Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Αριθμητική Επίλυση εξισώσεων

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

9 Μαρτίου 2021

Περιεχόμενα I

1 Εισαγωγή
- Γενικά
- Το πρόβλημα
- Αριθμητική μέθοδος

2 Εντοπισμός των λύσεων
- Γενικά
- Γραφικά
- Αναλυτικά

3 Αριθμητικές μέθοδοι

4 Μέθοδος της διχοτόμισης

5 Γεωμετρική ερμηνεία

6 Σύγκλιση

7 Αλγόριθμος

8 Κριτήρια τερματισμού

9 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα II

10 Τροποποιημένη μέθοδος διχοτόμησης
11 Παράδειγμα
12 Γενική επαναληπτική μέθοδος
13 Ανάπτυξη της μεθόδου
14 Υπολογισμός
15 Σύγκλιση
16 Αλγόριθμος
17 Ασκήσεις
18 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα
19 Σύνοψη - Συμπεράσματα
20 Βιβλιογραφία

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Ιστορική αναδρομή

Διαχρονικά, το πρόβλημα επίλυσης εξισώσεων μίας μεταβλητής είναι ένα δύσκολο πρόβλημα.

Αυτό, οφείλεται στο γεγονός ότι για οποιαδήποτε εξίσωση μίας μεταβλητής δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να μας παρέχει τις λύσεις της.

Ο αριθμός τέτοιων εξισώσεων για τον οποίο υπάρχει κλειστή μαθηματική έκφραση για τον προσδιορισμό των λύσεων είναι περιορισμένος, π.χ. εξίσωση δευτέρου βαθμού

Τελικά, επειδή η εύρεση ενός τέτοιου τύπου είναι επίπονη διαδικασία ή/και αδύνατη, προσφεύγουμε σε λύσεις που δίνονται από αριθμητικές μεθόδους, δηλαδή αλγορίθμους, που μας δίνουν προσεγγιστικές λύσεις.

Ορισμοί

Ορισμός

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αναζητούμε ένα σημείο $x^* \in (a, b)$, για το οποίο ισχύει $f(x^*) = 0$.

Ορισμός

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αναζητούμε όλα εκείνα τα σημεία $x^* \in (a, b)$, για τα οποία ισχύει $f(x^*) = 0$.

Ορισμός

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, αναζητούμε ένα σημείο $x^* \in \mathbb{C}$, για το οποίο ισχύει $f(x^*) = 0$.

Στις παραπάνω περιπτώσεις το x^* καλείται λύση της εξίσωσης ή ρίζα της συνάρτησης ή μηδενικό της συνάρτησης..

Επισήμανση

Αριθμητική μέθοδος

Για την αριθμητική επίλυση εξισώσεων, είτε αλγεβρικών είτε υπερβατικών, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι (αλγόριθμοι), οι οποίες μέσω αριθμητικών τιμών προσεγίζουν τη λύση της εξίσωσης. Οι αριθμητικές τιμές που παρέχει μια αριθμητική μέθοδος παρέχονται ως όριο συγκλινουσών ακολουθιών, όπου οι διαδοχικοί όροι θεωρούνται ως διαδοχικές προσεγιστικές τιμές των λύσεων που αναζητούμε.

Προεργασία

Πρωτού, εφαρμόσουμε κάποιον αλγόριθμο για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε το πρόβλημα, δηλαδή την παρεχόμενη εξίσωση.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αποκτήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες για το είδος αλλά και το πλήθος των λύσεων.

Ακόμα, είναι άκρως βοηθητικό να μπορέσουμε να εντοπίσουμε περιοχές στις οποίες εντοπίζονται οι λύσεις πριν την εκκίνηση της αριθμητικής μεθόδου.

Επιπλέον, μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο, εάν μπορούσαμε να «εγκλοβίσουμε» τις λύσεις σε διαστήματα, εντός των οποίων η λύση είναι μοναδική.

Γραφικοί τρόποι εντοπισμού

Φτιάχνοντας το γράφημα της δοθείσης συνάρτησης, μπορούμε να αποκτήσουμε γρήγορα και εύκολα χρήσιμη πληροφορία για το πλήθος των λύσεων.

Συγκεκριμένα, οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης βρίσκονται στις τομές του σχετικού γραφήματος με των άξονα των τετμημένων.

Ακόμα, μέσω αυτού του τρόπου μπορούμε να προσδιορίσουμε και το είδος των λύσεων (απλές ρίζες ή ρίζες με πολλαπλότητα).

Επί της ουσίας, μπορεί να μη γνωρίζουμε ποιες είναι οι λύσεις, αλλά με αυτό τον τρόπο δύναται να τις εντοπίσουμε ή/και να τις «εγκλοβίσουμε» σε κατάλληλα διαστήματα.

Γεωμετρική προσέγγιση

- Σχεδιάζοντας το γράφημα μιας συνάρτησης μπορούμε να αντλήσουμε εύκολα και γρήγορα χρήσιμη πληροφορία (π.χ. ύπαρξη ρίζας, μονοτονία, ακρότατα κ.λπ.).
- Τυπικά κάνω μελέτη συνάρτησης, ελέγχοντας συνέχεια, πρώτη, δεύτερη παράγωγο κ.ο.κ.
- Διαφορετικά μπορώ να εφαρμόσω τη διαδικασία διάσπασης σε απλούστερες συναρτήσεις και ακολούθως, τη γραφική απεικόνιση.

