Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Αριθμητική Επίλυση εξισώσεων

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

23 Μαρτίου 2021

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα I

1. Η μεθοδος των Newton-Raphson
2. Ανάπτυξη της μεθόδου
3. Γεωμετρική ερμηνεία
4. Σύγκλιση
5. Αλγόριθμος
6. Κριτήρια τερματισμού
7. Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα
8. Παράδειγμα
9. Λύση με τύπους de Moivre
10. Αναγωγή σε σύστημα
11. Σύνοψη - Συμπεράσματα
12. Η μέθοδος της τέμνουσας
13. Ανάπτυξη της μεθόδου
14. Γεωμετρική ερμηνεία
15. Σύγκλιση

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα II

16 Αλγόριθμος

17 Κριτήρια τερματισμού

18 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

19 Σύνοψη - Συμπεράσματα

20 Βιβλιογραφία

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Λίγα λόγια για τη μέθοδο

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι μια καθιερωμένη μεθόδος αριθμητικής προσέγγισης λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον Joseph Raphson το 1690.

Παρά την «παλαιότητά» της βρίσκει εφαρμογές ακόμα και σήμερα.

Χρησιμοποιεί την παράγωγο της συνάρτησης για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης.

Το επαναληπτικό της σχήμα προκύπτει από το γνωστό ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης f.

Υπό προϋποθέσεις δύναται να συγκλίνει με γρήγορο ρυθμό προς την επιθυμητή προσέγγιση με μια δεδομένη ακρίβεια.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Η μέθοδος των Newton-Raphson

Υποθέτουμε ότι $f \in C^2[a, b]$ και επιπλέον, ότι $x_n \in [a, b]$ είναι μια προσέγγιση της ρίζας, έστω ξ, τέτοια ώστε $f'(x_n) \neq 0$ και η ποσότητα $|x_n - \xi|$ είναι «μικρή».

Εφόσον η συνάρτηση f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στη ρίζα ξ, τότε για κάθε x_n, σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης, έχουμε:

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!} f''(\eta)$$

όπου $x_n < \eta < \xi$.

Αν θέσουμε $x = \xi$ στην παραπάνω σχέση και εξ ορισμού του προβλήματος εύρεσης ριζών, έχουμε:

Η μέθοδος των Newton-Raphson

$$f(\xi) = f(x_n) + \frac{(\xi - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(\xi - x_n)^2}{2!} f''(\eta)$$

$$f(\xi) = f(x_n) + \frac{(\xi - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(\xi - x_n)^2}{2!} f''(\eta) = 0$$

Εφόσον, το σημείο η είναι άγνωστο, μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά:

$$f(x_n) + (\xi - x_n) f'(x_n) \simeq 0$$

Ισοδύναμα, παίρνουμε:

$$\xi \simeq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

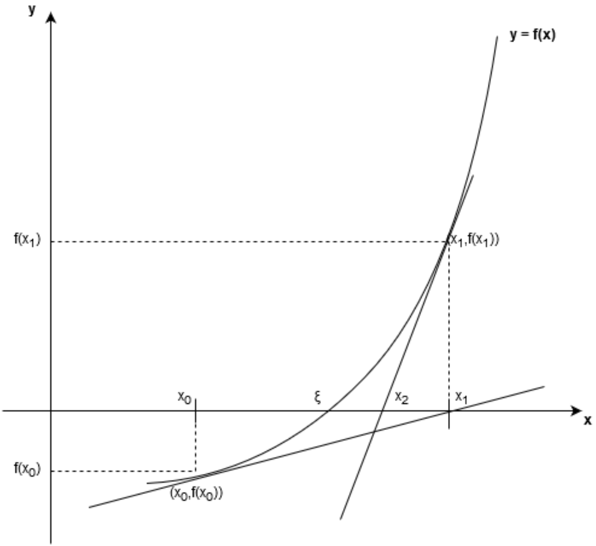
Επαναληπτικό σχήμα

Θεωρώντας, ότι το σημείο x_n είναι κοντά στη ρίζα ξ, παίρνουμε το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου των Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

για δεδομένη αρχική προσέγγιση x_0 και $f'(x_n) \neq 0$ για κάθε n.

