



Στοχαστικές Διεργασίες

5^ο Εξάμηνο – Επιλογής

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π)



Διεργασίες Poisson



Διεργασίες καταμέτρησης

Σε ορισμένα προβλήματα, μετράμε τις εμφανίσεις ορισμένων τύπων γεγονότων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, έχουμε να κάνουμε με μια διεργασία καταμέτρησης.

Για παράδειγμα, η διεργασία $\{N(t), t \geq 0\}$ που δείχνει τον αριθμό των πελατών που φτάνουν σε ένα σούπερ μάρκετ μέχρι την ώρα t ξεκινώντας από την ώρα 0.

Για τέτοιου είδους διαδικασίες, συνήθως υποθέτουμε $N(0) = 0$, άρα καθώς ο χρόνος περνάει και φτάνουν πελάτες, το $N(t)$ παίρνει θετικές ακέραιες τιμές.



Διεργασίες καταμέτρησης

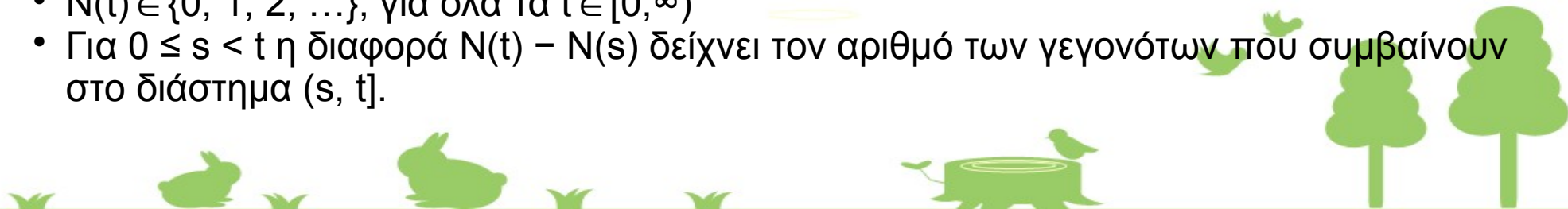
Ορισμός

Μια στοχαστική διεργασία $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ λέγεται διεργασία καταμέτρησης εάν $N(t)$ είναι ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν από το χρόνο 0 έως και συμπεριλαμβανομένου του χρόνου t , δηλαδή