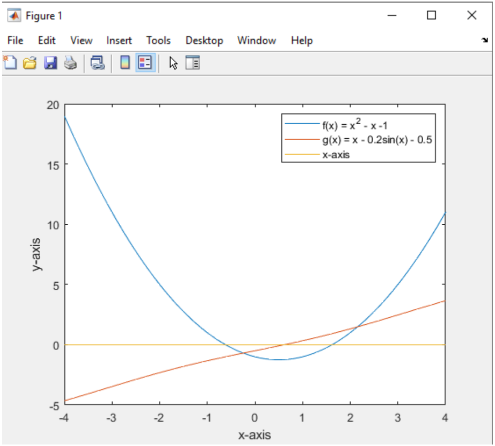
Παράδειγμα

Να εντοπίσετε μια ρίζα σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^2 - x - 1$

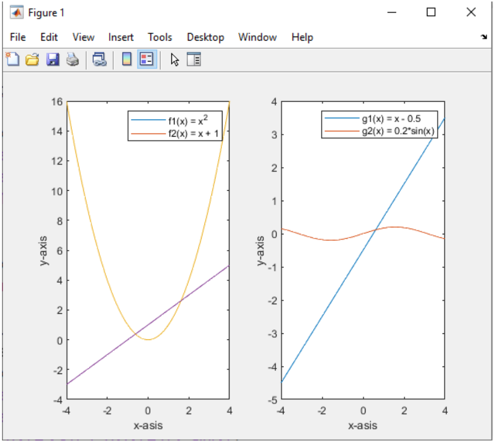
(β) $g(x) = x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}$

Παράδειγμα



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση

Παράδειγμα



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση (διάσπαση)

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πολλαπλότητα

Ορισμός

Θα καλούμε ρίζα πολλαπλότητα p μια λύση ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$, αν για $x \neq \rho$ η συνάρτηση μπορεί να πάρει τη μορφή $f(x) = (x - \rho)^p q(x)$, έτσι ώστε $\lim_{x \to \rho} q(x) \neq 0$.

Ορισμός

Αν $f \in C^1[a, b]$, τότε η συνάρτηση f έχει μια απλή ρίζα ή ρίζα πολλαπλότητας ένα στο $\rho \in (a, b)$, εάν και μόνο εάν ισχύει $f(\rho) = 0$ και $f'(\rho) \neq 0$.

Ορισμός

Έστω $f \in C^m[a, b]$, τότε η συνάρτηση f έχει μια ρίζα πολλαπλότητας m στο $\rho \in (a, b)$, εάν και μόνο εάν ισχύει:
$f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = f^{(3)}(\rho) = \ldots = f^{(m-1)}(\rho) = 0$ και $f^{(m)}(\rho) \neq 0$.

Γνωστά θεωρήματα

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα της μορφής $[a, b]$ και επιπλέον ισχύει:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Τότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (a, b)$, για το οποίο ισχύει $f(\rho) = 0$.

(Κριτήριο ύπαρξης λύσεων του Bolzano)

Γνωστά θεωρήματα

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα της μορφής $[a, b]$ και επιπλέον ισχύει:

$$f(a) \neq f(b)$$

Τότε, για οποιονδήποτε $\rho \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\rho \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \rho$.

(Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)

Παράδειγμα

Παράδειγμα

Δίνεται η υπερβατική συνάρτηση $\phi(x) = x^2 + \cos \pi x - 3$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει $x^* \in (0, 2)$ το οποίο αποτελεί λυση της $\phi(x) = 0$.

Λυση: Η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων x^2, $\cos \pi x$ και του σταθερού όρου -3. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης στο σύνορο:

$$\phi(0) = 0^2 + \cos(\pi \cdot 0) - 3 = -2$$
$$\phi(2) = 2^2 + \cos(2 \cdot \pi) - 3 = 2$$

Όπως παρατηρούμε από τις συναρτησιακές τιμές, ισχύει:

$$\phi(0) < 0 < \phi(2)$$

Άρα, για $\rho = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ για το οποίο ισχύει $\phi(\xi) = 0$. Επομένως, η υπερβατική συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 2)$.

Αριθμητικές μέθοδοι

- Μέθοδος διχοτόμησης
- Γενική επαναληπτική μέθοδος
- Μέθοδος Newton-Raphson
- Μέθοδος τέμνουσας

Λίγα λόγια για τη μέθοδο

Μια από τις σπουδαιότερες και γνωστότερες μεθόδους αριθμητικής προσέγγισης λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$.

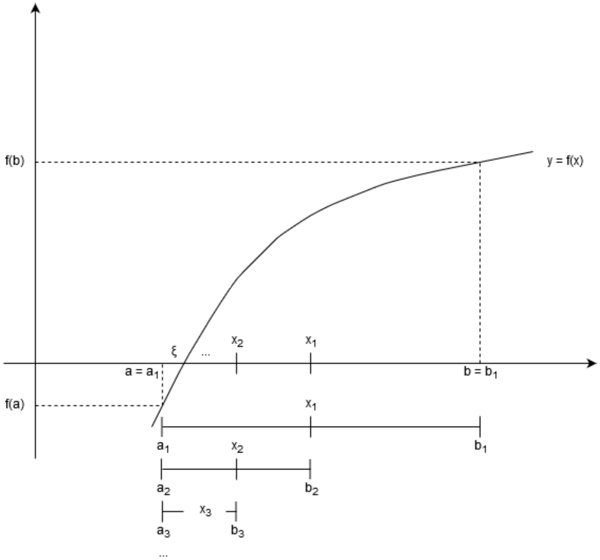
Αρκεί, η συνάρτηση f να είναι συνεχής σε ένα διάστημα της μορφής $[a, b]$ και επιπλέον, οι συναρτησιακές τιμές στα άκρα του διαστήματος να είναι ετερόσημες.

Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι γνωστή και ως μέθοδος του υποδιπλασιασμού διαστήματος ή και μέθοδος του Bolzano.

Παρότι συγκλίνει αργά, επί γενικών συναρτήσεων, επιτυγχάνει πάντα στο να βρίσκει μια λύση της συνάρτησης f, σε ένα δεδομένο διάστημα που εντοπίζεται μια ρίζα.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Περιγραφή



Ερμηνεία

Δίνεται η παραπάνω συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, για την οποία οι συναρτησιακές τιμές στα άκρα είναι ετερόσημες.

Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης λύσεων του Bolzano, η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, b).

Ακολούθως, η μέθοδος υποδιπλασιάζει επαναληπτικά το αρχικό διάστημα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Bolzano, ώστε να εντοπίζει μικρότερα διαστήματα στα οποία ανήκει η ρίζα ξ.

Έστω $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, με $f(a)f(b) < 0$. Τότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τ.ω. $f(\xi) = 0$.

Στόχος μας είναι μέσω της μεθόδου της διχοτόμησης να βρούμε μια προσέγγιση x^* της ακριβούς λύσης ξ.

Ερμηνεία

Ξεκινάμε από το αρχικό διάστημα $[a, b]$, στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ της συνάρτησης f, καθώς πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Έστω ότι καλούμε αυτό το διάστημα $\Delta_1 = [a_1, b_1]$.

Ακολούθως, παίρνουμε το μέσο του διαστήματος Δ_1, έστω x_1, το οποίο ισούται $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ και αποτελεί την αρχική προσέγγιστη της μεθόδου.

Ελέγχουμε, εάν το μέσο x_1, αποτελεί ρίζα της συνάρτησης, δηλαδή εάν ισχύει $f(x_1) = 0$. Αν ισχύει, τότε θα έχουμε βρει τη ρίζα της συνάρτησης και επομένως, $\xi = x_1$.

Διαφορετικά, για τη συναρτησιακή τιμή $f(x_1)$ θα ισχύει $f(x_1) > 0$ ή $f(x_1) < 0$.

Οπότε, με τη βοήθεια των σημείων a_1, b_1 και x_1, δύναται να εντοπίσουμε το υποδιάστημα του αρχικού διαστήματος $[a_1, b_1]$, στο οποίο ανήκει η λύση.

Ερμηνεία

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το επόμενο υποδιάστημα θα δημιουργηθεί ως εξής: (i) Αν $f(a_1)f(x_1) < 0$, τότε $a_2 = a_1$ και $b_2 = x_1$, διαφορετικά (ii) Αν $f(x_1)f(b_1) < 0$, τότε $a_2 = x_1$ και $b_2 = b_1$.

Οπότε, παίρνουμε το νέο διάστημα $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ.

Η νέα προσέγγιση που μας παρέχει η μέθοδος θα είναι σε αυτή την επανάληψη το μέσο του διαστήματος Δ_2, δηλαδή $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Η διαδικασία συνεχίζεται ομοιοτρόπως επαναληπτικά, ώστε να προκύπτουν μικρότερα διαστήματα $\Delta_3, \Delta_4, \ldots$ και αντίστοιχες προσεγγίσεις $x_3, x_4, \ldots$ έως ότου συγκλίνουμε στη ρίζα ξ με μια δεδομένη ακρίβεια.

Γενικά

- Είναι σημαντικό για μια επαναληπτική μέθοδο, οι προσεγγίσεις που δίνει σε κάθε επανάληψη να είναι καλύτερες όσο το πλήθος των επαναλήψεων αυξάνεται.
- Διαφορετικά, όπως λέμε να βελτιώνονται οι προσεγγιστικές τιμές σε κάθε επανάληψη, έστω και με αργό ρυθμό.
- Ένα χαρακτηριστικό που πρέπει να εξετάζουμε σε κάθε αριθμητική μέθοδο, είναι εάν η ακολουθία των προσεγγιστικών σημείων που παράγει το επαναληπτικό σχήμα συγκλίνει στη ρίζα με μια δεδομένη ακρίβεια.
- Η μέθοδος της διχοτόμησης έχει το πλεονέκτημα ότι συγκλίνει πάντα (δοθέντος ότι έχει εντοπιστεί ένα διάστημα που πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano), αλλά με αργό ρυθμό.

Σύγκλιση της μεθόδου

Το μήκος του διαστήματος Δ_2 είναι το μισό από το μήκος του διαστήματος Δ_1. Αυτό συμβαίνει διότι $\Delta_2 = b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b - a}{2} = \Delta_1/2$.

Αντιτοίχως, το μήκος του διαστήματος:

$$\Delta_3 = b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Επαγωγικά, παίρνουμε $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b - a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Ακόμα, η προσέγγιση που μας επιστρέφει η αριθμητική μέθοδος σε κάθε επανάληψη, ισούται με το μέσο του εκάστοτε διαστήματος, οπότε:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Σύγκλιση

Επαγωγικά θα έχουμε:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < x_n < b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Επιπλέον, αφού η ρίζα εντοπίζεται σε κάθε υποδιάστημα, ισχύει ότι:

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Συμπερασματικά, τα αριστερά άκρα a_n σχηματίζουν μια αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ και τα δεξιά άκρα b_n σχηματίζουν μια φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ένα x^* μεταξύ των άκρων a_n και b_n, το οποίο αποτελεί κοινό όριο των παραπάνω ακολουθιών.

