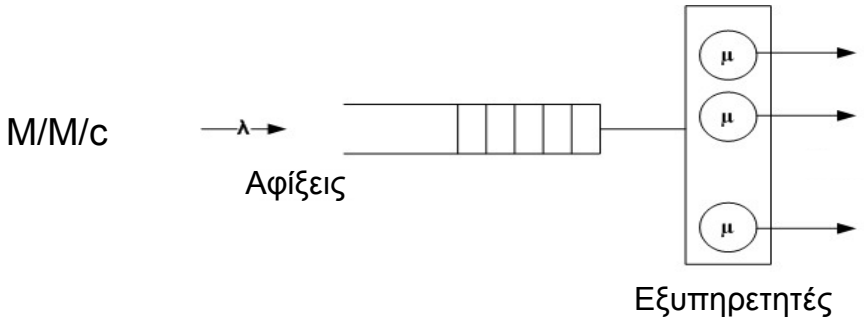
Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 10ο Μάθημα

Τρίτη 12 Δεκεμβρίου 2023

14. Ουρές αναμονής



Η θεωρία των ουρών αποσκοπεί στην κατασκευή ενός μοντέλου με το οποίο μπορεί να προβλεφθεί το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής όσων βρίσκονται στην ουρά.

Η θεωρία ουρών θεωρείται κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας, επειδή τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται συχνά κατά τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με τους πόρους που απαιτούνται για την παροχή μιας υπηρεσίας. Ωστόσο, βρίσκει εφαρμογές σε πολλά διαφορετικά πεδία όπως στα δίκτυα υπολογιστών.

Οι ουρές αναμονής περιγράφονται με μία σειρά χαρακτήρων που δηλώνουν τα χαρακτηριστικά τους και χωρίζονται με κάθετες μεταξύ τους. Ο τρόπος αυτός καταγραφής προτάθηκε από τον D. G. Kendall το 1953 και έκτοτε καθιερώθηκε.

Σύμφωνα με την περιγραφή κατά Kendall (Kendall notation) ένα μοντέλο ουράς, περιγράφεται με τρεις χαρακτήρες γραμμένους στη μορφή A/S/c, όπου

- το A (arrivals) υποδηλώνει το χρόνο μεταξύ των αφίξεων στην ουρά,
- το S (service) την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης και
- το c (channels) τον αριθμό των καναλιών υπηρεσίας που ανοίγουν στον κόμβο.

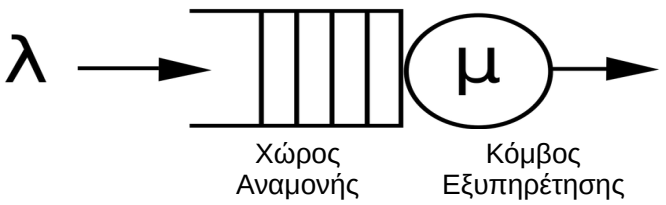
Αργότερα, ο τρόπος περιγραφής μίας ουράς κατά Kendall επεκτάθηκε στη μορφή A/S/c/K/N/D όπου K είναι η χωρητικότητα της ουράς, N είναι το μέγεθος του πληθυσμού των θέσεων εργασίας που πρέπει να εξυπηρετηθούν και D είναι ο τρόπος με τον οποίο εξυπηρετείται η ουρά (FIFO, LIFO κλπ).

Ο πρώτος χαρακτήρας σε μία ουρά, περιγράφει τη διαδικασία άφιξης στην ουρά.

- Το M σημαίνει έλλειψη μνήμης (memoryless) και σημαίνει μια διαδικασία άφιξης Poisson.
- Το D σημαίνει ντετερμινιστικό και σημαίνει ότι το διάστημα μεταξύ αφίξεων είναι σταθερό και μη τυχαίο.
- Το G σημαίνει γενική κατανομή μεταξύ αφίξεων.

Ο δεύτερος χαρακτήρας περιγράφει τη διαδικασία εξυπηρέτησης. Χρησιμοποιούνται τα ίδια γράμματα, με το M να αντιστοιχεί μια εκθετική κατανομή χρόνου υπηρεσίας.

14.1 Η ουρά αναμονής M/M/1



Στην ουρά αναμονής M/M/1, οι αφίξεις (πρώτο M στο M/M/1) πραγματοποιούνται **με ρυθμό λ** σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson.

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (δεύτερο M στο M/M/1) έχουν εκθετική κατανομή **με ρυθμό μ** στην ουρά M/M/1, όπου 1/μ είναι ο μέσος χρόνος υπηρεσίας.

Οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με την Poisson κατανομή με παράμετρο λ. Άρα, τα διαστήματα μεταξύ αφίξεων θα ακολουθούν την Exp(λ). Καθώς η αναμενόμενη τιμή της εκθετικής κατανομής είναι η 1/λ συμπεραίνουμε ότι **αναμένεται μία άφιξη κάθε 1/λ χρονικές μονάδες**. Αντίστοιχα, καθώς η εξυπηρέτηση των πελατών συμβαίνει με κατανομή Exp(μ) συμπεραίνουμε ότι **αναμένεται μία εξυπηρέτηση κάθε 1/μ χρονικές μονάδες.**

Ο λόγος

$$\rho = \frac{\text{αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης}}{\text{αναμενόμενος χρόνος μεταξύ δύο αφίξεων}} = \frac{(1/\mu)}{(1/\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

αναπαριστά το ρυθμό αξιοποίησης των δυνατοτήτων εξυπηρέτησης. Αναφέρεται και ως **ένταση φορτίου** ή ως **συντελεστής απασχόλησης**.

Αν ρ = λ / μ > 1, οι αφίξεις (χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων Exp(λ)) συμβαίνουν με ρυθμό που δεν μπορεί να καλυφθεί από τη δυνατότητα εξυπηρέτησης (χρόνος μεταξύ διαδοχικών εξυπηρετήσεων Exp(μ)). Στην περίπτωση αυτή η ουρά θα μεγαλώνει απεριόριστα, όπως και ο χρόνος αναμονής. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ασταθές**. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με **ευσταθείς ουρές**, δηλαδή ουρές για τις οποίες

$$\boldsymbol{\rho = \lambda / \mu < 1.}$$

Κάθε ένας εξυπηρετητής, εξυπηρετεί έναν πελάτη κάθε φορά, σύμφωνα με τον κανόνα “ο πρώτος που έρχεται είναι ο πρώτος που εξυπηρετείται” (First In First Out - FIFO).

Όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση, ο πελάτης φεύγει από την ουρά και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μειώνεται κατά έναν. Επιπλέον, δεν υπάρχει όριο στον αριθμό των πελατών που μπορεί να αφιχθούν και να εξυπηρετηθούν, ούτε στον αριθμό ατόμων που περιμένουν να εξυπηρετηθούν.

Σημείωση
Αν μ = λ, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, με την πρώτη άφιξη, ξεκινάνε να μετράνε ταυτόχρονα δύο χρονόμετρα: το χρονόμετρο της επόμενης άφιξης και το χρονόμετρο της πρώτης εξυπηρέτησης. Για να επανέλθει το σύστημα στην αρχική κατάσταση (X(t) = 0) πρέπει η εξυπηρέτηση να γίνει πιο γρήγορα από την επόμενη άφιξη, το οποίο όμως συμβαίνει μόνο με 50% πιθανότητα, ενώ με επίσης 50% πιθανότητα θα συμβεί και επόμενη άφιξη πριν την προηγούμενη αποχώρηση.

Έτσι, μετά από λίγο είναι σίγουρο ότι θα υπάρχει ένας μη εξυπηρετούμενος πελάτης στην ουρά και ένας που θα εξυπηρετείται. Μετά τη δεύτερη άφιξη, λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα «έλλειψης μνήμης» των εμπλεκόμενων εκθετικών κατανομών, υπάρχει και πάλι 50% πιθανότητα να φτάσει άλλος πελάτης πριν φύγει ο προηγούμενος πελάτης. Συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των πελατών στο σύστημα μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος με μια αντίστοιχη πιθανότητα αρκετά μεγάλη ώστε να διασφαλίζεται ότι η αναμενόμενη τιμή συγκλίνει στο άπειρο με το χρόνο.

