Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 2ο Μάθημα
Τρίτη 10 Οκτωβρίου 2023

Ορισμός
Ως **στοχαστική διεργασία (Stochastic Process) (ή διαδικασία ή ανέλιξη)** ορίζεται να είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που ταξινομούνται με δείκτες μέσα από κάποιο μαθηματικό σύνολο T, υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Τη συμβολίζουμε με {X(t), t ϵ T} ή $\{X_t, t \in T\}$. Το σύνολο μέσα στο οποίο λαμβάνουν τιμές οι X_t, συνήθως συμβολίζεται με S (states).

1. Αναγνώριση είδους Διεργασίας.
Θεωρείστε τις παρακάτω στοχαστικές διεργασίες $\{X_t, t \in T\}$

- X_n: Η θέση του ψύλλου στο παράδειγμα του 1ου μαθήματος.
- X_n: Το πλήθος των παιδιών μίας οικογένειας το n – οστό έτος ενός ζεύγους.
- X_n: Το βάρος ενός βρέφους τη n – οστή ημέρα της ζωής του.
- X_t: Το πλήθος των γκολ σε έναν αγώνα στη χρονική στιγμή t από την έναρξη του αγώνα.
- X_t: Η διαφορά δυναμικού ενός πυκνωτή τη χρονική στιγμή t.

Σχολιάστε τα παραπάνω παραδείγματα ως προς το είδος του συνόλου των δεικτών καθώς και το είδος των τιμών που οι ΤΜ λαμβάνουν.
Αν T υποσύνολο του N, τότε η {X(n), n ϵ T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία διακριτού χρόνου** (ή τυχαία ακολουθία).
Αν T υποσύνολο του R, τότε η {X(t), t ϵ T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία συνεχούς χρόνου**.
Αν S υποσύνολο του N, τότε η {X(t), t ϵ T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία διακριτών τιμών** ή απλά **διακριτή**.
Αν S υποσύνολο του R, τότε η {X(t), t ϵ T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία συνεχών τιμών** ή απλά **συνεχής**.
Αν το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τ.μ. είναι διανύσματα αριθμών τότε η {X(t), t ϵ T} ονομάζεται **διανυσματική στοχαστική διεργασία**.

2. Χρήσιμοι ορισμοί για δύο (ή περισσότερες) τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 2.1 (κοινή συνάρτηση κατανομής)
Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με κατανομές F_X, F_Y. Η κοινή συνάρτηση κατανομής (joint cumulative distribution function ή joint cdf) των X, Y είναι η συνάρτηση $F_{X,Y}$: R x R → [0, 1] που ορίζεται ως εξής: $\mathbf{F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x, Y \le y).}$

Ορισμός (κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας)
Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με συναρτήσεις μάζας πιθανότητας f_X, f_Y. Η κοινή συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας (joint probability mass function ή joint pmf ή joint density) των X, Y είναι η συνάρτηση $f_{X,Y}$: R x R → [0, 1], που ορίζεται ως εξής:

- Αν οι X, Y είναι διακριτές, τότε
$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$
- Αν οι X, Y είναι συνεχείς, τότε
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης πιθανότητας
Η κ.σ.π. ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

1) $0 \le f_{X,Y}(x, y) \le 1$
2) $\Sigma_x \Sigma_y f_{X,Y}(x, y) = 1$ (διακριτές ΤΜ) ή $\int_R \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$ (συνεχείς ΤΜ).

Ορισμός 2.2
Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, λέγονται **ισόνομες** όταν $F_X = F_Y$, ή $P(X \le \kappa) = P(Y \le \kappa)$, $\kappa \in R$.

Ορισμός 2.3
Δύο τ. μ. λέγονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητες** αν τα ενδεχόμενα $\{X = x\}$ και $\{Y = y\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους για κάθε $x, y \in R$. Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε τα ενδεχόμενα $\{X = x\}$ και $\{Y = y\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ισχύει

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Δραστηριότητα
Σχολιάστε τη μορφή της κοινής συνάρτησης κατανομής για 2 ανεξάρτητες ΤΜ.

Άσκηση εμπέδωσης 1
Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες U(0,1) τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$.