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x^*.$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Σύγκλιση

Όμως η συνάρτηση είναι συνεχής και πληροί της συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Άρα:

$$\lim_{n\to\infty}[f(a_n)f(b_n)] = f^2(x^*) \leq 0$$

Οπότε, θα ισχύει $f(x^*) = 0$ και θεωρούμε $x^* = \xi$.

Ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων

Θεωρούμε το απόλυτο ασφάλμα στην n επανάληψη της μεθόδου:

$$|x_n - \xi| = \left| \frac{a_n + b_n}{2} - \xi \right|$$

με x_n την προσέγγιση της ρίζας στην n−οστή επανάληψη και ξ τη ρίζα της συνάρτησης.

Όμως, επειδή η ρίζα βρίσκεται εντός του διαστήματος, θα απέχει από το μέσο απόσταση μικρότερη του μισού του μήκους του διαστήματος. Επομένως:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

Όπως έχουμε ορίσει το πρόβλημα, βρίσκουμε μια προσέγγιση της ρίζες ξ σύμφωνα με μια δεδομένη ακρίβεια, έστω $\varepsilon > 0$.

Ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων

Άρα:

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των επαναλήψεων n που απαιτούνται, γράφουμε την τελευταία σχέση ως εξής:

$$2^n \geq (b-a)\varepsilon^{-1}$$

Αν λογαριθμίσουμε την παραπάνω σχέση, έχουμε:

$$n \geq \log[(b-a)\varepsilon^{-1}]/\log 2$$

Ή διαφορετικά

$$n \geq \log_2[(b-a)\varepsilon^{-1}].$$

Ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων

Τελικά:

$$n = \lceil \log_2[(b-a)\varepsilon^{-1}] \rceil^1$$

[1] Συμβολίζουμε ως $\lceil \cdot \rceil$ το μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος από τον πραγματικό ·

Αλγόριθμος υλοποίησης

1. Δίνουμε στον αλγόριθμο τους πόρους που χρειάζεται για να εκκινήσει η διαδικασία: Είσοδος $= \{f, a, b, \varepsilon\}$
2. Θέτουμε $i = 0$, $n = \lceil \log_2[(b-a)\varepsilon^{-1}] \rceil$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ και ακολούθως στο βήμα 3.
3. Κάνε το i ίσο με $i+1$ και πήγαινε στο βήμα 4.
4. Αν $i > n$ ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο, αλλιώς θέτουμε $x_i = (a_i + b_i)/2$ και πήγαινε στο βήμα 5.
5. Ελέγχουμε αν $f(x_i) = 0$. Αν ισχύει, ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 9, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 6.
6. Ελέγχουμε το κριτήριο του Bolzano: Αν $f(a_i)f(x_i) < 0$ πήγαινε στο βήμα 7, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 8.
7. Θέτουμε $a_{i+1} = a_i$ και $b_{i+1} = x_i$ και πήγαινε στο βήμα 3.
8. Θέτουμε $a_{i+1} = x_i$ και $b_{i+1} = b_k$ και πήγαινε στο βήμα 3.
9. Δώσε την έξοδο του αλγορίθμου: Έξοδος $= \{i, x_i, f(x_i)\}$

Κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου

- Τυπικά δε θα ελέγχουμε εάν $f(x_i) = 0$, όπου x_i το μέσο του διαστήματος.
- Αντί αυτού του ελέγχου, εφόσον ζητείται συγκεκριμένη ακρίβεια ε, μπορούμε να ελέγχουμε ένα από τα ακόλουθα κριτήρια:
  1. $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$
  2. $|f(x_i)| < \varepsilon$
  3. $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon$

Προσοχή

Από τα παραπάνω κριτήρια το τρίτο, του απόλύτου σχετικού σφάλματος θεωρείται πιο αξιόπιστο, καθώς υπάρχουν ακολουθίες σημείων που πληρούν τα κριτήρια 1. και 2. αλλά οι ακολουθίες αποκλίνουν.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

- Η μέθοδος δεν απαιτεί η αρχική προσέγγιση της λύσης να είναι πλεισίον της πραγματικής τιμής της ρίζας ξ ώστε να συγκλίνει. Όπως, δηλαδή, λέγεται ότι είναι αριθμητική μέθοδος ολικής σύγκλισης.
- Εφόσον η συνάρτηση πληροί τις συνθήκες του Bolzano, τότε συγκλίνει πάντα στο διάστημα εφαρμογής.
- Ο αριθμός που απαιτεί η μέθοδος προκειμένου να συγκλίνει είναι εκ των προτέρων γνωστός, για δεδομένο διάστημα και ακρίβεια υπολογισμού.
- Για να «τρέξει» η επαναληπτική διαδικασία χρειάζεται ως πληροφορία μόνο το πρόσημο της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, μια πληροφορία που υπολογιστικά είναι φθηνή.
- Η μέθοδος έχει αργή σύγλιση και συγκεκριμένα πληροί τη σχέση $|x_{i+1} - x^*| \leq \frac{1}{2}|x_i - x^*|$, γεγονός που υποδηλώνει ότι η μέθοδος έχει γραμμική σύγκλιση.