Σημείωση

Κατανομή X – Y, για X, Y ~ Exp(λ): https://math.stackexchange.com/questions/115022/pdf-of-the-difference-of-two-exponentially-distributed-random-variables

14.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ)

Μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου {X(t), t ≥ 0} (ΜΑΣΧ), X(t) ϵ S, είναι ένα σύστημα όπου:

(α) Το σύστημα παραμένει σε κάθε μία κατάσταση για χρόνο Exp(λ_i) κατανομή, i ϵ S.

(β) Το σύστημα τηρεί η Μαρκοβιανή Ιδιότητα στη συνεχή της εκδοχή:

Για κάθε $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, είναι

$$P(X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_1) = i_1) = P(X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n)=i).$$

(γ) Η αλυσίδα είναι ομογενής ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$P(X(s + t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),\ s, t \ge 0.$$

Ο πίνακας μετάβασης μίας ΜΑΣΧ είναι συνάρτηση του χρόνου. Ενδεικτικά, αν S = {1, 2, …, n}, γράφουμε

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

όπου $p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$, s, t ≥ 0.

Καθώς, ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i ϵ S ακολουθεί την Exp(λ_i) κατανομή, συμπεραίνουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στην κατάσταση i είναι $1/\lambda_i$. Ειδικότερα, αν η κατάσταση i είναι απορροφητική τότε $\lambda_i = 0$.

Για κάθε μία ΜΑΣΧ ορίζεται μία ενσωματωμένη αλυσίδα μετάβασης (η οποία είναι ΜΑΔΧ) η οποία περιγράφει τη μετάβαση μεταξύ των καταστάσεων της ΜΑΣΧ. Καθώς, δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε πως η αλυσίδα μεταβαίνει στην ίδια κατάσταση κάποια χρονική στιγμή (για να παρατηρηθεί αυτό το φαινόμενο πρέπει να έχει προηγηθεί μετάβαση σε κάποια γειτονική κατάσταση), προκύπτει πως για την ενσωματωμένη ΜΑΔΧ είναι $p_{ii} = 0$, για όλες τις μη απορροφητικές καταστάσεις i ϵ S.

Παράδειγμα

Έστω μια ΜΑΣΧ με S = {0, 1} και παραμέτρους χρόνου παραμονής $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$.

(α) Να περιγραφεί η ενσωματωμένη ΜΑΔΧ (χώρος καταστάσεων, πίνακας μετάβασης, διάγραμμα καταστάσεων).

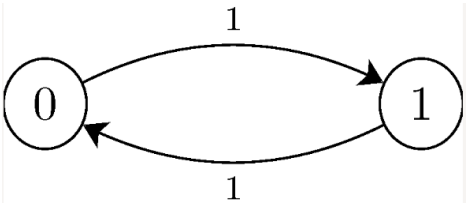
(β) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P(t) της ΜΑΣΧ.

Λύση

(α) Η ενσωματωμένη ΜΑΔΧ κληρονομεί από τη ΜΑΣΧ το χώρο καταστάσεων S = {0, 1}. Ο πίνακας μετάβασης της ΜΑΔΧ είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και το διάγραμμα καταστάσεων είναι το:



(β) Αρκεί να βρούμε τις πιθανότητες

$p_{00}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0)$, $p_{01}(t) = P(X(t) = 1 \mid X(0) = 0)$

$p_{10}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 1)$, $p_{11}(t) = P(X(t) = 1 \mid X(0) = 1)$

Αν X(0) = 0, τότε για να είναι X(t) = 0, αρκεί να έχουν γίνει μεταβάσεις οποιουδήποτε πλήθους της μορφής 0 → 1 → 0.

Ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση 0 είναι Exp(λ), άρα παραμένει στην κατάσταση αυτή για αναμενόμενο χρόνο 1/λ, ή ισοδύναμα αναμένονται λ αναχωρήσεις από τη 0 στη μονάδα του χρόνου ή λt αναχωρήσεις στο διάστημα (0, t]. Καθώς η μόνη πιθανή διέξοδος από την κατάσταση 0 είναι η κατάσταση 1, συμπεραίνουμε ότι οι μεταβάσεις 0 → 1 στο διάστημα (0, t] είναι Poisson(λt) μεταβλητή.

Αντίστοιχα, οι μεταβάσεις 1 → 0 είναι ομοίως Poisson(λt) μεταβλητή (είναι σημαντικό πως $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$ – αν ήταν $\lambda_0 \neq \lambda_1$ τότε το πρόβλημα θα ήταν πιο περίπλοκο!).

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως η πιθανότητα της διαδρομής 0 → 1 → 0 σε οποιοδήποτε πλήθος βημάτων είναι η πιθανότητα να υπάρχουν άρτιου πλήθους αφίξεις σε *μία* διεργασία Poisson(λt). Αντίστοιχα, υπολογίζουμε:

$p_{00}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0)$

$= P(\{\text{Αφίξεις} = 2n, \text{ όπου Αφίξεις} \sim \text{Poisson}(\lambda t)\})$

$= \Sigma_{n\geq 0}\, e^{-\lambda t} (\lambda t)^{2n} / (2n)!$ (από ορισμό κατανομής Poisson)

$= e^{-\lambda t}\, \Sigma_{n\geq 0} (\lambda t)^{2n} / (2n)!$

$= e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t)$

$= e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) / 2$

$= ½ + ½\, e^{-2\lambda t}$.

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$p_{01}(t) = 1 – p_{00}(t) =$

$= ½ – ½\, e^{-2\lambda t}$.

Από τη συμμετρία των καταστάσεων, ανάλογα βρίσκουμε:

$p_{11}(t) = p_{00}(t) = ½ + ½\, e^{-2\lambda t}$,

$p_{10}(t) = p_{01}(t) = ½ – ½\, e^{-2\lambda t}$.

Συμπεραίνουμε, ότι ο πίνακας μετάβασης της ΜΑΣΧ είναι ο

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα

Αν P(t) είναι ο πίνακας μετάβασης μίας ΜΑΣΧ, τότε

(α) P(0) = I (για κάθε i, j ϵ S, $p_{ii}(0) = 1$ και $p_{ij}(0) = 0$, $i \neq j$).

(β) Οι γραμμές έχουν άθροισμα 1.

(γ) P(t + s) = P(t)P(s) (Εξισώσεις Chapman – Kolmogorov).

Απόδειξη

(α), (β): Προφανή

(γ) Η απόδειξη του (γ) είναι ανάλογη της διακριτής περίπτωσης. Πράγματι, για κάθε i, j ϵ S, είναι:

$p_{ij}(s + t) = P(X(s + t) = j \mid X(0) = i)$

$= \Sigma_{k\epsilon S} P(X(s) = k \mid X(0) = i) \cdot P(X(s + t) = j \mid X(s) = k)$

$= \Sigma_{k\epsilon S} p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(st), s, t \geq 0.$

Ορισμός (Οριακή κατανομή ΜΑΣΧ)

Έστω X(t) μια ΜΑΣΧ με πίνακα μετάβασης P(t) και χώρο κατάστασης S={0,1,2,⋯}. Μια κατανομή πιθανότητας $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots]$, $\pi_i \in [0,1]$, $\sum_{i \in S}\pi_i = 1$, ονομάζεται οριακή κατανομή για τη X(t) εάν

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = i \mid X(0) = j), \text{ για κάθε } j \epsilon S.$$

Ορισμός (Στάσιμη κατανομή ΜΑΣΧ)

Έστω X(t) μια ΜΑΣΧ με πίνακα μετάβασης P(t) και χώρο κατάστασης S={0,1,2,⋯}. Μια κατανομή πιθανότητας $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots]$, $\pi_i \in [0,1]$, $\sum_{i \in S}\pi_i = 1$, ονομάζεται στάσιμη κατανομή για τη X(t) εάν

$$\pi = \pi P(t), t \geq 0.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η οριακή και η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχουν) για το τελευταίο παράδειγμα ΜΑΣΧ.