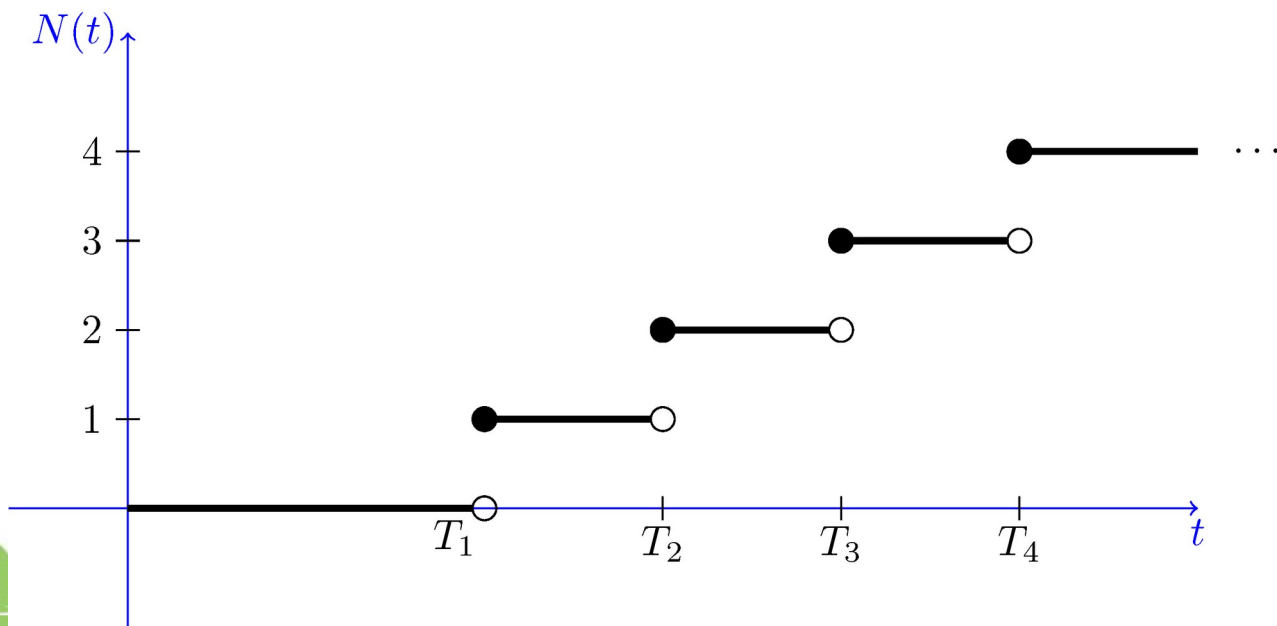
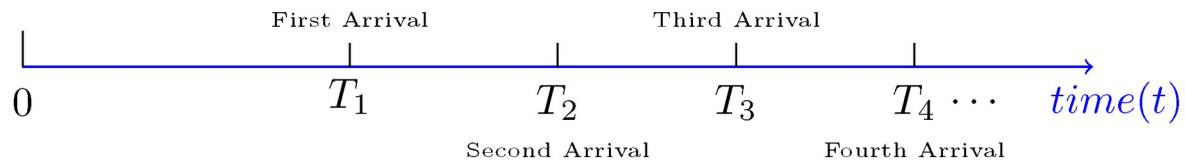
$$N(t) = \{\text{ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν στο } (0, t]\}$$

Για μια διαδικασία μέτρησης, υποθέτουμε:

- $N(0) = 0$.
- $N(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$, για όλα τα $t \in [0, \infty)$
- Για $0 \leq s < t$ η διαφορά $N(t) - N(s)$ δείχνει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(s, t]$.



Διεργασίες καταμέτρησης



Ανεξάρτητες προσαυξήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Ορισμός

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διεργασία συνεχούς χρόνου. Λέμε ότι η $X(t)$ έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** εάν, για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες. Έστω τώρα $\{N(t), t \geq 0\}$ μια διεργασία καταμέτρησης και

$$N(t) = \{\text{πλήθος αφίξεων που συμβαίνει στο χρονικό διάστημα } (0, t]\}$$

Η διαφορά $N(t_i) - N(t_{i-1})$ εκφράζει τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα $(t_{i-1}, t_i]$. Έτσι, μια διαδικασία καταμέτρησης **έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις εάν το πλήθος αφίξεων σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα $(t_1, t_2], (t_2, t_3], \dots, (t_{n-1}, t_n]$ είναι ανεξάρτητες.**



Στάσιμες προσυζηήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Ορισμός

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διεργασία συνεχούς χρόνου. Λέμε ότι η $X(t)$ έχει **στάσιμες προσυζηήσεις** εάν, για κάθε $0 \leq t_1 < t_2$, και όλα τα $r > 0$, οι τυχαίες μεταβλητές

$$X(t_2 + r) - X(t_1 + r), X(t_2) - X(t_1)$$

είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (δηλ. έχουν τις ίδιες κατανομές πιθανότητας).