- Έχει τα ίδια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα με την απλή

- Έχει τα ίδια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα με την απλή
- Είναι μέθοδος ενός σημείου

- Έχει τα ίδια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα με την απλή
- Είναι μέθοδος ενός σημείου
- Υπολογίζει τους όρους της ακολουθίας, που σχηματίζονται από τα μέσα των διαστημάτων $[a_i, b_i]$

- Έχει τα ίδια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα με την απλή
- Είναι μέθοδος ενός σημείου
- Υπολογίζει τους όρους της ακολουθίας, που σχηματίζονται από τα μέσα των διαστημάτων $[a_i, b_i]$
- Οι επαναλήψεις συγκλίνουν στη λύση $\xi \in (a, b)$, αν για κάθε προσέγγιση x_i ισχύει $sgn(f(x_0)) \cdot sgn(f(x_i)) = -1$, όπου:

$$sgn(z) = \begin{cases} -1, & \text{αν} \quad z < 0 \\ 0, & \text{αν} \quad z = 0 \\ 1, & \text{αν} \quad z > 0 \end{cases}$$

Επαναληπτικό σχήμα

- Αν $x_0 = a,\ h = (b-a)sgn(f(x_0))$

$$x_{i+1} = x_i + sgn(f(x_i))\frac{h}{2^{i+1}}$$

Επαναληπτικό σχήμα

- Αν $x_0 = a,\ h = (b-a)sgn(f(x_0))$

$$x_{i+1} = x_i + sgn(f(x_i))\frac{h}{2^{i+1}}$$

- Αν $x_0 = b,\ h = (b-a)sgn(f(x_0))$

$$x_{i+1} = x_i - sgn(f(x_i))\frac{h}{2^{i+1}}$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιμένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιμένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιημένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιημένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil$$
$$= \lceil \log_2(1000) \rceil$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιμένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0,1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil$$
$$= \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιημένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0,1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil$$
$$= \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιμένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0,1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil$$
$$= \left\lceil \log_2(1000) \right\rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[0,1]$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιημένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil$$
$$= \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[0, 1]$
  $f(0) = 0^3 - \frac{0}{2} = 0$

Άσκηση 1

Να εφαρμόσετε την τροποποιμένη μέθοδο διχοτόμησης στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((1-0)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil$$
$$= \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[0, 1]$
  $f(0) = 0^3 - \frac{0}{2} = 0$
  Βρήκαμε λύση και η μέθοδος τερματίζει χωρίς να αρχίσουμε την επαναληπτική διαδικασία

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
    - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
    - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$
  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$$\begin{matrix} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{matrix} \quad f(1) \cdot f(2) < 0$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$f(1) < 0$
$f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$f(1) < 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση
$f(2) > 0$

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$$x_0 = 1, \; h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$$\begin{array}{l} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{array} \quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad \text{Υπάρχει λύση}$$

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

	$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1}$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

  $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ $f(1) \cdot f(2) < 0$ Υπάρχει λύση
- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

	$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2}$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση
- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

	$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$$\begin{matrix} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{matrix} \qquad f(1) \cdot f(2) < 0 \qquad \text{Υπάρχει λύση}$$

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

	$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \left\lceil \log_2(1000) \right\rceil = \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

	$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$
$i = 1$	

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1,2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1,2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1,2]$

  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$ $f(1) \cdot f(2) < 0$ Υπάρχει λύση
- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$
$i = 1$	$x_2 = x_1 + sgn(f(x_1))\frac{h}{2^2}$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
    - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
    - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$f(1) < 0$
$f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$
$i = 1$	$x_2 = x_1 + sgn(f(x_1))\frac{h}{2^2} = 1.5 + (-1)\frac{-1}{4}$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

$$\begin{matrix} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{matrix} \quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad \text{Υπάρχει λύση}$$

- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$
$i = 1$	$x_2 = x_1 + sgn(f(x_1))\frac{h}{2^2} = 1.5 + (-1)\frac{-1}{4} = 1.5 + 0.25$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη μέθοδο της τροποποιημένης διχοτόμησης μια προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ στο $x \in [1, 2]$ κάνοντας 2 επαναλήψεις. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των επαναλήψεων

$$\nu = \left\lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left((2-1)\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(1000) \rceil$$
$$= \lceil 9,9657 \rceil = 10$$

- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$
  - $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4 \neq 0$
  - $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3 \neq 0$
- Ελέγχουμε αν υπάρχει λύση στο διάστημα $[1, 2]$

  $f(1) < 0$
  $f(2) > 0$ $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \quad$ Υπάρχει λύση
- Εκτελούμε το επαναληπτικό σχήμα

$x_0 = 1,\ h = (2-1)sgn(f(x_0)) = 1 \cdot (-1) = -1$	
$i = 0$	$x_1 = x_0 + sgn(f(x_0))\frac{h}{2^1} = 1 + (-1)\frac{-1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$
$i = 1$	$x_2 = x_1 + sgn(f(x_1))\frac{h}{2^2} = 1.5 + (-1)\frac{-1}{4} = 1.5 + 0.25 = 1.75$

Λίγα λόγια για τη μέθοδο

Η γενική επαναληπτική μέθοδος είναι μια καθιερωμένη μεθόδος αριθμητικής προσέγγισης σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Ακόμα, είναι γνωστή και ως επαναληπτική μέθοδο του Banach.

Για να εντοπίζουμε τα σταθερά σημεία, αρκεί να εντοπίσουμε τομές του γραφήματος της συνάρτησης με τη συνάρτηση $y = x$.

Σχετίζεται με το πρόβλημα εύρεσης ριζών, καθώς όπως έχουμε δείξει πρόκειται για ισοδύναμα προβλήματα.

Σε ένα δεδομένο διάστημα η συνάρτηση μπορεί να έχει πολλά σταθερά σημεία.