Ο υπολογισμός της οριακής κατανομής μίας ΜΑΣΧ, ορισμένες φορές μπορεί να γίνει μέσα από την αντίστοιχη ενσωματωμένη ΜΑΔΧ. Προς αυτήν την κατεύθυνση, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω {X(t), t ≥ 0} μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ), της οποίας η αντίστοιχη Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ) είναι αδιαχώριστη και επαναληπτική (δηλαδή το σύστημα αν βρεθεί σε μία κατάσταση, τότε επιστρέφει σε αυστή στο μέλλον με θετική πιθανότητα).

Αν $p = [p_0, p_1, p_2, ...]$ είναι η στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, είναι οι ρυθμοί μετάβασης από τις καταστάσεις 0, 1, .., και $\Lambda = \Sigma_{k\epsilon S} p_k/\lambda_k < +\infty$, τότε

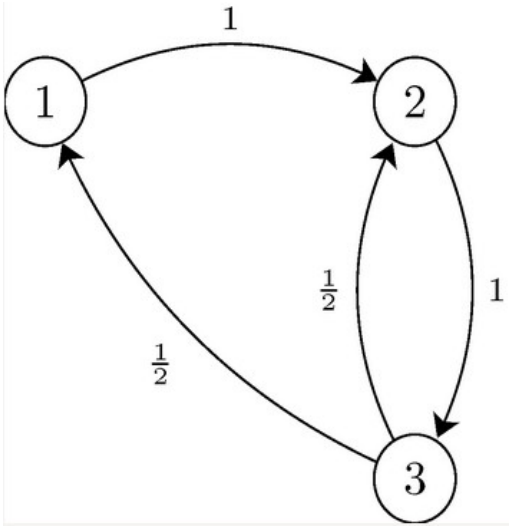
$$\boldsymbol{\pi = [\Lambda p_0/\lambda_0, \Lambda p_1/\lambda_1, \Lambda p_2/\lambda_2, \ldots]}$$

είναι η στάσιμη κατανομή της ΜΑΣΧ, δηλαδή

$$\boldsymbol{\lim_{t \to \infty} P(X(t) = j \mid X(0) = i) = \Lambda p_j/\lambda_j}$$

Παράδειγμα

Για μία ΜΑΣΧ με S = {1, 2, 3} γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ και πως το διάγραμμα της αντίστοιχης ενσωματωμένης ΜΑΔΧ είναι το εξής:



Να βρεθεί η οριακή κατανομή της ΜΑΣΧ (αν υπάρχει).

Λύση

Η αντίστοιχη ΜΑΔΧ είναι αδιαχώριστη και έχει πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε πως η στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ είναι η

$$p = 1/5\ [1, 2, 2].$$

Αντίστοιχα, υπολογίζουμε Λ = 1/2 + 2/1 + 2/3 =19/6 και

$$\pi = 1/19[3, 12, 4]$$

Σημείωση: Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου προέρχεται από την ιστοσελίδα: https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_3_1_introduction.php

Ο γεννήτορας πίνακας μίας ΜΑΣΧ

Έστω T_i ο χρόνος παραμονής του συστήματος στην κατάσταση i. Είναι

$$P(T_1 < \delta) = 1 - e^{-\lambda_i \delta} = 1 - (1 - \lambda_i \delta) + \delta \cdot o(\delta) = \lambda_i \delta + \delta \cdot o(\delta).$$

Καθώς, $P(T_i < \delta) = P(X(\delta) \neq i \mid X(0) = i)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_i = \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{P(T_1 < \delta)}{\delta} - o(\delta)\right] = \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{P(X(\delta) \neq i \mid X(0) = i)}{\delta}\right]$$

Συνεπώς, το λ_i, μεταφράζεται ως ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας το σύστημα να αλλάξει κατάσταση, αν βρίσκεται στην κατάσταση i ϵ S.

Ορισμός

Αν p_{ij}, είναι η πιθανότητα μετάβασης από τη i στη j, i ≠ j, τότε η ποσότητα $\mathbf{g_{ij} = \lambda_i p_{ij}}$ ονομάζεται **ρυθμός μετάβασης από την i στην j**. Επιπλέον, ορίζουμε

$$\begin{aligned} g_{ii} &= -\Sigma_{j\neq i}\, g_{ij} \\ &= -\Sigma_{j\neq i}\, \lambda_i \cdot p_{ij} \\ &= -\lambda_i\, \Sigma_{j\neq i}\, p_{ij} \\ &= -\lambda_i. \end{aligned}$$

Ορισμός

Για μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, **ο γεννήτορας πίνακας (generator matrix)**, ορίζεται να είναι ο πίνακας $G = [g_{ij}]_{ij\epsilon S}$, όπου

$$g_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij}, & i \neq j. \\ -\lambda_i, & i = j. \end{cases}$$

Θεώρημα

Για κάθε Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, ισχύουν οι εξής δύο εξισώσεις

- $P'(t) = P(t) \cdot G$ (forward equation)
- $P'(t) = G \cdot P(t)$ (backward equation)

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις αυτές είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις σχέσεις

- $p'_{ij}(t) = \Sigma_{k\epsilon S} p_{ik}(t) g_{kj}$, i, j ϵ S
- $p'_{ij}(t) = \Sigma_{k\epsilon S} g_{ik} p_{kj}(t)$, i, j ϵ S

Οι εξισώσεις προς τα εμπρός (forward) και προς τα πίσω (backward) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για να απαντηθούν ερωτήσεις που αφορούν μία αλυσίδα Markov.

Παράδειγμα

(α) Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G για το τελευταίο παράδειγμα.

(β) Να δειχθεί ότι P'(t) = G·P(t) = P(t)·G.

Λύση

Είναι $g_{01}(t) = \lambda_0 \cdot p_{01} = \lambda$, $g_{10}(t) = \lambda_1 \cdot p_{10} = \lambda$.

$g_{00}(t) = -\lambda_0 = -\lambda$, $g_{11}(t) = -\lambda_1 = \lambda$.

Συμπεραίνουμε ότι

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

(β) Εἶναι

$$P'(t) = \begin{bmatrix} -\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t} \\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t} \end{bmatrix}.$$

και

$$P(t) \cdot G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t} \\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} = P'(t)$$

$$G \cdot P(t) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t} \\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} = P'(t)$$

Συμπεραίνουμε, ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει.

Πρόταση

Αν G είναι ο γεννήτορας πίνακας μίας ΜΑΣΧ και P(t) ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και t, τότε

$$P(t) = e^{tG} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ως δυναμοσειρά, ο πίνακας e^{tG}, ικανοποιεί τη σχέση $(e^{tG})' = t\, e^{tG}$ και πως $e^{0G} = e^{O} = I$, άρα δεν μπορεί παρά να είναι ο πίνακας P(t) ο οποίος ικανοποιεί την ίδια αρχική συνθήκη (P(0) = I) και την ίδια διαφορική εξίσωση.

Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν εδώ:

https://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/312/ContinuousTime.pdf

Θεώρημα

Αν G είναι ο γεννήτορας πίνακας μίας ΜΑΣΧ X(t), τότε η κατανομή **π** αποτελεί στάσιμη κατανομή για την X(t), αν και μόνο αν

$$\pi G = O.$$

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι S = {1, 2, …, n}.

α) π στάσιμη → πG = O

Έστω $\pi = [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n]$ η στάσιμη κατανομή της X(t).Τότε πP(t) = π. Παραγωγίζοντας ως προς t, παίρνουμε

πP'(t) = O ή πGP(t) = O.