Περιγραφή



Ερμηνεία

Έστω x_0 μια αρχική προσέγγιση της λύσης (αυθαίρετα επιλεγμένη), όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Η επόμενη προσέγγιση x_1 της λύσης θα δίνεται από την τομή της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα των τετμημένων.

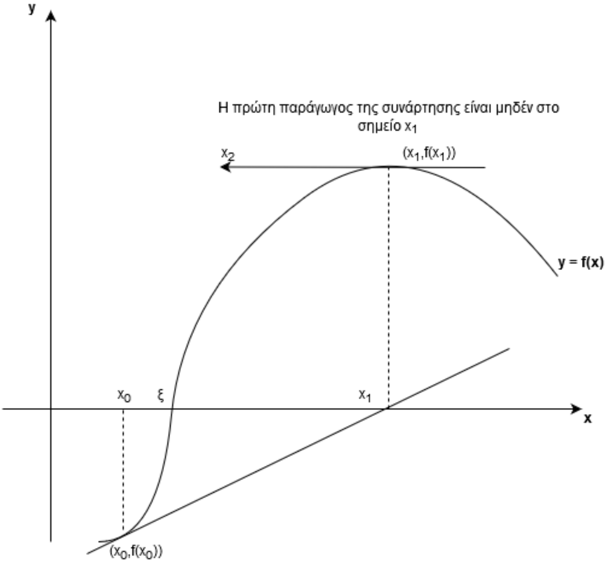
Η εξίσωση της παραπάνω ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

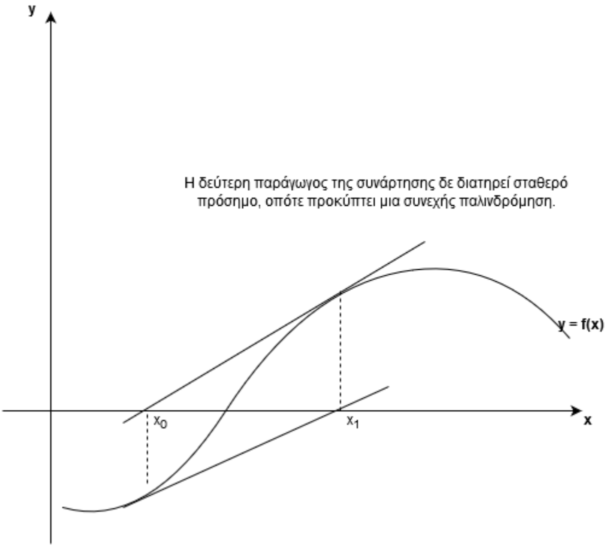
Αντιχτοίχως, η προσέγγιση x_2 δίνεται από την τομή της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ με τον άξονα των τετμημένων κ.ο.κ.

Προσοχή: Η επιλογή της αρχικής προσέγγισης θα πρέπει να γίνεται κατόπιν μελέτης, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μέθοδος αποκλίνει, δε συγκλίνει ή/και παλινδρομεί.

Προβληματικές περιπτώσεις



Προβληματικές περιπτώσεις



Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f \in C^2[a, b]$ και επιπλέον ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(α) Ικανοποεί το κριτήριο του Bolzano

(β) $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$

(γ) Η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, b]$

(δ) Αν c σημείο του διαστήματος όπου $|f'(c)|$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$, τότε ισχύει $|\dfrac{f(c)}{f'(c)}| \leq b - a$

Όταν πληρούνται οι παραπάνω συνθήκες, η μέθοδος των Newton-Raphson συγκλίνει στη ρίζα ξ του διαστήματος $[a, b]$ και η σύγκλιση θα είναι τετραγωνική.

Σύγκλιση της μεθόδου - Ερμηνεία

(α) Εξασφαλίζεται ότι εντός του διαστήματος υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα.

(β) Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι είτε αυστηρά αύξουσα είτε αυστηρά φθίνουσα στο δοθέν διάστημα και συνεπώς, η λύση της συνάρτησης είναι μοναδική.

(γ) Εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω.

(δ) Εξετάζοντας γεωμετρικά την τελευταία, παρατηρούμε ότι αν $x_0 \in [a, b]$ τότε και το $x_1 \in [a, b]$

Ταχύτητα σύγκλισης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f \in C^2[a, b]$ και ξ μια απλή λύση της συνάρτησης στο διάστημα $[a, b]$. Επιπλέον, $f'(\xi) \neq 0$.

