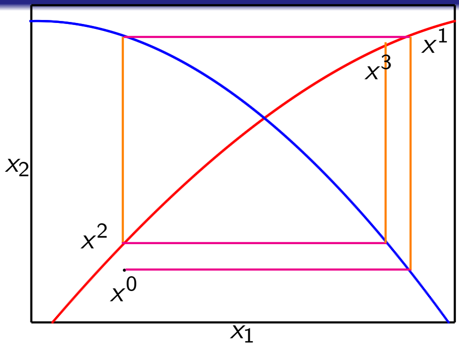
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό		

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

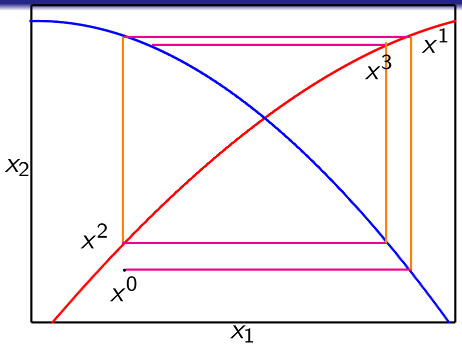
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3

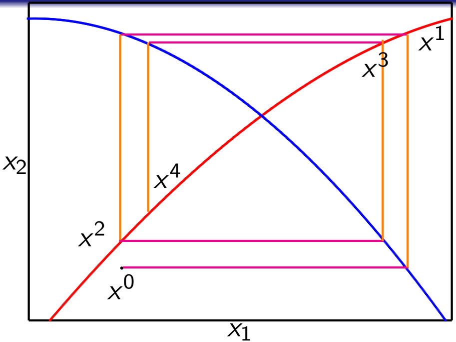
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία



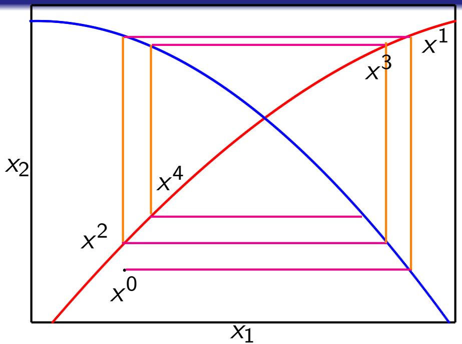
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



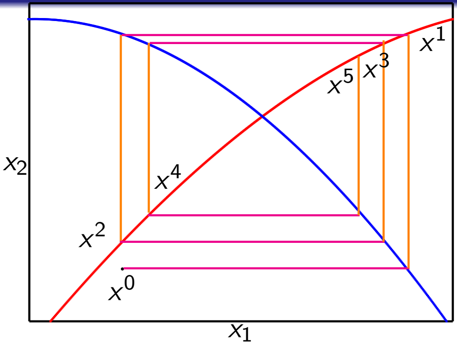
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4
x^4	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4
x^4	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^5

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$
- Σταματάμε όταν πληρείται ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού

Κριτήρια τερματισμού

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$

Προσοχή

Ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης, μπορεί να ισχύει κάποιο κριτήριο τερματισμού και η μέθοδος να αποκλίνει

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός n-διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής

Κατασκευή

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός n-διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός n-διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός n-διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός n-διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές
- Αν η λύση της παραπάνω σχεσης είναι η $\hat{x}_i$, θέτουμε

$$x_i^{k+1} = \hat{x}_i$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Κατασκευή

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

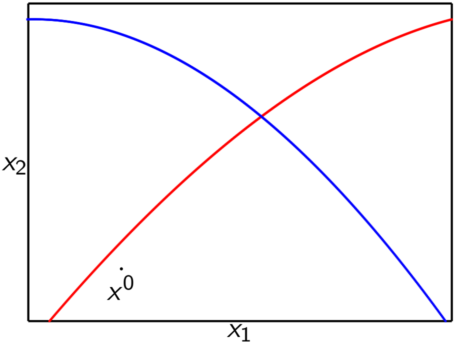
$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