Για t = 0, παίρνουμε ότι πG = O που είναι το ζητούμενο.

β) πG = O → π στάσιμη

Αντίστροφα, αν πG = O, τότε πGP(t) = O, ή πP'(t) = O ή (πP(t))' = O ή πP(t) = C, όπου C ένας σταθερός πίνακας.

Όμως, για t = 0, C = πP(0) =πI = π και καταλήγουμε στο ότι πP(t) = π, δηλαδή ότι η π είναι η στάσιμη κατανομή της X(t).

Παράδειγμα

Να βρεθεί η οριακή κατανομή του τελευταίου παραδείγματος λύνοντας την πG = 0.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση $\pi \cdot G = [\pi_0, \pi_1] \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Από το αντίστοιχο 2x2 σύστημα

$$\pi_0(-\lambda) + \pi_1\lambda = 0$$

$$\pi_0 \lambda + \pi_1(-\lambda) = 0$$

βρίσκουμε $\pi_0 = \pi_1 = ½$.

Πρόταση

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$ και X, Y ανεξάρτητες τ.μ., τότε

(α) $Z = \min(X, Y) \sim Exp(\lambda + \mu)$.

(β) $P(X > Y) = \mu / (\lambda + \mu)$.

(γ) $P(X < Y) = \lambda / (\lambda + \mu)$.

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
P(Z > z) &= P(\min(X, Y) > z) \\
&= P(X > z, Y > z) \\
&= P(X > z)\, P(Y > z) \\
&= e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu z} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)z}
\end{aligned}
$$

Άρα, $P(Z \le z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$ και $Z \sim Exp(\lambda + \mu)$.

Άσκηση

Έστω η ουρά M/M/1 με ρυθμούς προσέλευσης και εξυπηρέτησης λ και μ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας $P(X(t) = i \mid X(0) = i)$ είναι ίσος με $-(\lambda + \mu)$.

Λύση

Αν X = {αφίξεις στο (0, t]} και Y = {αποχωρήσεις στο (0, t]} τότε $X \sim Poisson(\lambda t)$ και $Y \sim Poisson(\mu t)$.

Είναι $P(X(t) = i \mid X(0) = i) = \Sigma_{n = 0, 1,..} P(X = n, Y = n)$

$= \Sigma_{n = 0, 1,..} P(X = n)\, P(Y = n)$

$= \Sigma_{n = 0, 1,..} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!\; e^{-\mu t} (\mu t)^n / n! = e^{-(\lambda + \mu)t + 2\lambda\mu t}$, και για $t \to 0$, προκύπτει το ζητούμενο.

Παράδειγμα (Εφαρμογή στην ουρά M/M/1)

Σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης που έχει έναν μόνο εξυπηρετητή, οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι Exp(μ) μεταβλητή.

Έστω X(t) ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, οπότε ο χώρος καταστάσεων είναι S = {0, 1, 2, ⋯}. Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τη στιγμή t, τότε η επόμενη κατάσταση θα είναι είτε i+1 (εάν φτάσουν νέοι πελάτες) είτε κατάσταση i−1 (αν φύγει κάποιος πελάτης και είναι i > 0).

(α) Αν $X(t) = 0$ και T_0 = {χρόνος μέχρι να γίνει $X(t) = 1$}, δείξτε ότι $T_0 \sim Exp(\lambda)$.

(β) Αν $X(t) = i$, $i > 0$, και T_i ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση, δείξτε ότι $T_i \sim Exp(\lambda + \mu)$.

(γ) Αν $X(t) = i$, $i > 0$, να βρεθεί η $P(X(t) = i + 1 \mid X(t) = i)$.

(δ) Σχεδιάστε την αντίστοιχη ενσωματωμένη ΜΑΔΧ.

(ε) Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(ζ) Σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ΜΑΣΧ.

Λύση

(α) Εάν $X(t) = 0$, τότε θα γίνει $X(t) = 1$ όταν φτάσει ένας νέος πελάτης. Δεδομένου ότι οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων στη διαδικασία Poisson έχουν εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$, άρα η ίδια κατανομή θα ισχύει και για το χρόνο παραμονής στην κατάσταση αυτή.

(β) Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, όπου $i > 0$. Άρα, υπάρχει ήδη ένας πελάτης που εξυπηρετείται. Ο χρόνος X μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη ακολουθεί $Exp(\lambda)$ κατανομή, ενώ ο χρόνος Y που απομένει για την εξυπηρέτηση του ήδη υπάρχοντος πελάτη ακολουθεί $Exp(\mu)$ κατανομή και είναι ανεξάρτητος από τη X. Αν T_i ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση τότε

$$T_i = \min(X, Y) \sim Exp(\lambda+\mu).$$

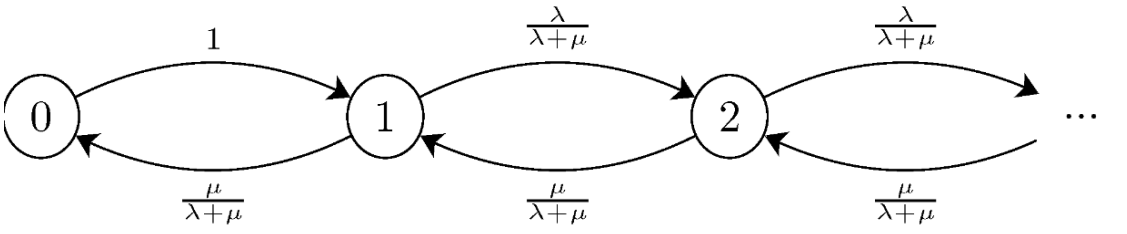
(γ) Είναι $p_{i,i-1} = P(X(t) = i - 1 \mid X(t) = i) = P(X > Y) = \mu/(\lambda + \mu)$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
&\Pr(X \geq Y) \\
&= \int_0^\infty \Pr(X \geq Y | Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty \Pr(X \geq y | Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty \Pr(X \geq y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} dy \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)y} dy \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, $p_{i,i+1} = P(X(t) = i + 1 \mid X(t) = i) = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(δ) Διάγραμμα της ενσωματωμένης ΜΑΔΧ εφοδιασμένο με τις πιθανότητες τελικής μετάβασης:



(ε) Οι ρυθμοί μεταβολής κάθε μίας κατάσταση i είναι οι εξής:

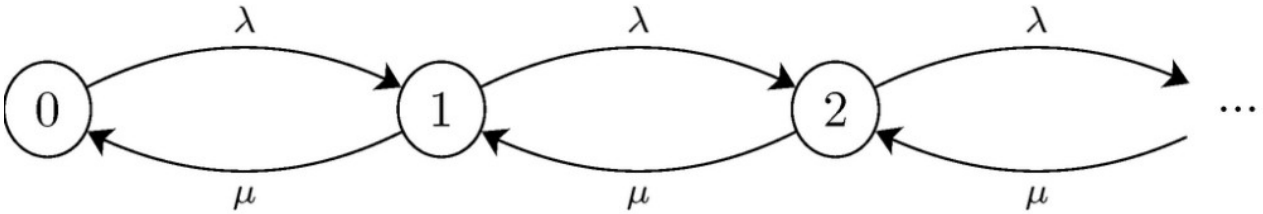
- $\lambda_0 = \lambda$,
- $\lambda_i = \lambda + \mu$, i = 1, 2, ...