Το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου δίνεται από τη σχέση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζεται εναλλακτικά ως εξής:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

θεωρώντας

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ταχύτητα σύγκλισης

Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor η συνάρτηση g στο σημείο ξ και για $f'(x) \neq 0$, εκφράζεται ως εξής:

$$g(x) = g(\xi) + (x - \xi)g'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2!}g''(\eta)$$

με $x < \eta < \xi$.

Εφόσον ξ λύση της f, τότε $f(\xi) = 0$ και επιπλέον, αφού $f'(\xi) \neq 0$, προκύπτει ότι $g(\xi) = \xi$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης g :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Όμως, $f(\xi) = 0$ και $f'(\xi) \neq 0$, συνεπώς:

Ταχύτητα σύγκλισης

$$g'(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{f'(\xi)^2} = 0$$

Ακόμα, για τη δεύτερη παράγωγο της g, ισχύει:

$$g''(x) = \frac{f'(x)^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)f''(x)^2}{f'(x)^3}$$

Συνεπώς,

$$g''(\xi) = \frac{f'(\xi)^2 f''(\xi)}{f'(\xi)^3} = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \neq 0$$

Από τη σχέση του Taylor, προκύπτει:

$$g(x) - \xi = \frac{(x-\xi)^2}{2} g''(\eta)$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Ταχύτητα σύγκλισης

Αν θεωρήσουμε ότι z είναι ένα άνω φράγμα της ποσότητας $\frac{g''(\eta)}{2}$, η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$|x_{n+1} - \xi| \leq z|x_n - \xi|^2$$

Επομένως, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδους Newton-Raphson είναι τετραγωνική.

Αλγόριθμος υλοποίησης

1. Δίνουμε στον αλγόριθμο τους πόρους που χρειάζεται για να εκκινήσει η διαδικασία: Είσοδος $= \{f, f', \varepsilon, x_0, max\}$
2. Θέτουμε $i = -1$ και ακολούθως πηγαίνουμε στο βήμα 3.
3. Κάνε το i ίσο με $i+1$ και πήγαινε στο βήμα 4.
4. Αν $i > max$ ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς θέτουμε $\xi = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ και πήγαινε στο βήμα 5.
5. Ελέγχουμε αν $|\xi - x_0| < \varepsilon$. Αν ισχύει, ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς θέσε $x_0 = \xi$ και πήγαινε στο βήμα 3.
6. Δώσε την έξοδο του αλγορίθμου: Έξοδος $= \{i, x_i, f(x_i)\}$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου

- Τυπικά δε θα ελέγχουμε εάν $f(x_i) = 0$.
- Αντί αυτού του ελέγχου, εφόσον ζητείται συγκεκριμένη ακρίβεια ε, μπορούμε να ελέγχουμε ένα από τα ακόλουθα κριτήρια:
    1. $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$
    2. $|f(x_i)| < \varepsilon$
    3. $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon$

Προσοχή

Από τα παραπάνω κριτήρια το τρίτο, του απόλυτου σχετικού σφάλματος θεωρείται πιο αξιόπιστο, καθώς υπάρχουν ακολουθίες σημείων που πληρούν τα κριτήρια 1. και 2. αλλά οι ακολουθίες αποκλίνουν.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

- Η μέθοδος απαιτεί μόνο μία αρχική προσέγγιση για την εκκίνηση του επαναληπτικού σχήματος.
- Εφόσον η συνάρτηση πληροί κάποιες προϋποθέσεις συγκλίνει με τετραγωνικό ρυθμό (είναι γρηγορότερη από τη διχοτόμηση και την εσφαλμένη θέση).
- Είναι σχετικά απλή και εύκολα ερμηνεύσιμη με απλό τρόπο υλοποίησης.
- Είναι μέθοδος τοπικής σύγκλισης, καθώς παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στην αρχική προσέγγιση της λύσης.
- Δε συγκλίνει πάντα.
- Απαιτεί πληροφορία υπολογισμού που είναι δαπανηρή (παράγωγος συνάρτησης) ή και αδύνατο να υπολογιστεί σε κάποιες περιπτώσεις.
- Απαιτεί δύο συναρτησιακούς υπολογισμούς σε κάθε επανάληψη.