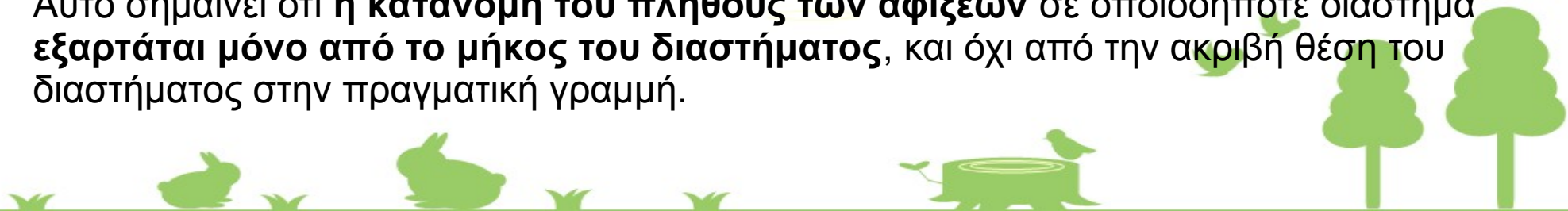
Στάσιμες προσυζησεις σε διεργασία καταμέτρησης

Έστω τώρα $\{N(t), t \geq 0\}$ μια διεργασία καταμέτρησης. Η ποσότητα $N(t_2) - N(t_1)$ εκφράζει τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα $(t_1, t_2]$.

Καθώς $N(0) = 0$, **μια διαδικασία καταμέτρησης έχει στάσιμες προσυζησεις εάν** για όλα τα $0 \leq t_1 < t_2$, το $N(t_2) - N(t_1)$ έχει την ίδια κατανομή με το $N(t_2 - t_1) - N(0)$ δηλαδή με το $N(t_2 - t_1)$:

$$N(t_2) - N(t_1) \sim N(t_2 - t_1)$$

Αυτό σημαίνει ότι **η κατανομή του πλήθους των αφίξεων σε οποιοδήποτε διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος**, και όχι από την ακριβή θέση του διαστήματος στην πραγματική γραμμή.



Στάσιμες και μη ανεξάρτητες προσαυξήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Μία διεργασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ μπορεί να έχει στάσιμες αλλά όχι ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι τα γεγονότα συμβαίνουν στις χρονικές στιγμές $X + n$ για $n \geq 0$ και έστω $t \geq 0$.

Αν $X \sim U(0, 1)$ και θεωρήσουμε αφίξεις που συμβαίνουν στις χρονικές στιγμές $X + i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, τότε η διεργασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ που μετρά το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(0, t]$:

- Δεν έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Για κάθε $s \in (0, 1)$ οι τυχαίες μεταβλητές $U = N(t+s) - N(t)$ και $V = N(t+1) - N(t+s)$ δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τη στιγμή που είναι Bernoulli τυχαίες μεταβλητές με $U + V = 1$.
- Έχει στάσιμες προσαυξήσεις καθώς για κάθε $t \geq 0$ και $s \in (0, 1)$, η $N(t+s) - N(t)$ είναι Bernoulli(s) (άρα για κάθε επιλογή t_1, t_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους), ενώ για κάθε $s \geq 0$, $N(t+s) - N(t)$ είναι της μορφής $[s] + Y$, όπου $Y \sim \text{Bernoulli}(s - [s])$ (όπου $[s]$ το ακέραιο μέρος του t).

Άρα, οι προσαυξήσεις είναι ισόνομες, δηλαδή η διεργασία έχει στάσιμες προσαυξήσεις.

Μη στάσιμες και ανεξάρτητες προσυζητήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Μία διεργασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ μπορεί να έχει ανεξάρτητες αλλά όχι στάσιμες προσυζητήσεις.

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία διεργασία που έχει στάσιμες προσυζητήσεις. Ορίζουμε τη διεργασία $\{f(t), t \geq 0\}$ ως

$$f(t) = [t] \cdot N(1) + N(t),$$

όπου $[t]$ το ακέραιο μέρος του t . Η $\{f(t), t \geq 0\}$ δεν έχει ανεξάρτητες προσυζητήσεις καθώς

$$f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1) (= 2N(1)), n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

αλλά έχει στάσιμες προσυζητήσεις καθώς

$f(t_2 + r) - f(t_1 + r) = [t_2 + r] \cdot N(1) + N(t_2 + r) - [t_1 + r] \cdot N(1) - N(t_1 + r) = [t_2 - t_1] \cdot N(1) + N(t_2 - t_1)$: εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t_2 - t_1$ και όχι από το $r > 0$.