Τα στοιχεία του γεννήτορα πίνακα G είναι τα εξής: $g_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij}, & i \neq j. \\ -\lambda_i, & i = j. \end{cases}$

Ο γεννήτορας πίνακας είναι ο

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

(ζ) Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ΜΑΣΧ είναι το παρακάτω:



14.3 Κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Στόχος είναι να βρεθεί η κατανομή της X(t). Ορίζουμε $g_n(t) = P(X(t) = n)$, για n = 0, 1, …

Αν A_Δ = {Οι αφίξεις σε χρονικό διάστημα μήκους Δ} και E_Δ = {Οι εξυπηρετήσεις σε χρονικό διάστημα μήκους Δ}, τότε

$$\mathbf{A_\Delta \sim Poisson(\lambda\Delta)} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E_\Delta \sim Poisson(\mu\Delta)}.$$

Παρατηρούμε ότι:

- $P(A_\Delta = 0) = e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$, $P(A_\Delta = 1) = e^{-\lambda\Delta}\lambda\Delta = \lambda\Delta + o(\Delta)$ και

  $P(A_\Delta = n) = e^{-\lambda\Delta}(\lambda\Delta)^n/n! = o(\Delta)$, $n \geq 2$.

- $P(E_\Delta = 0) = e^{-\mu\Delta} = 1 - \mu\Delta + o(\Delta)$, $P(E_\Delta = 1) = e^{-\mu\Delta}\mu\Delta = \mu\Delta + o(\Delta)$ και

  $P(E_\Delta = n) = e^{-\mu\Delta}(\mu\Delta)^n/n! = o(\Delta)$, $n \geq 2$.

Σημείωση:
Στον όρο o(Δ) έχουν ενσωματωθεί όλοι οι όροι των σειρών Maclaurin της $e^{-\lambda\Delta}$ που είναι τάξης Δ^2.

Για την $g_n(t)$ μπορούμε να γράψουμε τις εξής σχέσεις:

$g_0(t + \Delta) = g_0(t)P(A_\Delta = 0)$ (κανένας πελάτης στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε)

$+ \Sigma_{i\geq 1} g_0(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i)$ (κανένας πελάτης στο χρόνο t, i ήρθαν, i έφυγαν)

$+ \Sigma_{i\geq 1} g_1(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+1)$ (1 πελάτης στο χρόνο t, i ήρθαν, i+1 έφυγαν)

$+ \Sigma_{i\geq 1} g_2(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+2)$ (2 πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i+2 έφυγαν)

+ …

ή

$$g_0(t + \Delta) = g_0(t)P(A_\Delta = 0) + \Sigma_{k\geq 1}\,\Sigma_{i\geq 1} g_k(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+k).$$

Στη συνέχεια, θα γίνει διαίρεση με το Δ και θα λάβουμε όριο καθώς Δ → 0. Άρα από τους παραπάνω όρους, θα απομείνουν μόνο όσοι *δεν είναι o(Δ)*.

Καθώς, $P(A_\Delta = k) = o(\Delta)$, και $P(E_\Delta = k) = o(\Delta)$, $k \geq 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$g_0(t + \Delta) = g_0(t)P(A_\Delta = 0) + g_0(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 1) + g_1(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 1) + o(\Delta)$$

ή

$$g_0(t + \Delta) = g_0(t)(1 - \lambda\Delta) + g_0(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta) + g_1(t)(1 - \lambda\Delta)(\mu\Delta) + o(\Delta).$$

Αντίστοιχα, για $n \geq 1$, υπολογίζουμε:

$g_n(t + \Delta) = \Sigma_{i\geq 0} g_n(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i)$ (n πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i έφυγαν)

$+ \Sigma_{i\geq 0} g_{n+1}(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+1)$ (n+1 πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i+1 έφυγαν)

$+ \Sigma_{i\geq 0} g_{n-1}(t)P(A_\Delta = i+1)P(E_\Delta = i)$ (n-1 πελάτες στο χρόνο t, i+1 ήρθαν, i έφυγαν)

$+ \ldots$

$= \Sigma_{k\geq 1} \Sigma_{i\geq 1} g_{n+k}(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+k) + \Sigma_{k\geq 1} \Sigma_{i\geq 1} g_{n-k}(t)P(A_\Delta = i+k)P(E_\Delta = i)$

Αντίστοιχα, παρατηρούμε πως αν γίνει διαίρεση με το Δ και λάβουμε όριο καθώς $\Delta \to 0$, τότε επιβιώνουν μόνο οι όροι που αφορούν αφίξεις και αναχωρήσεις ≤ 1, όροι *που δεν είναι ο(Δ).* Δηλαδή:

$g_n(t + \Delta) = g_n(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 0)$

$+ g_n(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 1)$

$+ g_{n-1}(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 0)$

$+ g_{n+1}(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 1)$

$+ o(\Delta).$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$g_n(t + \Delta) = g_n(t)(1 - \lambda\Delta)(1 - \mu\Delta)$ (n πελάτες στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε, κανένας δεν έφυγε)

$+ g_n(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta)$ (n πελάτες στο χρόνο t, ένας ήρθε, ένας έφυγε)

$+ g_{n-1}(t)(\lambda\Delta)(1 - \mu\Delta)$ (n-1 πελάτες στο χρόνο t, ένας ήρθε, κανένας δεν έφυγε)

$+ g_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta)(\mu\Delta)$ (n+1 πελάτες στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε, ένας έφυγε)

$+ o(\Delta).$ (όλοι οι $o(\Delta)$ όροι) (2)

Σχόλιο για τη (1): ο όρος $g_0(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta)$ έχει ενσωματωθεί στην $o(\Delta)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με κατάλληλη αναδιάταξη, παίρνουμε

$$\frac{g_0(t+\Delta) - g_0(t)}{\Delta} = -\lambda g_0(t) + \mu g_1(t) + o(\Delta)$$

$$\frac{g_n(t+\Delta) - g_n(t)}{\Delta} = -(\lambda + \mu)g_n(t) + \lambda g_{n-1}(t) + \mu g_{n+1}(t) + o(\Delta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις για $\Delta \to 0$ οδηγούν στις διαφορικές εξισώσεις:

$$\mathbf{g'_0(t) = -\lambda g_0(t) + \mu g_1(t)} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{g'_n(t) = \lambda g_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) g_n(t) + \mu g_{n+1}(t)}$$

ΟΙ παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται **Διαφορικές Εξισώσεις Kolmogorov**. Η επίλυσή τους είναι δύσκολη, ωστόσο δεν είναι απαραίτητο να βρεθεί η γενική τους λύση. Καθώς, $\rho = \lambda/\mu < 1$, η διεργασία θα αποκτήσει στάσιμη οριακή συμπεριφορά, δηλαδή

$\lim_{t \to \infty} g_n(t) = g_n$ ανεξάρτητο του t, και $\lim_{t \to \infty} g'_n(t) = 0$

Στην περίπτωση αυτή, οι δ.ε. Kolmogorov γίνονται ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$\mu g_1 - \lambda g_0 = 0$ και $\mu g_{n+1} - (\lambda + \mu) g_n + \lambda g_{n-1} = 0$ ή

- $\mathbf{g_1 = \rho g_0}$,
- $\mathbf{g_{n+1} = (\rho + 1) g_n - \rho g_{n-1}}$,

όπου $\rho = \lambda/\mu$. Ξεκινώντας από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε

$g_2 = (\rho + 1) g_1 - \rho g_0 = (\rho + 1) \rho g_0 - \rho g_0 = \rho^2 g_0$

$g_3 = (\rho + 1) g_2 - \rho g_1 = (\rho + 1) \rho^2 g_0 - \rho^2 g_0 = \rho^3 g_0$

και γενικότερα, με επαγωγικό συλλογισμό καταλήγουμε στην

$$\mathbf{g_n = \rho^n g_0}$$

Η πιθανότητα g_0, μπορεί να υπολογιστεί από την προφανή σχέση

$\Sigma_{n=0, 1, \ldots} g_n = 1 \Leftrightarrow g_0 \Sigma_{n=0, 1, \ldots} \rho^n = 1 \Leftrightarrow g_0 = 1 - \rho$ και

$g_n = \rho^n g_0 = \rho^n (1 - \rho)$.