Άσκηση εμπέδωσης 2
Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$ για τις τυχαίες μεταβλητές του πίνακα.

X / Y	0	1	2	3
0	1/8	1/8	0	0
1	0	2/8	2/8	0
2	0	0	1/8	1/8

Ορισμός (Περιθώρια και δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας)
Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι δυνατόν να ανακτηθεί η **περιθώρια (marginal) συνάρτηση πιθανότητας** των δύο επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

- $f_X(x) = \Sigma_y f_{X,Y}(x, y)$, $f_Y(x) = \Sigma_x f_{X,Y}(x, y)$ (διακριτή περίπτωση)
- $f_X(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dy$ $f_Y(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dx$ (συνεχής περίπτωση)

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας, είναι δυνατόν να οριστεί και η **δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (ή πυκνότητας πιθανότητας) της X δοθέντος του Y = y, ως εξής:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y)$$

Παρατήρηση
Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, μπορεί να είναι ισόνομες αλλά όχι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα
Σε ένα σάκο υπάρχουν 2 μπάλες, μία με τον αριθμό 0 και μία με τον αριθμό 1. Εκτελούμε πείραμα με δύο επιλογές μπάλας και ορίζουμε να είναι
X: Ο αριθμός της μπάλας στην $1^η$ επιλογή και
Y: Ο αριθμός της μπάλας στη $2^η$ επιλογή.

Αν η δειγματοληψία γίνει με επανάθεση τότε {XY} = Ω = {00, 01, 10, 11} και υπολογίζουμε P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 2/4 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και ανεξάρτητες.

Αν ωστόσο η δειγματοληψία γίνει χωρίς επανάθεση, τότε {XY} = Ω = {01, 10} και υπολογίζουμε P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και εξαρτημένες.

Άσκηση (Ανεξάρτητες και Ισόνομες Τυχαίες Μεταβλητές)
Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές:
Μεταβλητή: X_n = {ο αριθμός που δείχνει το ζάρι στη n – οστή ρίψη}
Μεταβλητή: Z_n = {το άθροισμα των αριθμών έως και τη n – οστή ρίψη}
α) Πως εκφράζεται η Z_n συναρτήσει των X_n;
β) Είναι η $\{Z_n, n \in N\}$ μία στοχαστική διεργασία;
γ) Είναι οι μεταβλητές X_n, n ϵ N, ανεξάρτητες και ισόνομες;
δ) Είναι οι μεταβλητές Z_n, n ϵ N, ανεξάρτητες και ισόνομες;

3. Δραστηριότητα εξοικείωσης με τη διαφορά Τυχαίων Μεταβλητών
Έστω οι ΤΜ X και Y, που αντιπροσωπεύουν τον αριθμό Κ και Γ που παίρνουμε όταν ρίχνουμε δύο νομίσματα. Ορίζουμε τη διαφορά των X, Y ως μια νέα ΤΜ Z, ως: Z = X – Y.
(α) Βρείτε την κατανομή των X, Y, Z.
Υπόδειξη: Κάντε έναν πίνακα.
(β) Είναι οι X, Y ισόνομες;
(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
(δ) Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές και τις διακυμάνσεις των X, Y, Z.
(ε) Βρείτε την πιθανότητα να έρθουν περισσότερα Κ από Γ.
(στ) Βρείτε την μέση διαφορά Κ και Γ.

4. Ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις Στοχαστικής Διεργασίας

Ορισμός 4.1 (Independent Increments)
Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη {X(t), t ϵ T} έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** όταν για κάθε n και για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, τέτοια ώστε $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι προσαυξήσεις

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 4.2 (Stationary Increments)
Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη {X(t), t ϵ T} έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** όταν για κάθε κ > 0 και κάθε s > 0,

η τ.μ. $X_{κ+s} - X_κ$ είναι ισόνομη με την $X_s - X_0$

(δηλαδή η προσαύξηση μεταξύ δύο στιγμών της διεργασίας εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών s και όχι από το “που” κ).