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη σταθερού σημείου εξετάζουμε συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

Η γενική επαναληπτική μέθοδος

Θεώρημα

Έστω ότι $g \in C[a, b]$ και $g(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, η συνάρτηση g, έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$. Ακόμα, εάν ορίζεται η $g'(x)$ στο (a, b) και έστω θετική σταθερά $\lambda < 1$, έτσι ώστε $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$, για το οποίο $g(\xi) = \xi$ το οποίο είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = g(x) - x.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Ακόμα, για τη συνάρτηση f, ισχύει

$$f(a) = g(a) - a > 0$$

και

$$f(b) = g(b) - b < 0$$

Οπότε, παίρνουμε:

$$f(a)f(b) < 0$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$. Οπότε, το ξ είναι σταθερό σημείο της g.

Εάν θεωρήσουμε ότι $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ είναι προφανές ότι η συνάρτηση g και πάλι θα έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο στο διάστημα $[a, b]$.

Στη συνέχεια, θα πρέπει να δείξουμε τη μοναδικότητα αυτού του σημείου. Γι' αυτό θα υποθέσουμε ότι υπάρξουν δύο τέτοια σημεία, έστω $\xi_1 \in [a, b]$ και $\xi_2 \in [a, b]$, με $\xi_1 \neq \xi_2$.

Αξιοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής, έχουμε ότι

$$g(\xi_1) - g(\xi_2) = g'(h)(\xi_1 - \xi_2)$$

με $g(\xi_1) < h < g(\xi_2)$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |g(\xi_1) - g(\xi_2)| \\ &= |g'(h)(\xi_1 - \xi_2)| \leq \lambda |\xi_1 - \xi_2| \\ &< |\xi_1 - \xi_2| \end{aligned}$$

Άρα, καταλήξαμε σε άτοπο.

Οπότε, το σταθερό σημείο της g θα είναι μοναδικό.

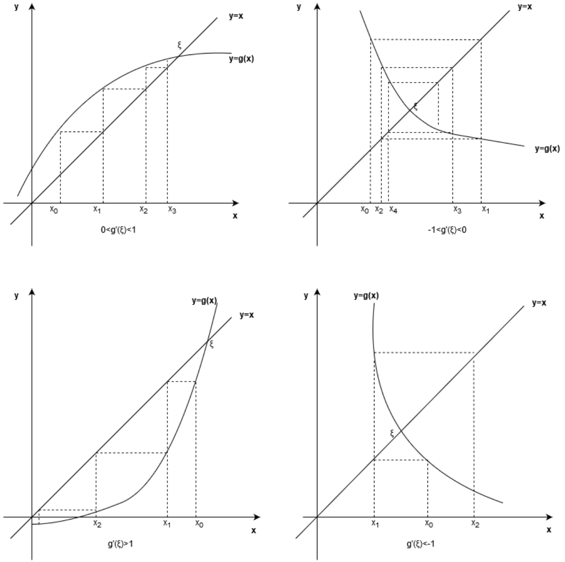
Επαναληπτικό σχήμα

Το επαναλαπτικό σχήμα το οποίο παράγει την ακολουθία σημείων που συγκλίνει στο σταθερό σημείο είναι

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Σημείωση: Είναι δυνατό να εξαχθούν διαφορετικές συναρτήσεις g, έτσι ώστε ένα σταθερό σημείο της g, να είναι ρίζα της συνάρτησης f.

Γεωμετρική Ερμηνεία



Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα

Έστω $f \in C[a, b]$. Τότε, υπάρχουν αριθμοί, έστω $l, h \in [a, b]$ για τους οποίους ισχύει

$$f(l) \leq f(x) \leq f(h)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Ακόμα, εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε οι τιμές l και h είναι είτε τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ είτε ρίζες της παραγώγου f'.

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και επιπλέον, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b). Τότε, υπάρχει ένα $\eta \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a).$$

Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα

Έστω $g(x) \in C[a, b]$ και $g(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$. Ακόμα, ορίζεται η παράγωγος $g'(x)$ και $g'(x) \in (a, b)$. Επιπλέον, ισχύει

$$|g'(x)| \leq L < 1$$

για κάθε $x \in (a, b)$. Για οποιαδήποτε τιμή $x_0 \in [a, b]$, η ακολουθία σημείων που παράγεται από το επαναληπτικό σχήμα

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [a, b]$ της συνάρτησης g.

Απόδειξη

Αφού η συνάρτηση g πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Banach, τότε έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in [a, b]$.

Αφού $g(x) \in [a, b]$ για κάθε $x \in [a, b]$, η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ορίζεται για κάθε $n \geq 0$ και $x_n \in [a, b]$.

Έτσι, από τη συνθήκη του Banach και το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε

$$|x_n - \xi| = |g(x_{n-1}) - g(\xi)| = |g'(\xi)||x_{n-1} - \xi| \leq L|x_{n-1} - \xi|$$

όπου $\min(x_{n-1}, \xi) < \xi < \max(x_{n-1}, \xi)$

Με διαδοχικές εφαρμογές της τελευταίας σχέσης, έχουμε

$$|x_n - \xi| \leq L|x_{n-1} - \xi| \leq L^2|x_{n-2} - \xi| \leq \ldots \leq L^n|x_0 - \xi|.$$

Όμως, $0 \leq L < 1$ και, άρα

$$\lim_{n\to\infty} L^n = 0.$$

Απόδειξη (συνέχεια)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι,

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| \leq \lim_{n\to\infty} |x_0 - \xi| = 0.$$

Οπότε, η ακολουθία των σημείων που παράγεται από τη γενική επαναληπτική μέθοδο συγκλίνει στο σταθερό σημείο ξ της συνάρτησης g.