Άσκηση 1

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$ για $x \in [1, 2]$. Να εντοπίσετε ένα διάστημα στο οποίο η μέθοδος των Newton-Raphson συγκλίνει.

Λύση: Εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκλισης:

Αρχικά, η συνάρτηση $f \in C^2[1, 2]$ και επιπλέον πληροί το κριτήριο του Bolzano, καθώς $f(1)f(2) < 0$.

Ακόμα, $f'(x) = 3x^2 - 2 \neq 0$ και $f''(x) = 6x > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Τέλος, εξετάζουμε την τελευταία συνθήκη, παίρνοντας ως $z = 1$, το αριστερό άκρο του διαστήματος: $|\frac{f(1)}{f'(1)}| = 2 > 1$.

Συνεπώς, η μέθοδος δε συγκλίνει στο διάστημα $[1, 2]$.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Λύση: Οπότε, πρέπει να εντοπίσουμε κάποιο διάστημα της μορφής $[c, d] \subset [1, 2]$ για το οποίο να συγκλίνει η μέθοδος.

Λαμβάνουμε το μέσον του αρχικού διαστήματος $x = (1+2)/2 = 1.5$.

Παρατηρούμε ότι στο δεξί υποδιάστημα $[1.5, 2]$ εντοπίζεται μια ρίζα, καθώς $f(1.5)f(2) < 0$.

Επιπλέον, για το παραπάνω διάστημα παρατηρούμε ότι ισχύει: $\left|\frac{f(1.5)}{f'(1.5)}\right| = \frac{5}{30} < 1$.

Συνεπώς, η μέθοδος συγκλίνει στο διάστημα $[1.5, 2]$.

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

1. Ορίζω $f, f^{'}, f^{''}$

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad f^{'}(x) = 2 + e^{-x} \quad f^{''}(x) = -e^{-x}$$

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

1. Ορίζω f, f', f''

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad f'(x) = 2 + e^{-x} \quad f''(x) = -e^{-x}$$

2. Ελέγχω τις προϋποθέσεις εφαρμογής της μεθόδου

$$\begin{array}{l} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{array} \quad \forall x \in (0,1) \quad \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array} \quad f(0)f(1) < 0$$

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

1. Ορίζω f, f', f''

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad f'(x) = 2 + e^{-x} \quad f''(x) = -e^{-x}$$

2. Ελέγχω τις προϋποθέσεις εφαρμογής της μεθόδου

$$\begin{matrix} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{matrix} \quad \forall x \in (0,1) \quad \begin{matrix} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{matrix} \quad f(0)f(1) < 0$$

3. Επιλέγω την αρχική προσέγγιση

$$\begin{matrix} f(0)f''(0) > 0 \\ f(1)f''(1) < 0 \end{matrix}$$

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

1. Ορίζω $f, f^{'}, f^{''}$

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad f^{'}(x) = 2 + e^{-x} \quad f^{''}(x) = -e^{-x}$$

2. Ελέγχω τις προϋποθέσεις εφαρμογής της μεθόδου

$$\begin{array}{l} f^{'}(x) \neq 0 \\ f^{''}(x) \neq 0 \end{array} \quad \forall x \in (0, 1) \quad \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array} \quad f(0)f(1) < 0$$

3. Επιλέγω την αρχική προσέγγιση

$$\left.\begin{array}{l} f(0)f^{''}(0) > 0 \\ f(1)f^{''}(1) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = 0$$

Άσκηση 2

Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ για $N = 5$ επαναλήψεις.

1. Ορίζω f, f', f''

$$f(x) = 2x - e^{-x} \qquad f'(x) = 2 + e^{-x} \qquad f''(x) = -e^{-x}$$

2. Ελέγχω τις προϋποθέσεις εφαρμογής της μεθόδου

$$\begin{matrix} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{matrix} \quad \forall x \in (0,1) \quad \begin{matrix} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{matrix} \quad f(0)f(1) < 0$$

3. Επιλέγω την αρχική προσέγγιση

$$\begin{matrix} f(0)f''(0) > 0 \\ f(1)f''(1) < 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_0 = 0$$

4. Ορίζω την ακρίβεια $\epsilon = 0.001$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πρώτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$

Πρώτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0			

Πρώτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0		

Πρώτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	

Πρώτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$

$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$

Δεύτερη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1			

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$

$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$

Δεύτερη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$		

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$

Δεύτερη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$

Δεύτερη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$

$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$

$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2			

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$
$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$
$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168		

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$

Δεύτερη επανάληψη

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$

$x_2 = 0.35168$

$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$

Τρίτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	2.7035

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	2.7035

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$
$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$
$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$x_3 = 0.35168 - \frac{-0.0001}{2.7035}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f^{'}(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	2.7035

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$x_3 = 0.35168 - \frac{-0.0001}{2.7035}$$
$$x_3 = 0.351734$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	2.7035

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Πρώτη επανάληψη

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left|0 - \frac{1}{3}\right| > \epsilon$$

Δεύτερη επανάληψη

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{-0.0499}{2.7165}$$
$$x_2 = 0.35168$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0.35168\right| > \epsilon$$

Τρίτη επανάληψη

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$x_3 = 0.35168 - \frac{-0.0001}{2.7035}$$
$$x_3 = 0.351734$$

$$|0.35168 - 0.351734| < \epsilon$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1	3
1	$\frac{1}{3}$	-0.0499	2.7165
2	0.35168	-0.0001	2.7035

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (1η επ)

Δεν ισχύει το κριτήριο τερματισμού (2η επ)

Ισχύει το κριτήριο τερματισμού (3η επ)

Άσκηση 3

Να βρείτε όλες τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης $z^3 - 1 = 0$

Άσκηση 3

Να βρείτε όλες τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης $z^3 - 1 = 0$

Αν και η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα εύρεσης μιγαδικών λύσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του de Moivre

Άσκηση 3

Να βρείτε όλες τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης $z^3 - 1 = 0$

Αν και η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα εύρεσης μιγαδικών λύσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του de Moivre

Τύποι του de Moivre

Για την επίλυση της εξίσωσης της μορφής $z^n = 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Άσκηση 3

Να βρείτε όλες τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης $z^3 - 1 = 0$

Αν και η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα εύρεσης μιγαδικών λύσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του de Moivre

Τύποι του de Moivre

Για την επίλυση της εξίσωσης της μορφής $z^n = 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ερώτηση: Μπορούμε με τη μέθοδο Newton-Raphson να βρούμε όλες τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης;

- Θεώρουμε ότι μια ρίζα $\zeta \in \mathbb{C}$ έχει την πολική μορφή

$$\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \rho > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

- Θεωρούμε ότι μια ρίζα $\zeta \in \mathbb{C}$ έχει την πολική μορφή

$$\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \rho > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

- Πληροί την εξίσωση $z^3 - 1 = 0$, συνεπώς με αντικατάσταση έχουμε

$$\rho^3(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = 1$$

- Θεώρούμε ότι μια ρίζα $\zeta \in \mathbb{C}$ έχει την πολική μορφή

$$\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \rho > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

- Πληροί την εξίσωση $z^3 - 1 = 0$, συνεπώς με αντικατάσταση έχουμε

$$\rho^3(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = 1$$

- Με τη βοήθεια του τύπου του de Moivre, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\rho^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 1(\cos 0\phi + i\sin 0\phi)$$

- Θεωρούμε ότι μια ρίζα $\zeta \in \mathbb{C}$ έχει την πολική μορφή

$$\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \rho > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

- Πληροί την εξίσωση $z^3 - 1 = 0$, συνεπώς με αντικατάσταση έχουμε

$$\rho^3(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = 1$$

- Με τη βοήθεια του τύπου του de Moivre, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\rho^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 1(\cos 0\phi + i\sin 0\phi)$$

- Προκύπτει ότι

$$\rho^3 = 1 \quad \text{και} \quad 3\phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Θεωρούμε ότι μια ρίζα $\zeta \in \mathbb{C}$ έχει την πολική μορφή

$$\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \rho > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

- Πληροί την εξίσωση $z^3 - 1 = 0$, συνεπώς με αντικατάσταση έχουμε

$$\rho^3(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = 1$$

- Με τη βοήθεια του τύπου του de Moivre, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\rho^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 1(\cos 0\phi + i\sin 0\phi)$$