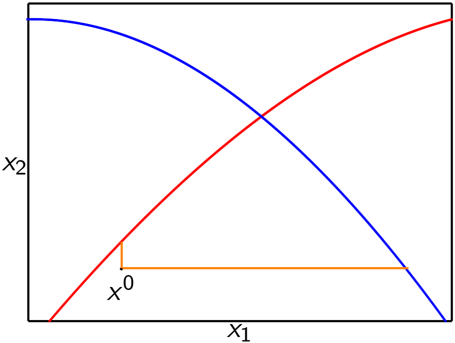
- Η παραπάνω μέθοδος έχει νόημα μόνο όταν οι εξισώσεις f_i έχουν μοναδικές λύσεις στη δοσμένη περιοχή

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0		

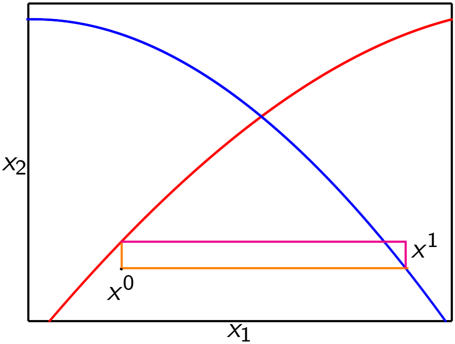
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

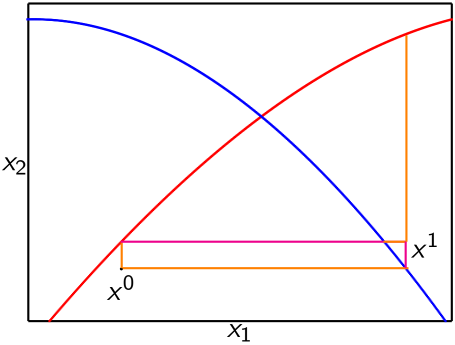
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1

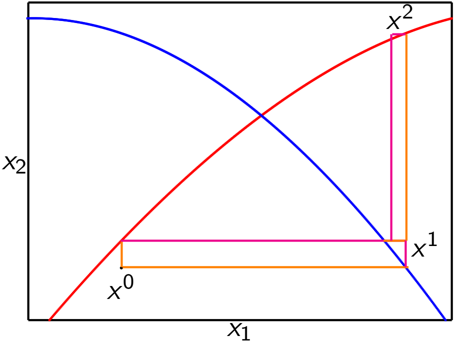
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

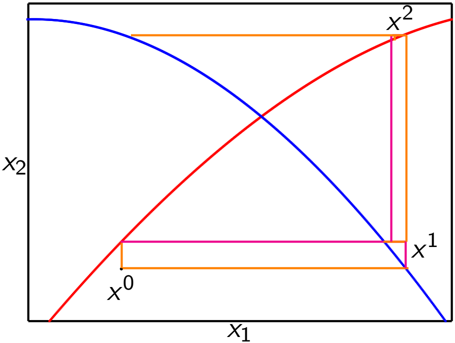
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

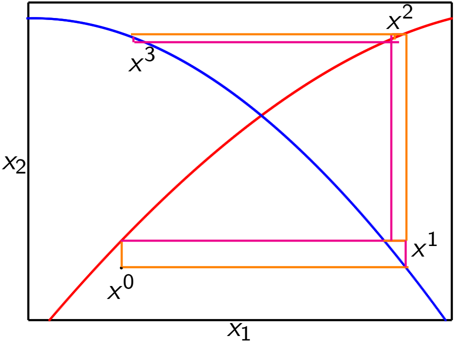
Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2
x^2	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2
x^2	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^3

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$
- Σταματάμε όταν πληρείται ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού

Κριτήρια τερματισμού

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Σύγκλιση της μεθόδου

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Κριτήρια τερματισμού

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$

Προσοχή

Ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης, μπορεί να ισχύει κάποιο κριτήριο τερματισμού και η μέθοδος να αποκλίνει

Συγκριση μεθόδων

Και οι δυο μέθοδοι εφαρμόζονται για την επίλυση ενός συστήματος της μορφής $F_n(x) = \mathcal{O}_n$.