Ανάλυση της σύγκλισης

Θεωρούμε ότι x_{n+1} είναι η προσέγγιση του σταθερού σημείου, που παρέχει η γενική επαναληπτική μέθοδος στην $n+1$ επανάληψη.

Ακόμα, έστω ξ η πραγματική τιμή του σταθερού σημείου της συνάρτησης και ε_{n+1} το σφάλμα της προσεγγιστικής τιμής.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η ακολουθία των σημείων παράγεται από την επαναληπτική σχέση

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

έχουμε

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi).$$

Για τη συνάρτηση g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, συνεπώς έχουμε

$$\varepsilon_{n+1} = g'(\eta)(x_n - \xi)$$

Ανάλυση της σύγκλισης

Η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής

$$\varepsilon_{n+1} = g'(\eta)\varepsilon_n$$

Θεωρούμε πως, καθώς οι επαναλήψεις αυξάνονται, η ακολουθία των σημείων πλησιάζει στο σταθερό σημείο της συνάρτησης.

Συνεπώς, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της παραγώγου στο σημείο η με την τιμή $g'(\xi)$.

Τελικά, προκύπτει

$$\varepsilon_{n+1} \simeq g'(\xi)\varepsilon_n.$$

η οποία δηλώνει ότι αν έχουμε μια εκτίμηση της παραγώγου στο σταθερό σημείο της συνάρτησης, τότε βγάζουμε συμπεράσματα για τη σύγκλιση της μεθόδου.

Αλγόριθμος υλοποίησης

1. Δίνουμε στον αλγόριθμο τους πόρους που χρειάζεται για να εκκινήσει η διαδικασία: Είσοδος $= \{g, \varepsilon, x_0, max\}$
2. Θέτουμε $i = -1$ και ακολούθως πηγαίνουμε στο βήμα 3.
3. Κάνε το i ίσο με $i + 1$ και πήγαινε στο βήμα 4.
4. Αν $i > max$ ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς θέτουμε $x_{i+1} = g(x_i)$ και πήγαινε στο βήμα 5.
5. Ελέγχουμε αν $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$. Αν ισχύει, ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 3.
6. Δώσε την έξοδο του αλγορίθμου: Έξοδος $= \{i, x_i, g(x_i)\}$

Άσκηση 1

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, *η οποία έχει μια ρίζα, έστω* ξ, *στο διάστημα* $[2, 3]$. *Να δείξετε ότι το επαναληπτικό σχήμα* $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n^2}$, *για* $x_0 \in [2, 3]$ *συγκλίνει στη ρίζα* ξ.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ και το διάστημα $[2, 3]$ στο οποίο η συνάρτηση g είναι συνεχής.

Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της g είναι μια φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2, 3]$ με ακρότατα τις τιμές

$$g(3) = 2 + \frac{1}{9} = m$$

και

$$g(2) = 2 + \frac{1}{4} = M$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Λύση: Από το θεώρημα Ακριτάτων Τιμών έχουμε το εξής

$$g(x) \in [2 + \tfrac{1}{9}, 2 + \tfrac{1}{4}] \subset [2, 3]$$

για κάθε $x \in [2, 3]$.

Ακόμα,

$$|g'(x)| = \left| -\frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{1}{4}$$

για κάθε $x \in [2, 3]$.

Επομένως, η συνάρτηση g πληροί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκλισης και άρα, η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

συγκλίνει στη ρίζα $\xi \in [2, 3]$ για κάθε $x_0 \in [2, 3]$.

Άσκηση 2

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$, η οποία έχει ρίζες τις τιμές 2 και -1. Να υπολογίσετε τη ρίζα $\xi = 2$ χρησιμοποιώντας τη γενική επαναληπτική μέθοδο.

Λύση: Αρχικά, μετασχηματίζουμε το πρόβλημα με ισοδύναμο τρόπο, ώστε να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε τη μέθοδο του Banach για τον υπολογισμό ριζών.

Έτσι, έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$$

Ορίζουμε το επαναληπτικό σχήμα της μορφής

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Στη συνέχεια, λαμβάνουμε ως $g(x)$ τις ακόλουθες δύο συναρτήσεις

(i) $g(x) = x^2 - 2$

(ii) $g(x) = \sqrt{x+2}$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Λύση: (α) Για την πρώτη περίπτωση έχουμε

$$g'(x) = 2x > 1$$

για $x > \frac{1}{2}$ και συνεπώς, δεν ικανοποιείται η βασική συνθήκη του Banach για κανέναν διάστημα που περιέχει τη ρίζα $\xi = 2$.

(β) Για τη δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

και επιπλέον, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \geq 0$, ισχύει

$$g(x) \geq 0$$

και

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{8}} < 1$$

Οπότε, ικανοποιείται η βασική συνθήκη του Banach.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Λύση: (β) Ακόμα, για $x \leq c$, ισχύει ότι

$$\sqrt{x+2} \leq \sqrt{c+2} \leq c$$

για $c \geq 2$.

Οπότε,

$$g(x) = \sqrt{x+2} \leq c$$

για $c \geq 2$.

Τελικά, για $x \in [0, c]$ με $c \geq 2$, ισχύει $g(x) \in C[0, c]$ και άρα, πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Banach.

Οπότε, μπορούμε να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό της λύσης:

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Λύση: (β) Επιλέγουμε μια αρχική προσέγγιση $x_0 \in [0, k]$.