Οι εξισώσεις

- $\mathbf{g_0 = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = 0) = 1 - \rho}$ και
- $\mathbf{g_n = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = \rho^n g_0 = \rho^n (1 - \rho)}$

μπορούν να αξιοποιηθούν για να εκφράσουν τις πιθανότητες της στάσιμης κατάστασης της ουράς:

P(αδρανής υπηρεσία) = P(κανένας πελάτης δεν περιμένει να εξυπηρετηθεί)

$= g_0$

$= 1 - \rho$

$= 1 - \lambda / \mu$.

P(υπηρεσία απασχολημένη) = P(υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης)

$= 1 - g_0$

$= \rho = \lambda / \mu$.

P(υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα που είτε περιμένουν είτε εξυπηρετούνται) =

$= g_n$

$= \rho^n(1 - \rho)$.

Επιπλέον, είναι: $P(X(t) \geq n) = \Sigma_{m = n, n+1, \ldots} P(X(t) = m)$, άρα:

$\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq n) = \Sigma_{m = n, n+1, \ldots} \lim_{t \to \infty} P(X(t) = m)$

$= \Sigma_{m = n, n+1, \ldots} g_m$

$= \Sigma_{m = n, n+1, \ldots} \rho^m(1 - \rho)$

$= (1 - \rho)\Sigma_{m = 0, 1, \ldots} \rho^{m + n}$

$= (1 - \rho)\rho^n\Sigma_{m = 0, 1, \ldots} \rho^m$

$= \rho^n$.

Άρα, στη στάσιμη κατάσταση ισχύει ότι:

- P(υπάρχουν n ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα) = $\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq n) = \rho^n$.
- P(υπάρχουν λιγότεροι από n πελάτες στο σύστημα) = $\lim_{t \to \infty} P(X(t) < n) = 1 - \rho^n$.

Σημείωση 1

Οι διαφορικές εξισώσεις Kolmogorov

- $g'_0(t) = -\lambda g_0(t) + \mu g_1(t)$
- $g'_n(t) = -(\lambda + \mu)g_n(t) + \lambda g_{n-1}(t) + \mu g_{n+1}(t)$

συνοψίζονται στην εξής σχέση

$$\mathbf{P'(t) = Q \cdot P(t),}$$

όπου

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & & \\ & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \\ & & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

και $P(t) = [P(X(t) = n]_{n \in N}$

Γενικότερα, αποδεικνύεται το εξής

Θεώρημα

Έστω μια συνεχή αλυσίδα Markov X(t) με χώρο καταστάσεων S και πίνακα ρυθμών μεταβολής G. Η κατανομή πιθανότητας π στο S είναι μια στάσιμη κατανομή για το X(t) εάν και μόνο εάν ικανοποιεί **πG=0.**

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:

https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_3_3_the_generator_matrix.php#equation11_7

Σημείωση 2

Οι εξισώσεις $g_{n+1} = (\rho + 1)g_n - \rho g_{n-1}$, $n \geq 1$, είναι εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική τους λύση είναι της μορφής

$g_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$, όπου x_1, x_2, είναι λύσεις της εξίσωσης

14.4 Αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα M/M/1

Στη στάσιμη κατάσταση, συμβολίζουμε με L_S (length of the system) το αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση) και L_Q (length of queue) το αναμενόμενο μέγεθος της ουράς. Υπολογίζουμε

$L_S = \lim_{t \to \infty} E(X(t))$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} n \cdot \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n)$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} n g_n$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} n\rho^n(1 - \rho)$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} n (\rho^n - \rho^{n+1})$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} n (\rho^n - \rho^{n+1})$

$= (\rho - \rho^2) + 2(\rho^2 - \rho^3) + 3(\rho^3 - \rho^4) + \ldots$

$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \ldots$ ($\rho < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει και η αναδιάταξη είναι εφικτή)

$= \rho / (1 - \rho) = \lambda / (\mu - \lambda)$.

Σημείωση

Εναλλακτικά, καθώς $\lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = g_n = \rho^n (1 - \rho)$, γίνεται αντιληπτό πως $X(t) \sim \text{Geometric}(1 - \rho)$, και μπορούμε άμεσα να συνάγουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

14.5 Αναμενόμενο μέγεθος ουράς M/M/1

Με παρόμοιο τρόπο είναι δυνατό να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν στην ουρά να εξυπηρετηθούν κατά τη στάσιμη κατάσταση της ουράς. Καθώς, ο πελάτης που εξυπηρετείται δεν είναι μέρος της ουράς, n πελάτες στο σύστημα σημαίνει ότι το μήκος της ουράς είναι n - 1.

$L_Q = \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} (n - 1)\lim_{t \to \infty} P(X(t) = n)$

$= \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} n g_n - \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} g_n$

$= L_S - (1 - g_0)$

$= \rho / (1 - \rho) - (1 - (1 - \rho))$

$= \rho^2 / (1 - \rho)$

$= \rho L_S$.

14.6 Αναμενόμενο μέγεθος υπαρκτής ουράς M/M/1

Επιπλέον, έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το αναμενόμενο μέγεθος της ουράς (L_{QQ}), δεδομένου πως υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης να περιμένει ($X(t) \geq 2$), ένας δείκτης που αντιπροσωπεύει την ποιότητα εξυπηρέτησης που προσφέρει το σύστημα από το μέρος του πελάτη.

Είναι $P(X(t) \geq 2) = \Sigma_{n = 2, 3 \ldots} P(X(t) = n)$, άρα

$$\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq 2) = \Sigma_{n = 2, 3 \ldots} \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n)$$

$$= \Sigma_{n = 2, 3 \ldots} g_n$$

$$= \Sigma_{n = 2, 3 \ldots} \rho^n (1 - \rho)$$

$$= \rho^2$$

και $L_{QQ} = \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} (n - 1) \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n \mid X(t) \geq 2)$

$$= \Sigma_{n = 1, 2, \ldots} (n - 1) \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n, X(t) \geq 2) / P(X(t) \geq 2)$$

$$= \Sigma_{n = 2, 3, \ldots} (n - 1) \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) / P(X(t) \geq 2)$$

$$= \Sigma_{n = 2, 3 \ldots} (n - 1) g_n / \rho^2$$

$$= L_Q / \rho^2$$

$$= 1 / (1 - \rho).$$

14.7 Μέσος χρόνος παραμονής M/M/1

Συμβολίζουμε με W_S το μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα και με W_Q το μέσο χρόνο παραμονής στην ουρά. Οι ποσότητες αυτές, δίνονται από τους τύπους του Little

$$\mathbf{L_S = \lambda W_S} \quad \text{και} \quad \mathbf{L_Q = \lambda W_Q}$$

ή

- $\mathbf{W_S = L_S / \lambda = 1 / (\mu - \lambda)}$
- $\mathbf{W_Q = L_Q} / \lambda = \rho \, \mathbf{L_S} / \lambda = \mathbf{L_S / \mu}$

Η απόδειξη αυτών των τύπων έγινε από τον John Little το 1961 ([1]). Αργότερα παρουσιάστηκαν και κάποιες πιο απλοποιημένες αποδείξεις (όπως η [2]).

[1] John D. C. Little, (1961) A Proof for the Queuing Formula: L = λW. Operations Research 9(3):383-387. https://doi.org/10.1287/opre.9.3.383

[2] Shaler Stidham, Jr., (1974) Technical Note—A Last Word on L = λW. Operations Research 22(2):417-421. https://doi.org/10.1287/opre.22.2.417

Οι δύο τύποι αν και έχουν μη τετριμμένη απόδειξη, είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτοί διαισθητικά.