Σημείωση

Η στασιμότητα των προσαυξήσεων είναι μία πολύ ισχυρή συνθήκη. Ειδικότερα, ισχύει $E(X_{\kappa+s} - X_\kappa) = E(X_s - X_0)$ και $Var(X_{\kappa+s} - X_\kappa) = Var(X_s - X_0)$

Άσκηση (Ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις)

Δίνεται η στοχαστική διεργασία (τυχαίος περίπατος) $\{W_n, n \in N\}$, όπου $W_n = X_1 + \ldots + X_n$, και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ. Να δείξετε ότι η $\{W_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Σημείωση

Εάν οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε οι X + Y, Z είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://math.stackexchange.com/questions/1791404/if-x-y-z-are-independent-random-variables-then-x-y-z-are-independent-rando

Άσκηση (Ανεξάρτητες και μη στάσιμες προσαυξήσεις)

Δίνεται η Στοχαστική Διεργασία $\{W_n, n \in N\}$, όπου $W_n = X_1 + \ldots + X_n$, και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και μη ισόνομες τ.μ.

Να δείξετε ότι:

(α) η $\{W_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(β) η $\{W_n, n \in N\}$ δεν έχει στάσιμες προσαυξήσεις

Υπόδειξη: $Var(W_n - W_{n-1}) = Var(X_n)$.

Άσκηση (Εξαρτημένες και στάσιμες προσαυξήσεις)

Έστω N_t = {πλήθος αφίξεων στο διάστημα (0, t]}, $t \geq 0$, μία διεργασία Poisson(λ) (η οποία είναι γνωστό ότι έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πως $N_0 = 0$). Ορίζουμε τη διεργασία συνεχούς χρόνου $\{W_t, t \geq 0\}$ όπου $W_t = [t]N_1 + N_t$. Να δείξετε ότι η $\{W_t, t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και μη ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι (α) $W_{t+\delta} - W_t = W_\delta - W_0$, (β) $W_2 - W_1 \neq W_1 - W_0$

Άσκηση στις στάσιμες προσαυξήσεις

Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μία στοχαστική διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $X_0 = 0$. Να δείξετε ότι: $E(X_n) = n \cdot \mu_1$, όπου $\mu_1 = E(X_1)$.

5. Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Ορισμός 5.1

Τα ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος Γ**, όταν

$$P(B \mid A \cap \Gamma) = P(B \mid \Gamma)$$

Άσκηση (A, B ανεξάρτητα | Γ, τότε δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητα μεταξύ τους).

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ και $Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_1 + X_2$, $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Θεωρούμε τα γεγονότα $A = \{X_1 = 2\}$, $B = \{Z_3 = 3\}$.

(α) Δείξτε ότι τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις $P(B \mid A)$, $P(B)$.

(β) Αν $\Gamma = \{Z_2 = 2\} = \{X_1 + X_2 = 2\}$, δείξτε ότι τα A και B ανεξάρτητα γεγονότα δεδομένου του γεγονότος Γ.

Ορισμός 5.2 (Μαρκοβιανή Διαδικασία)
Λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, με χώρο καταστάσεων S, ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή Ιδιότητα**, όταν για κάθε $t \in T$ και $s, u > 0$, οι τ.μ. X_{t+s} και X_{t-u} είναι ανεξάρτητες δεδομένου του γεγονότος $\{X_t = x\}$, $x \in S$. Στην περίπτωση αυτή, η διεργασία λέγεται **Μαρκοβιανή Διαδικασία**.

Με απλά λόγια: Αν γνωρίζουμε το παρόν $\{X_t = x_0\}$, η εκτίμηση της πιθανότητας ενός μελλοντικού γεγονότος $\{X_{t+s} = x_2\}$, $s > 0$, δεν επηρεάζεται από οποιαδήποτε τιμή x_1 είχε πάρει η διεργασία στο παρελθόν X_{t-u}, $u > 0$.

Ορισμός 5.3 (Μαρκοβιανή Αλυσίδα)
Μαρκοβιανή Αλυσίδα ονομάζεται κάθε Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X_n, n \in N\}$ ή $\{X(t), t \geq 0\}$, που λαμβάνει αποκλειστικά διακεκριμένες τιμές $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, $(\text{card}(S) \leq \text{card}(N))$.