Το υπολογιστικό κόστος και των δύο συσχετίζεται με την επίλυση n μη-γραμμικών εξισώσεων μίας μεταβλητής σε κάθε επανάληψη.

Όσον αφορά τη μη-γραμμική SOR, είναι ξεκάθαρο ότι οι εξισώσεις δε μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0 \tag{1}$$

η i-οστή εξίσωση ($i = 2, 3, \ldots$) απαιτεί στην ίδια επανάληψη k τη λύση της $i - 1$ εξίσωσης.

Όσον αφορά τη μη-γραμμική Jacobi, είναι ξεκάθαρο ότι οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη στην ίδια επανάληψη

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0 \tag{2}$$

όπου η επίλυση της i-οστής εξίσωσης ($i = 1, 2, \ldots$) δεν απαιτεί την επίλυση κάποιας άλλης εξίσωσης.

Συγκριση μεθόδων

Κατά συνέπεια, το υπολογιστικό κόστος της μη-γραμμικής Jacobi κατανέμεται καλύτερα σε σχέση με αυτό της μη-γραμμικής SOR.

Η κατανομή αυτή έγκειται στην αξιοποίηση διαφορετικών υπολογιστικών μηχανών.

Οπότε, όταν έχουμε στη διάθεσή μας παράλληλα ή κατανεμμημένα υπολογιστικά συστήματα, που επιτρέπουν την παράλληλη εκτέλεση προγραμμάτων σε διαφορετικούς επεξεργαστές, η μη-γραμμική Jacobi υπερέχει της μη-γραμμικής SOR.

Περιγραφή και ανάπτυξη μεθόδων

Τόσο η μη-γραμμική SOR όσο και η μη-γραμμική Jacobi αξιοποιούν κάποια άλλη αριθμητική μέθοδο για την επίλυση των εν γένει μη-γραμμικών εξισώσεων μίας μεταβλητής.

Οι μέθοδοι θα λέμε ότι είναι ακριβείς, εάν το σφάλμα για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής λύσης $\hat{x}$ είναι μηδέν.

Ανάλογα με τη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε για τις (1) και (2), το όνομα της μη-γραμμικής Jacobi και μη-γραμμικής SOR προσαρμόζεται κατάλληλα.

Εάν για την αριθμητική επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων μίας μεταβλητής αξιοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο των Newton-Raphson, τότε οι μέθοδοι καλούνται αντίστοιχα ως μη-γραμμική Jacobi-Newton και μη-γραμμική SOR-Newton.

Αν ο αριθμός των επαναλήψεων που θα εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο επίλυσης μη-γραμμικών εξισώσεων μία μεταβλητής είναι m, τότε οι μέθοδοι καλούνται m- βηματική (μη-γραμμική) Jacobi-Newton και m-βηματική (μη-γραμμική) SOR-Newton αντίστοιχα. Αν $m = 1$, τότε οι παραπάνω μέθοδοι καλούνται μονοβηματικές.

Μονοβηματικές SOR-Newton και Jacobi-Newton

Για την κατανόηση της παραπάνω διαδικασίας θα κατασκευάσουμε τη μονοβηματική (μη-γραμμική) SOR-Newton.

Για την κατασκευή αυτής της μεθόδου αξιοποιούμε τη γνωστή μέθοδο των Newton-Raphson για την επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων μίας μεταβλητής.

Εφόσον η μέθοδος είναι μονοβηματική αξιοποιούμε τη μέθοδο Newton-Raphson μόνο για ένα βήμα (επανάληψη).

Υπενθυμίζουμε ότι το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου Newton-Raphson είναι το εξής

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \tag{3}$$

Η μέθοδος που περιγράφεται από τη σχέση (3) εφαρμόζεται για την προσέγγιση της λύσης x της εξίσωσης

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) = 0$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Μονοβηματικές SOR-Newton και Jacobi-Newton

Με την εφαρμογή της (3) προσεγγίζουμε τη λύση $\hat{x}_i$ με εφαρμογή ενός βήματος της Newton-Raphson.