Πράγματι, στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (W_S) ο μέσος αριθμός νεοεισερχομένων είναι $\lambda \cdot W_S$, (λ ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου). Έτσι, όταν ένας πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα, βλέπει (κατά μέσο όρο) $\lambda \cdot W_S$, πελάτες να έχουν απομείνει σε αυτό. Επειδή στη στάσιμη τελική κατάσταση ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι L_S, πρέπει να είναι $L_S = \lambda \cdot W_S$. Αντίστοιχα αιτιολογείται η σχέση $L_Q = \lambda \cdot W_Q$ ($\lambda \cdot W_Q$ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων κατά τη διάρκεια του χρόνου που έμεινε στην ουρά άρα το μέσο πλήθος ατόμων που παραμένει στην ουρά όταν ένας πελάτης πηγαίνει να εξυπηρετηθεί, δηλαδή L_Q). Από τους τύπους του Little παίρνουμε επιπλέον:

$$W_S = L_S / \lambda$$

$$= 1 / (\mu - \lambda)$$

$$= W_Q / \rho$$

και

$$W_Q = L_Q / \lambda$$

$$= \rho / (\mu - \lambda)$$

$$= W_S \cdot \rho,$$

δηλαδή

$$\mathbf{W_S = W_Q / \rho}$$

και

$$\mathbf{W_Q} = W_S \cdot \boldsymbol{\rho},$$

14.8 Συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα M/M/1

Καθώς, ο συνολικός χρόνος παραμονής αποτελείται από τον χρόνο στην ουρά (που μπορεί να είναι μηδέν) και τον χρόνο της εξυπηρέτησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{W_S = W_Q + 1/\mu}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με λ και αξιοποιώντας τους τύπους του Little, παίρνουμε επιπλέον:

$$\mathbf{L_S = L_Q + \lambda/\mu = L_Q + \rho = L_Q + L_{SERV},}$$

όπου $L_{SERV} = \rho$ είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης

14.9 Κατανομή χρόνου παραμονής M/M/1

Για έναν πελάτη είναι σημαντικό να γνωρίζει την πιθανότητα, ότι ο χρόνος που θα παραμείνει στο σύστημα (ή στην ουρά) θα είναι μεγαλύτερος από μια ορισμένη τιμή. Μαζί με το μήκος της ουράς, το μέγεθος αυτής της πιθανότητας αποτελεί ένα δείκτη που περιγράφει την ποιότητα των προσφερόμενων υπηρεσιών από την πλευρά του χρήστη. Χωρίς απόδειξη δίνεται ότι

- **Χρόνος παραμονής στο σύστημα ~ Exp($1/W_S$)**
- **Χρόνος παραμονής στην ουρά ~ Exp($1/W_Q$)**

ή ισοδύναμα

$$\textbf{P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t)} = e^{-t / W_S}$$

P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = e^{-t / W_Q}

Από τους παραπάνω, επιπλέον, έχουμε:

P(παραμονής στο σύστημα περισσότερο από t_1 και λιγότερο από t_2) =

= P(περισσότερο από t_1) – P(περισσότερο από t_2)

14.10 Διακύμανση χαρακτηριστικών ουράς M/M/1

Αποδεικνύεται ότι οι διακυμάνσεις των τεσσάρων χαρακτηριστικών είναι οι παρακάτω:

- $Var(L_S) = \rho / (1 - \rho)^2$
- $Var(L_Q) = \rho^2 (1 + \rho - \rho^2) / (1 - \rho)^2$
- $Var(W_S) = 1 / [\mu^2(1 - \rho)^2]$
- $Var(W_Q) = \rho(2 - \rho) / [\mu^2(1 - \rho)^2]$

Συγκεντρωτικό Τυπολόγιο

Πιθανότητες σχετικές με την κατάσταση της ουράς

- $P(X(t) = 0) = g_0 = 1 – \rho$
- $P(X(t) = n) = g_n = \rho^n g_0 = \rho^n (1 – \rho)$
- $P(X(t) \geq n) = \rho^n$
- P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = $e^{-t / WS}$
- P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = $e^{-t / WQ}$

Πλήθος ατόμων στο σύστημα ή / και την ουρά

- $L_S = \rho / (1 – \rho) = \lambda / (\mu – \lambda)$.
- $L_Q = \rho^2 / (1 – \rho) = \rho L_S$.
- $L_{QQ} = L_Q / \rho^2 = 1 / (1 – \rho)$.
- $L_S = L_Q + \lambda/\mu = L_Q + \rho = L_Q + L_{SERV}$,

Χρόνος παραμονής στο σύστημα ή αναμονής στην ουρά

- $W_S = L_S / \lambda = 1 / (\mu – \lambda)$
- $W_Q = L_Q / \lambda = \rho L_S / \lambda = L_S / \mu$
- $W_S = W_Q / \rho$
- $W_Q = W_S \cdot \rho$,
- $W_S = W_Q + 1/\mu$

Πρακτικός κανόνας

Για να είναι λειτουργική μία ουρά, πρέπει

$$\rho = \lambda / \mu < 0,8$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα αεροδρόμιο, ένας αεροδιάδρομος εξυπηρετεί αποκλειστικά τα αεροπλάνα που προσγειώνονται. Αυτά, μπορούν να θεωρηθούν μία ουρά. Ο ρυθμός με τον οποίο εξυπηρετούνται από το προσωπικό εδάφους είναι μ = 27 αεροπλάνα / ώρα, ενώ ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν στο αεροδρόμιο είναι 20 αφίξεις / ώρα.

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$W_S = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (27 - 20) = 1/7$ ώρες = 8,6 min.

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$L_S = \lambda W_S = \lambda / (\mu - \lambda) = 20 / (27 - 20) = 2{,}9$ αεροπλάνα.

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$W_Q = W_S - 1/\mu = 1 / (27 - 20) - 1/27 = 6{,}4$ min

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \lambda_2 / [\mu(\mu - \lambda)] = 20^2 / [27(27 - 20)] = 2{,}1$ αεροπλάνα.

Παράδειγμα 2

Στο ίδιο αεροδρόμιο, κατά την περίοδο του καλοκαιριού, ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν στο αεροδρόμιο αυξάνεται σε 25 αφίξεις / ώρα και μεταβάλλονται οι χρόνοι αναμονής και το μέγεθος της ουράς.

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$W_S = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (27 - 25) = 1/2$ ώρες = 30 min.

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$L_S = \lambda W_S = \lambda / (\mu - \lambda) = 25 / (27 - 25) = 12{,}5$ αεροπλάνα.

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$W_Q = W_S - 1/\mu = 1 / (27 - 25) - 1/27 = 27{,}8$ min

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \lambda_2 / [\mu(\mu - \lambda)] = 25^2 / [27(27 - 25)] = 11{,}6$ αεροπλάνα.

Παράδειγμα 3

Στην περίπτωση κακών καιρικών συνθηκών, ο ρυθμός εξυπηρέτησης πέφτει και γίνεται μ = 22 αεροσκάφη ανά ώρα. Τότε:

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$W_S = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (22 - 20) = 1/2$ ώρες = 30 min.

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$L_S = \lambda W_S = \lambda / (\mu - \lambda) = 20 / (22 - 20) = 10$ αεροπλάνα.

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$W_Q = W_S - 1/\mu = 1 / (22 - 20) - 1/22 = 27{,}3$ min

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \lambda_2 / [\mu(\mu - \lambda)] = 20^2 / [22(22 - 20)] = 9{,}1$ αεροπλάνα.

Παράδειγμα 4

Σε ένα δίκτυο υπολογιστών μια σύνδεση έχει ρυθμό μετάδοσης C bit/s. Τα μηνύματα φτάνουν σε έναν server ακολουθώντας κατανομή Poisson με ρυθμό λ μηνυμάτων ανά δευτερόλεπτο. Υποθέτουμε ότι τα μηνύματα έχουν εκθετικά κατανεμημένο μήκος με μέσο όρο 1/μ bit και τοποθετούνται στην ουρά με τρόπο FIFO εάν ο σύνδεσμος είναι κατειλημμένος.

Για δεδομένο λ και μ, να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο C έτσι ώστε ο μέσος χρόνος συστήματος (χρόνος εξυπηρέτησης + χρόνος αναμονής) να είναι μικρότερος από έναν δεδομένο χρόνο T_0.