Για $x_0 = 0$ και επαναληπτικό σχήμα $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{x_0 + 2} = \sqrt{2} \simeq 1.4142 \\
x_2 &= \sqrt{x_1 + 2} = \sqrt{1.4142 + 2} = \sqrt{3.4142} \simeq 1.8478 \\
x_3 &= \sqrt{x_2 + 2} = \sqrt{1.8478 + 2} = \sqrt{3.8478} \simeq 1.9616 \\
x_4 &= \sqrt{x_3 + 2} = \sqrt{1.9616 + 2} = \sqrt{3.9616} \simeq 1.9904 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

η ακολουθία σημείων, που όπως παρατηρούμε συγκλίνει προς τη ρίζα $\xi = 2$.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

- Η μέθοδος απαιτεί μόνο μία αρχική προσέγγιση για την εκκίνηση του επαναληπτικού σχήματος.
- Εφόσον η συνάρτηση πληροί κάποιες προϋποθέσεις συγκλίνει στο σταθερό σημείο.
- Δεν έχει σταθερό ρυθμό σύγκλισης.
- Είναι απλή και εύκολα ερμηνεύσιμη με απλό τρόπο υλοποίησης.
- Δύναται να εφαρμοστεί για την προσέγγιση του προβλήματος εύρεσης ριζών.

Συμπερασματικά...

1. Η αριθμητική επίλυση έδωσε αξιόπιστες και ικανοποιητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης.

Συμπερασματικά...

1. Η αριθμητική επίλυση έδωσε αξιόπιστες και ικανοποιητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης.
2. Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούμε παράγουν ακολουθίες σημείων, όπου επαναληπτικά προσδοκούμε να βελτιώνουν τις προηγούμενες και να συγκλίνουν στη ρίζα με μια δεδομένη ακρίβεια.

Συμπερασματικά...

1. Η αριθμητική επίλυση έδωσε αξιόπιστες και ικανοποιητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης.
2. Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούμε παράγουν ακολουθίες σημείων, όπου επαναληπτικά προσδοκούμε να βελτιώνουν τις προηγούμενες και να συγκλίνουν στη ρίζα με μια δεδομένη ακρίβεια.
3. Πριν την εκκίνηση κάποιου αλγορίθμου μελετάμε προσεκτικά το πρόβλημα, ώστε να εξάγουμε χρήσιμη πληροφορία.

Συμπερασματικά...

1. Η αριθμητική επίλυση έδωσε αξιόπιστες και ικανοποιητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης.
2. Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούμε παράγουν ακολουθίες σημείων, όπου επαναληπτικά προσδοκούμε να βελτιώνουν τις προηγούμενες και να συγκλίνουν στη ρίζα με μια δεδομένη ακρίβεια.
3. Πριν την εκκίνηση κάποιου αλγορίθμου μελετάμε προσεκτικά το πρόβλημα, ώστε να εξάγουμε χρήσιμη πληροφορία.
4. Παρουσιάζεται πλήθος αριθμητικών μεθόδων που κάθε μία έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης και όχι μόνο.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης και όχι μόνο.
2. Εντοπίζοντας ένα διάστημα στο οποίο περιέχεται μία ρίζα μάς εξασφαλίζει πάντα σύγκλιση στη ρίζα.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης και όχι μόνο.
2. Εντοπίζοντας ένα διάστημα στο οποίο περιέχεται μία ρίζα μάς εξασφαλίζει πάντα σύγκλιση στη ρίζα.
3. Είναι μια απλή μέθοδος και έχει απλό τρόπο υλοποίησης.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης και όχι μόνο.
2. Εντοπίζοντας ένα διάστημα στο οποίο περιέχεται μία ρίζα μάς εξασφαλίζει πάντα σύγκλιση στη ρίζα.
3. Είναι μια απλή μέθοδος και έχει απλό τρόπο υλοποίησης.
4. Η πληροφορία που αξιοποιεί είναι εύκολα και γρήγορα υπολογίσιμη και δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρή.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό σταθερών σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό σταθερών σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί μια σειρά προϋποθέσεων προκειμένου να εξασφαλιστεί σύγκλιση.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό σταθερών σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί μια σειρά προϋποθέσεων προκειμένου να εξασφαλιστεί σύγκλιση.
3. Έχει πολύ απλό και εύκολα ερμηνεύσιμο επαναληπτικό σχήμα.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό σταθερών σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί μια σειρά προϋποθέσεων προκειμένου να εξασφαλιστεί σύγκλιση.
3. Έχει πολύ απλό και εύκολα ερμηνεύσιμο επαναληπτικό σχήμα.
4. Πρόκειται για μια μέθοδο που υπό προϋποθέσεις συγκλίνει γρήγορα.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

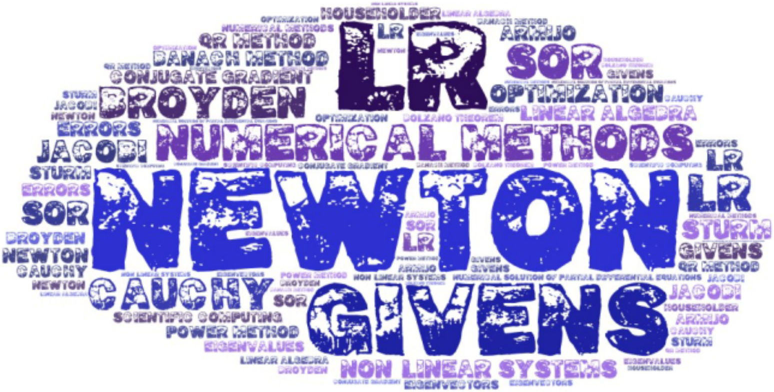
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