Ακολούθως, αντικαθιστούμε την $\hat{x}_i$ στη σχέση

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k) \tag{4}$$

με την εφαρμογή της (3) στην αντίστοιχη εξίσωση μίας μεταβλητής της μεθόδου μη-γραμμικής SOR, η αρχική εκτίμηση της λύσης θεωρούμε πως είναι η x_i^k.

Ως εκ τούτου, η αντίστοιχη συναρτησιακή τιμή της σχέσης (3) θα είναι η

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) = 0$$

Καθώς οι συνιστώσες της προσεγγιστικής τιμής της λύσης είναι σταθερές, λαμβάνοντας αντίστοιχα τις τιμές $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k$ η συναρτησιακή τιμή της παραγώγου στη σχέση (3) διαμορφώνεται ως εξής

$$\partial_i f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Μονοβηματικές SOR-Newton και Jacobi-Newton

Εφόσον η εφαρμογή της Newton-Raphson γίνεται μόνο για μία επανάληψη, η προσέγγιση της $k+1$ επανάληψης της σχέσης (3) διαμορφώνεται ως εξής

$$\hat{x}_i = x_i^k - \frac{f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)}{\partial_i f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$\hat{x}_i - x_i^k = -\frac{f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)}{\partial_i f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)}$$

Τελικά, με αντικατάσταση της παραπάνω διαφοράς στη σχέση (4) παίρνουμε τη ζητούμενη μονοβηματική (μη-γραμμική) SOR-Newton

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \omega_k \frac{f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)}{\partial_i f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)} \tag{5}$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Μονοβηματικές SOR-Newton και Jacobi-Newton

Κατ΄ αντιστοιχία με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να λάβουμε τη μονοβηματική (μη-γραμμική) Jacobi-Newton, της οποίας το επαναληπτικό σχήμα περιγράφεται από την ακόλουθη επαναληπτική σχέση

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \omega_k \frac{f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)}{\partial_i f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)} \quad (6)$$

η οποία ισοδύναμα, μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \omega_k \frac{f_i(x^k)}{\partial_i f_i(x^k)} \quad (7)$$

Θεώρημα σύγκλισης

Θεώρημα

Θεωρούμε τη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ σε ένα ανοικτό σύνολο $S_0 \subset \mathcal{A}_n$ της πραγματικής τιμής της λύσης x^*, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $F_n(x^*) = \mathcal{O}_n$. Αν το Ιακωβιανό μητρώο της συνάρτησης J_{F_n} είναι $\mathcal{M}$-μητρώο στη λύση x^*, τότε οι ακολουθίες των σημείων που παράγονται από την οικογένεια μη-γραμμικών SOR μεθόδων συγκλίνουν στην πραγματική τιμή της λύσης αρκεί η παράμετρος χαλάρωσης $\omega_k \in (0, 1]$.

Ορισμός

Το μητρώο J καλείται $\mathcal{M}$-μητρώο όταν είναι αντιστρέψιμο και για το μητρώο J^{-1} ισχύει $J^{-1} \geq 0$ και ακόμα, $j_{kl} \leq 0$, για κάθε $k, l = 1, 2, 3, \ldots, n$ για $k \neq l$.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

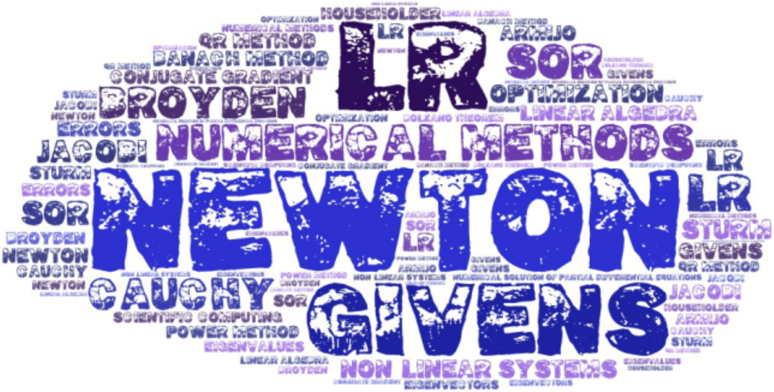
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