

Ασκήσεις στις Στοχαστικές Διεργασίες

1. Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

2. Να δείξετε ότι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες με πίνακες μετάβασης P_1 και P_2 δεν είναι αδιαχώριστες, όπου

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P_3 είναι αδιαχώριστη, όπου:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P δεν είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

5. Έστω $S = \{0, 1\}$ και $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Να βρεθεί η οριακή κατανομή της αλυσίδας όπως και το μέσο πλήθος βημάτων που απαιτούνται μεταξύ δύο μεταβάσεων στην ίδια κατάσταση της αλυσίδας.

6. Έστω $S = \{0, 1, 2\}$ και $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

(α) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή

(β) Να βρεθεί το μέσο πλήθος βημάτων που απαιτούνται μεταξύ δύο επισκέψεων στις καταστάσεις της αλυσίδας.