- Προκύπτει ότι

$$\rho^3 = 1 \quad \text{και} \quad 3\phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Η λύση είναι

$$\rho = 1 \quad \text{και} \quad \phi_k = \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$\zeta_1 = 1 + i0$$

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$\zeta_1 = 1 + i0$$
$$\zeta_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$\zeta_1 = 1 + i0$$
$$\zeta_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$\zeta_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 + i0 \\
\zeta_2 &= \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} \\
\zeta_3 &= \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

- Παρατηρούμε ότι
  - Για $k = 3 \Rightarrow \phi_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_1

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 + i0\\
\zeta_2 &= \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\\
\zeta_3 &= \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

- Παρατηρούμε ότι
  - Για $k = 3 \Rightarrow \phi_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_1
  - Για $k = 4 \Rightarrow \phi_4 = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_2

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$\zeta_1 = 1 + i0$$
$$\zeta_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$\zeta_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

- Παρατηρούμε ότι
  - Για $k = 3 \Rightarrow \phi_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_1
  - Για $k = 4 \Rightarrow \phi_4 = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_2
  - Για $k = 5 \Rightarrow \phi_5 = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_3

- Έχοντας θεωρήσει την πολική μορφή $\zeta = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$
- Καταλήγουμε στις εξής ρίζες

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 + i0 \\
\zeta_2 &= \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} \\
\zeta_3 &= \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

- Παρατηρούμε ότι
  - Για $k = 3 \Rightarrow \phi_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_1
  - Για $k = 4 \Rightarrow \phi_4 = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_2
  - Για $k = 5 \Rightarrow \phi_5 = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ και επανερχόμαστε στη ρίζα ζ_3
  - Οι ρίζες θα επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά οπότε το $k = 0, 1, 2$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $\quad z = x + yi$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $$z = x + yi$$

$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω
$$z = x + yi$$
$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$
$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1 = 0$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $z = x + yi$

$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1 = 0$$

$$(x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i = 0$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $z = x + yi$

$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1 = 0$$

$$(x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i = 0$$

Ορίζουμε

$$f_1(z^{'}) = Re(z^{'}) = x^3 - 3xy^2 - 1$$

$$f_2(z^{'}) = Im(z^{'}) = 3x^2y - y^3$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $\quad z = x + yi$

$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1 = 0$$

$$(x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i = 0$$

Ορίζουμε

$$f_1(z') = Re(z') = x^3 - 3xy^2 - 1$$

$$f_2(z') = Im(z') = 3x^2y - y^3$$

Σύστημα

$$f_1(z') = 0$$

$$f_2(z') = 0$$

Άσκηση 4

Να ανάγετε τη λύση της $f(z) = z^3 - 1 = 0$ σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

θέτω $z = x + yi$

$$(x + yi)^3 - 1 = 0$$
$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1 = 0$$
$$(x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i = 0$$

Ορίζουμε

$$f_1(z^{'}) = Re(z^{'}) = x^3 - 3xy^2 - 1$$
$$f_2(z^{'}) = Im(z^{'}) = 3x^2y - y^3$$

Σύστημα

$$f_1(z^{'}) = 0$$
$$f_2(z^{'}) = 0$$

Προσοχή: Το παραπάνω σύστημα απαιτεί μεθόδους που επιλύουν το παρακάτω πρόβλημα

Επίλυση συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων

Δεδομένης της $F_n = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{D}_n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, να βρεθεί κάποιο σημείο $x^* \in \mathbb{D}_n$ τέτοιο ώστε $F_n(x^*) = O_n$

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης, με πλήθος εφαρμογών και παραλλαγών.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης, με πλήθος εφαρμογών και παραλλαγών.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί την προσεκτική επιλογή της αρχικής προσέγγισης.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης, με πλήθος εφαρμογών και παραλλαγών.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί την προσεκτική επιλογή της αρχικής προσέγγισης.
3. Απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου, μια πληροφορία που είναι δύσκολο ή/και αδύνατο να υπολογιστεί στην πλειοψηφία των περιπτώσεων.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία από τις γνωστότερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους στο χώρο της Αριθμητικής Ανάλυσης, με πλήθος εφαρμογών και παραλλαγών.
2. Είναι μια μέθοδος που απαιτεί την προσεκτική επιλογή της αρχικής προσέγγισης.
3. Απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου, μια πληροφορία που είναι δύσκολο ή/και αδύνατο να υπολογιστεί στην πλειοψηφία των περιπτώσεων.
4. Πρόκειται για μια μέθοδο που υπό προϋποθέσεις συγκλίνει γρήγορα.