Σημείωση

Αν $x = n + c_0$, $y = m + c_1$, τότε $[x - y] = [x] - [y]$, αν $0 \leq c_0 - c_1 < 1$ και $[x - y] = [x] - [y] + 1$, αν $-1 < c_0 - c_1 < 0$.

Στην περίπτωση του παραδείγματος $c_0 = c_1 = c$.

Από την κατανομή Poisson στη διεργασία Poisson

Η κατανομή Poisson δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού συγκεκριμένων πιθανοτήτων για το πλήθος εμφανίσεων κάθε διακριτού φαινομένου που εξελίσσεται με τυχαίο τρόπο.

Αν ο ρυθμός άφιξης είναι σταθερός στην διάρκεια του χρόνου, το πλήθος αφίξεων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μήκους t , θα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda \cdot t$. Με τον τρόπο αυτό, το ίδιο το φαινόμενο είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί στα πλαίσια μίας διαδικασίας καταμέτρησης συνεχούς χρόνου,

$$\{N(t), t \geq 0\},$$

όπου $N(t) = \{\text{ο αριθμός των αφίξεων στο χρονικό διάστημα } (0, t]\}$ και $N(0) = 0$



Ορισμός διεργασίας Poisson

Ως **διεργασία Poisson** με μέση ένταση (mean rate or intensity) λ , **ορίζεται** μία στοχαστική διεργασία ακέραιων τιμών και συνεχούς χρόνου $\{N(t), t \geq 0\}$ για την οποία:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) Η $N(t)$, $t \geq 0$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

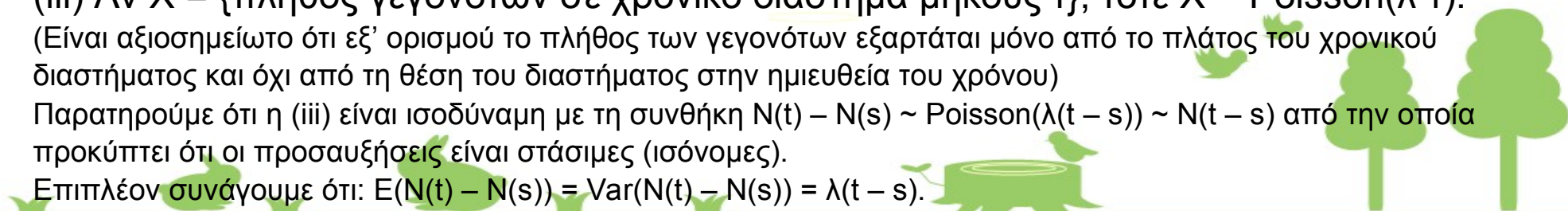
Δηλαδή: για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, οι προσαυξήσεις $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες τ.μ..

(iii) Αν $X = \{\text{πλήθος γεγονότων σε χρονικό διάστημα μήκους } t\}$, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$.

(Είναι αξιοσημείωτο ότι εξ' ορισμού το πλήθος των γεγονότων εξαρτάται μόνο από το πλάτος του χρονικού διαστήματος και όχι από τη θέση του διαστήματος στην ημιευθεία του χρόνου)

Παρατηρούμε ότι η (iii) είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s)) \sim N(t - s)$ από την οποία προκύπτει ότι οι προσαυξήσεις είναι στάσιμες (ισόνομες).

Επιπλέον συνάγουμε ότι: $E(N(t) - N(s)) = \text{Var}(N(t) - N(s)) = \lambda(t - s)$.