Αν $E(T) = E(X) / C = 1/\mu$, άρα $E(X) = 1 / (\mu C)$, ή $X \sim Exp(\mu C)$

$W_S = 1 / (\mu C - \lambda) \geq T_0$, άρα $\mu C - \lambda \leq T_0$, ή $C \geq (\lambda + 1/T_0) / \mu$.

Παράδειγμα 5

Σε ένα πρατήριο καυσίμων υπάρχουν και τρία πλυντήρια αυτοκινήτων, τα οποίο εξυπηρετούν με διαφορετικούς ρυθμούς. Αν λ είναι ο ρυθμός άφιξης αυτοκινήτων ανά ώρα, και μ ο ρυθμός εξυπηρέτησης να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	λ	μ	ρ	L_S	L_Q	W_S	W_Q	g_0
Πλυντήριο Α	0,1 Ι.Χ./min	0,5 Ι.Χ./min						
Πλυντήριο Β	0,1 Ι.Χ./min	0,11 Ι.Χ./min						
Πλυντήριο Γ	0,1 Ι.Χ./min	0,1 Ι.Χ./min						

Λύση

	λ	μ	ρ	LS	LQ	WS	WQ	g0
Πλυντήριο Α	0,1 Ι.Χ./min	0,5 Ι.Χ./min	0,1 / 0,5 = 0,2	0,1 / (0,5 – 0,1) = 0,25	0,12/(1 – 0,2) = 0,05	0,25/0,1 = 2,5 min	2,5 · 0,2 = 0,5 min	1 – 0,2 = 0,8 = 80%
Πλυντήριο Β	0,1 Ι.Χ./min	0,11 Ι.Χ./min	0,1 / 0,11 = 0,909	0,1 / (0,11 – 0,1) = 10	9,1	100 min	90,9 min	0,09 = 9%
Πλυντήριο Γ	0,1 Ι.Χ./min	0,1 Ι.Χ./min	0,1 / 0,1 = 1	0,1 / (0,1 – 0,1) = +∞ (ασταθής ουρά)	+∞	+∞	+∞	0 = 0%

Άσκηση 1

Σε ένα ιατρείο επειγόντων περιστατικών, γνωρίζουμε ότι καταφτάνει 1 ασθενής κάθε 30 λεπτά, ενώ ο ιατρός εξυπηρετεί 1 ασθενή κάθε 20 λεπτά.

(α) Είναι το σύστημα εξυπηρέτησης ευσταθές;

Στην περίπτωση της ευστάθειας:

(β) ποια είναι η πιθανότητα ο ιατρός να μην έχει ασθενείς;

(γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών στο ιατρείο των επειγόντων;

(δ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών που περιμένουν;

(ε) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο χώρο του ιατρείου;

(στ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά μέχρι την εξέταση από τον ιατρό;

(ζ) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω ασθενείς να εξεταστούν;

(η) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος ασθενής να περιμένει να δει τον ιατρό περισσότερο από 30 λεπτά;

Άσκηση 2

Σε ένα σύστημα αναμονής M/M/1, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα X(t) κυμαίνεται μεταξύ 0 και 4 και οι αντίστοιχες πιθανότητες $g_n = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n)$ στη στάσιμη κατάσταση είναι

$$g_0 = 1/16, \quad g_1 = 4/16, \quad g_2 = 6/16, \quad g_3 = 4/16, \quad g_4 = 1/16,$$

(α) Προσδιορίστε τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στο σύστημα (L_S).

(β) Προσδιορίστε τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στην ουρά (L_Q).

(γ) Δεδομένου ότι ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 2 πελάτες ανά ώρα, προσδιορίστε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής στο σύστημα W_S, και τον αναμενόμενο χρόνος αναμονής στην ουρά, W_Q.

(δ) Προσδιορίσετε τον αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης.

Άσκηση 3

Οι εργασίες που εκτελούνται σε ένα συγκεκριμένο μηχάνημα φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό των 2 εργασίες / ώρα. Όταν το μηχάνημα χαλάει χρειάζεται μία ώρα για να επισκευαστεί. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός των νέων εργασιών που θα έρθουν κατά τη διάρκεια αυτής της ώρας να είναι

(α) 0, (β) 2, (γ) 5 ή περισσότερες;

Άσκηση 4

Ο χρόνος που απαιτείται από έναν μηχανικό για την επισκευή ενός μηχανήματος διαρκεί 4 ώρες κατά μέσο όρο και έχει εκθετική κατανομή. Ωστόσο, ένα ειδικό εργαλείο θα μείωνε το μέσο όρο σε 2 ώρες. Εάν ο μηχανικός επισκευάσει ένα μηχάνημα σε λιγότερο από δύο ώρες πληρώνεται 100€. Διαφορετικά, πληρώνεται 80€.

Προσδιορίστε την αναμενόμενη αύξηση της αμοιβής του μηχανικού εάν χρησιμοποιήσει το ειδικό εργαλείο.

Άσκηση 5

Μία μεταφορική εταιρεία παραλαμβάνει πολύ μεγάλα δέματα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό 2 ανά ημέρα. Ο χρόνος διεκπεραίωσης και αποστολής στον τελικό παραλήπτη έχει εκθετική κατανομή με μέσο όρο 1/4 ημέρας.

Αν υπάρχει ήδη ένα δέμα που επεξεργάζεται, η εταιρεία έχει χώρο για να αποθηκεύσει με ασφάλεια 3 μεγάλα πακέτα, ενώ όσα περισσεύουν τοποθετούνται σε μία λιγότερο ασφαλή τοποθεσία.

Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου για το οποίο θα επαρκεί ο ασφαλής αποθηκευτικός χώρος για να καλύψει όλες τις ανάγκες της εταιρίας.

Άσκηση 6

Ένα πρατήριο καυσίμων έχει μία αντλία βενζίνης. Τα αυτοκίνητα φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 15 Ι.Χ. ανά ώρα. Όμως, αν η αντλία χρησιμοποιείται ήδη, αυτοί οι δυνητικοί πελάτες μπορεί να διστάζουν και να πηγαίνουν στο επόμενο πρατήριο. Ειδικότερα, αν υπάρχουν ήδη n αυτοκίνητα στο πρατήριο, η πιθανότητα αυτό ένας δυνητικός πελάτης που φθάνει θα αλλάξει γνώμη και θα φύγει είναι n/3 για n = 1, . . . , 3.

Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός αυτοκινήτου έχει εκθετική κατανομή με μέσο όρο 4 λεπτά.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας (πG = O).

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των αυτοκινήτων στο σταθμό.

(δ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος Ι.Χ. στο πρατήριο.

(ε) Βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής (συμπεριλαμβανομένου του σέρβις) για τα αυτοκίνητα που εξυπηρετούνται (νόμος του Little).

Άσκηση 7

Ένα μικρό παντοπωλείο έχει δύο υπαλλήλους, έναν στο ταμείο και έναν γενικών καθηκόντων. Οι πελάτες φτάνουν στο παντοπωλείο τυχαία με μέσο ρυθμό 30 ανά ώρα. Όταν υπάρχει μόνο ένας πελάτης στο ταμείο, τότε αυτός εξυπηρετείται μόνο από τον ταμία, με αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης 1,5 λεπτό. Όταν όμως υπάρχουν περισσότεροι από ένας πελάτες που περιμένουν στο ταμείο, ο δεύτερος υπάλληλος γενικών καθηκόντων, αφήνει τη δουλειά του και βοηθάει τον ταμία να εξυπηρετήσει πιο γρήγορα τον πελάτη, μειώνοντας τον αναμενόμενο χρόνο που απαιτείται για την επεξεργασία ενός πελάτη στο 1 λεπτό.

Και στις δύο περιπτώσεις, η κατανομή χρόνου υπηρεσίας είναι εκθετική.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας.

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των πελατών στο ταμείο.

(γ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος ατόμων L στο ταμείο για αυτό το σύστημα. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να προσδιορίσετε τα L_Q, W_S και W_Q .