Λίγα λόγια για τη μέθοδο

Όπως παρουσιάσαμε η μέθοδος των Newton-Raphson μειονεκτεί σημαντικά, όσον αφορά την αρχική προσέγγιση της λύσης και τον υπολογισμό της παραγώγου.

Εάν η συνάρτηση που μελετάμε είναι σύνθετη, τότε ο υπολογισμός της παραγώγου πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν ακριβής, ώστε να αποφύγουμε τη συσσώρευση σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

Λύση στα παραπάνω προβλήματα δύναται να παρέχει η μέθοδος της Τέμνουσας.

Η σύγκλισή της είναι καλύτερη από γραμμική αλλά χειρότερη από τετραγωνική. Σε συνδυασμό με την αποφυγή υπολογισμού της παραγώγου καθίσταται ανταγωνιστική.

Το επαναλήπτικό σχήμα της μεθόδου προκύπτει με τη βοήθεια της μεθόδου Newton-Raphson.

Η μέθοδος της Τέμνουσας

Το επαναληπτικό σχήμα που περιγράφει τη μέθοδο Newton-Raphson είναι το ακόλουθο:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Στην παραπάνω σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή της παραγώγου προσεγγιστικά με την ποσότητα:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Θεωρούμε ότι οι προσεγγίσεις x_i είναι κοντά στην πραγματική τιμή της ρίζας ξ και έτσι, η παραπάνω προσέγγιση θεωρείται ικανοποιητική.

Η μέθοδος της Τέμνουσας

Αντικαθιστώντας την προσεγγιστική τιμή της παραγώγου στο επαναληπτικό σχήμα των Newton-Raphson παίρνουμε:

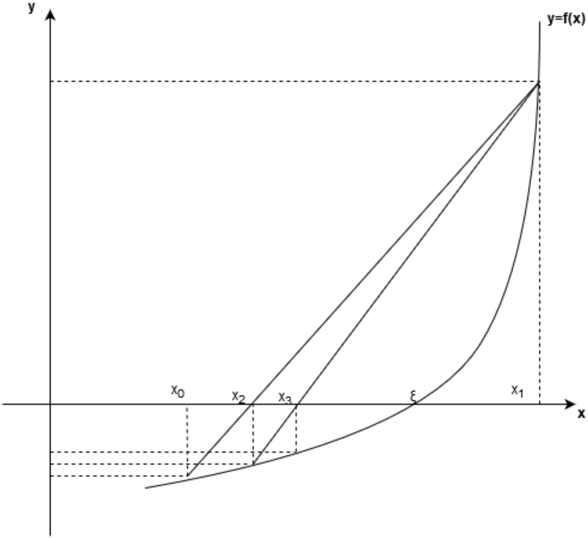
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ισοδύναμα, γράφεται:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου της Τέμνουσας.

Περιγραφή



Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα

Έστω ξ μια λύση της συνάρτησης f και έστω $(a, b) \subset \mathbb{R}$, και επιπλέον, $\xi \in (a, b)$, $f \in C^2(a, b)$, $f'(x^*) \neq 0$ και $f''(x^*) \neq 0$. Τότε, υπάρχει ένα διάστημα, έστω Δ, που περιέχει τη λύση ξ, τέτοιο ώστε για κάθε προσέγγιση $x_0, x_1 \in \Delta$ και για $x_0 \neq x_1$, η ακολουθία των σημείων $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ που επιστρέφει η μέθοδος της Τέμνουσας συγκλίνει στη λύση ξ με ταχύτητα σύγκλησης τάξεως $(1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.62$