Η Μαρκοβιανή ιδιότητα παίρνει μία πιο απλή μορφή για μία μαρκοβιανή αλυσίδα.

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$
Για κάθε $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S$, είναι

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$
Για κάθε $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S$, και για κάθε χρονικές στιγμές $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \geq 0$, είναι

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n)$$

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα (Κριτήριο)
Κάθε διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μία Μαρκοβιανή διεργασία.

Αυτός είναι και ένας τρόπος για να δειχθεί έμμεσα πως μία διεργασία είναι Μαρκοβιανή!

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μία Μαρκοβιανή διεργασία δεν έχει απαραίτητα ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επιπλέον, δεν υπάρχει άμεση συσχέτιση με το χαρακτηριστικό των στάσιμων προσαυξήσεων.
Σημείωση Μία απόδειξη του κριτηρίου μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/35899/relation-between-independent-increments-and-markov-property
Ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής χωρίς ανεξάρτητες προσαυξήσεις μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/256454/when-is-a-markov-process-independent-increment

Παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας
Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ορίζουμε Z_n = {το άθροισμα των αριθμών έως και τη n – οστή ρίψη}. Δείξτε ότι η $\{Z_n, n \in N\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

Παράδειγμα Μη Μαρκοβιανής αλυσίδας
Έστω X_n, $n = 1, 2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με κατανομή $B(1, ½)$ (δηλαδή $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = ½$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$). Αν

$$Y_n = (X_n + X_{n-1}) / 2,$$

ο κινούμενος μέσος όρος της $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ τότε να δείξετε ότι η $\{Y_n, n = 2, 3, \ldots\}$, *δεν* είναι μία διεργασία Markov.
Υπόδειξη: Υπολογίστε τις $P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = ½)$, $P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = ½, Y_{n-2} = 0)$.

Ιδιότητα Μαρκοβιανής αλυσίδας
(α) Δείξτε ότι $P(A_3 A_2 | A_1) = P(A_3 | A_2 A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$.
(β) Αποδείξτε αναδρομικά, πως για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_n A_{n-1} \ldots A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_2 A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_{n-1} \ldots A_2 A_1)$$

(γ) Δείξτε ότι αν $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα, τότε

$$\mathbf{P(X_n = i_n, \ldots, X_2 = i_2, X_1 = i_1 | X_0 = i_0) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \ldots \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ορισμός (πιθανότητες μετάβασης)
Αν $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑΔΧ) που λαμβάνει ακέραιες τιμές, S το διακεκριμένο σύνολο τιμών και i, j Є S, τότε συμβολίζουμε

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j | X_m = i)}$$

Οι πιθανότητες $p^{(n)}_{ij}$ ονομάζονται **πιθανότητες μετάβασης βήματος n** (n-step transition probabilities).

Δραστηριότητα
Ξαναγράψτε τον τύπο (1) σε όρους πιθανοτήτων μετάβασης p_{ij}.

Ορισμός (Ομογενής ΜΑΔΧ)
Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ονομάζεται ομογενής όταν για κάθε m = 1, 2, …, είναι

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i).}$$

Παράδειγμα
Αν X_i є {0, 1}, $X_i \sim$ Bernoulli(p), i ≥ 0, ανεξάρτητες μεταξύ τους και $W_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, τότε
(α) Να δείξετε ότι η $\{W_n, n \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα.
(β) Να καταγράψετε τον πίνακα μετάβασης P.

Λύση
Καθώς, σε κάθε βήμα η W_n αυξάνει κατά 1 με πιθανότητα p και μένει στάσιμη με πιθανότητα 1 – p, συνάγουμε ότι $p_{0,0} = 1 - p$, $p_{0,1} = p$, $p_{1,1} = 1 - p$, $p_{1,2} = p$ και γενικότερα $p_{i,i} = 1 - p$, $p_{i,i+1} = p$, i ≥ 0, ενώ όλοι οι άλλοι συνδυασμοί δεικτών έχουν πιθανότητα 0. Συνεπώς, ο στοχαστικός πίνακας που της αντιστοιχεί είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{bmatrix}$$