Αλγόριθμος υλοποίησης

1. Δίνουμε στον αλγόριθμο τους πόρους που χρειάζεται για να εκκινήσει η διαδικασία: Είσοδος $= \{f, \varepsilon, x_0, x_1 max\}$
2. Θέτουμε $i = 0$, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$ και ακολούθως πηγαίνουμε στο βήμα 3.
3. Κάνε το i ίσο με $i + 1$ και πήγαινε στο βήμα 4.
4. Αν $i > max$ ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς θέτουμε $\xi = x_1 - f_1 \dfrac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}$ και πήγαινε στο βήμα 5.
5. Ελέγχουμε αν $|\xi - x_1| < \varepsilon$. Αν ισχύει, ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει την Έξοδο στο βήμα 6, αλλιώς θέσε $x_0 = x_1$, $f_0 = f_1$, $x_1 = \xi$, $f_1 = f(\xi)$ και πήγαινε στο βήμα 3.
6. Δώσε την έξοδο του αλγορίθμου: Έξοδος $= \{i, x_i, f(x_i)\}$

Κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου

- Τυπικά δε θα ελέγχουμε εάν $f(x_i) = 0$.
- Αντί αυτού του ελέγχου, εφόσον ζητείται συγκεκριμένη ακρίβεια ε, μπορούμε να ελέγχουμε ένα από τα ακόλουθα κριτήρια:
  1. $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$
  2. $|f(x_i)| < \varepsilon$
  3. $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon$

Προσοχή

Από τα παραπάνω κριτήρια το τρίτο, του απόλύτου σχετικού σφάλματος θεωρείται πιο αξιόπιστο, καθώς υπάρχουν ακολουθίες σημείων που πληρούν τα κριτήρια 1. και 2. αλλά οι ακολουθίες αποκλίνουν.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

- Η μέθοδος παρουσιάζει προβλήματα σύγκλισης ανάλογα με αυτά της μεθόδου των Newton-Raphson.
- Η ταχύτητα σύγκλισης είναι ταχύτερη από αυτή της διχοτόμησης αλλά μικρότερη από αυτή της μεθόδου Newton-Raphson.
- Στην πράξη χρησιμοποιείται συχνότερα λόγω της αποφυγής υπολογισμούς της παραγώγου.
- Χρειάζεται δύο αρχικές προσεγγίσεις για την εκκίνηση του επαναληπτικού σχήματος.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία μέθοδο που προέκυψε με τη βοήθεια της μεθόδου των Newton-Raphson.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία μέθοδο που προέκυψε με τη βοήθεια της μεθόδου των Newton-Raphson.
2. Αντικαθιστά τη δαπανηρή πληροφορία της παραγώγου με μία προσέγγισή της.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία μέθοδο που προέκυψε με τη βοήθεια της μεθόδου των Newton-Raphson.
2. Αντικαθιστά τη δαπανηρή πληροφορία της παραγώγου με μία προσέγγισή της.
3. Η σύγκλισή της είναι ταχύτερη από αυτή της διχοτόμησης.

Συμπερασματικά...

1. Πρόκειται για μία μέθοδο που προέκυψε με τη βοήθεια της μεθόδου των Newton-Raphson.
2. Αντικαθιστά τη δαπανηρή πληροφορία της παραγώγου με μία προσέγγισή της.
3. Η σύγκλισή της είναι ταχύτερη από αυτή της διχοτόμησης.
4. Είναι εύκολα υλοποιήσιμη και αξιοποιείται επίσης, για τον υπολογισμό μιγαδικών λύσεων.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

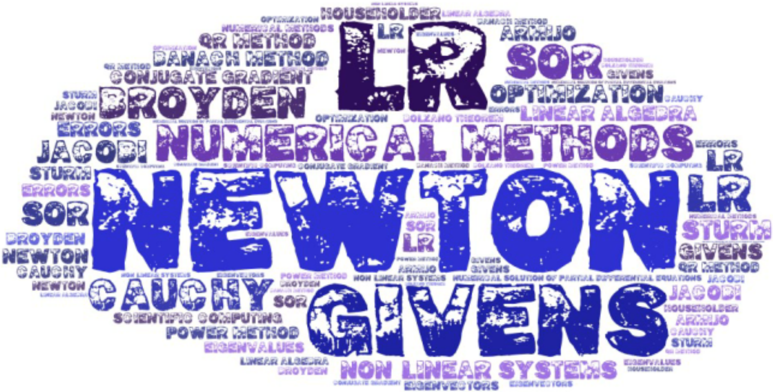
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