Ορισμός διεργασίας Poisson

Παρατήρηση

Η προϋπόθεση του ορισμού

“(ii) Η $N(t)$, $t \geq 0$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις”

είναι ουσιαστική. Είναι δυνατόν μία διεργασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ να ικανοποιεί την

“(iii) Αν $X = \{\text{πλήθος γεγονότων σε χρονικό διάστημα μήκους } t\}$, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$.”,
χωρίς ωστόσο να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία διεργασία τέτοια ώστε $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, για κάθε $s \geq 0$. Ορίζουμε

$$Z(t) = N(t+s) - N(s) \text{ για κάθε } t, s \geq 0.$$

Η διεργασία $\{Z(t), t \geq 0\}$ είναι διαδικασία καταμέτρησης, $Z(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, αλλά οι προσαυξήσεις της είναι εξαρτημένες καθώς για $m > s \geq 0$, $t_2 > t_1 \geq 0$ είναι

$$Z(t_2) - Z(t_1) = N(t_2+s) - N(t_1+s) \text{ και } Z(t_1) - Z(0) = N(t_1+m) - N(m),$$

τα διαστήματα $(t_1, t_2]$ και $(0, t_1]$ δεν επικαλύπτονται αλλά οι διαφορές $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ και $N(t_1+m) - N(m)$ είναι εξαρτημένες καθώς $m > s$ και τα διαστήματα $[t_1 + s, t_2 + s]$ και $[m, t_1 + m]$ επικαλύπτονται.

Ορισμός διεργασίας Poisson

Καθώς, αν $X = \{\text{πλήθος αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους } t\}$, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$, παρατηρούμε ότι σε μια διεργασία Poisson, **το πλήθος των γεγονότων σε οποιοδήποτε διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος** και όχι από την ακριβή θέση του διαστήματος στην ημιευθεία του χρόνου. Πράγματι, για κάθε $t_2 > t_1 \geq 0$ και $r > 0$, είναι

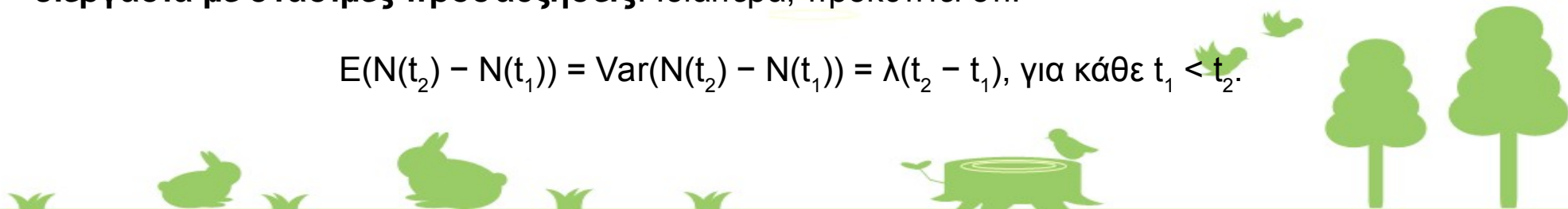
$$N(t_2 + r) - N(t_1 + r) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot [t_2 + r - (t_1 + r)]) = \text{Poisson}(\lambda \cdot (t_2 - t_1))$$

και

$$N(t_2) - N(t_1) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot (t_2 - t_1)).$$

Συμπεραίνουμε ότι $N(t_2 + r) - N(t_1 + r) \sim N(t_2) - N(t_1)$, επομένως, η διαδικασία Poisson **είναι διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις**. Ιδιαίτερα, προκύπτει ότι:

$$E(N(t_2) - N(t_1)) = \text{Var}(N(t_2) - N(t_1)) = \lambda(t_2 - t_1), \text{ για κάθε } t_1 < t_2.$$



Ορισμός διεργασίας Poisson

Από τον ορισμό της μία διεργασία Poisson ικανοποιεί την συνθήκη

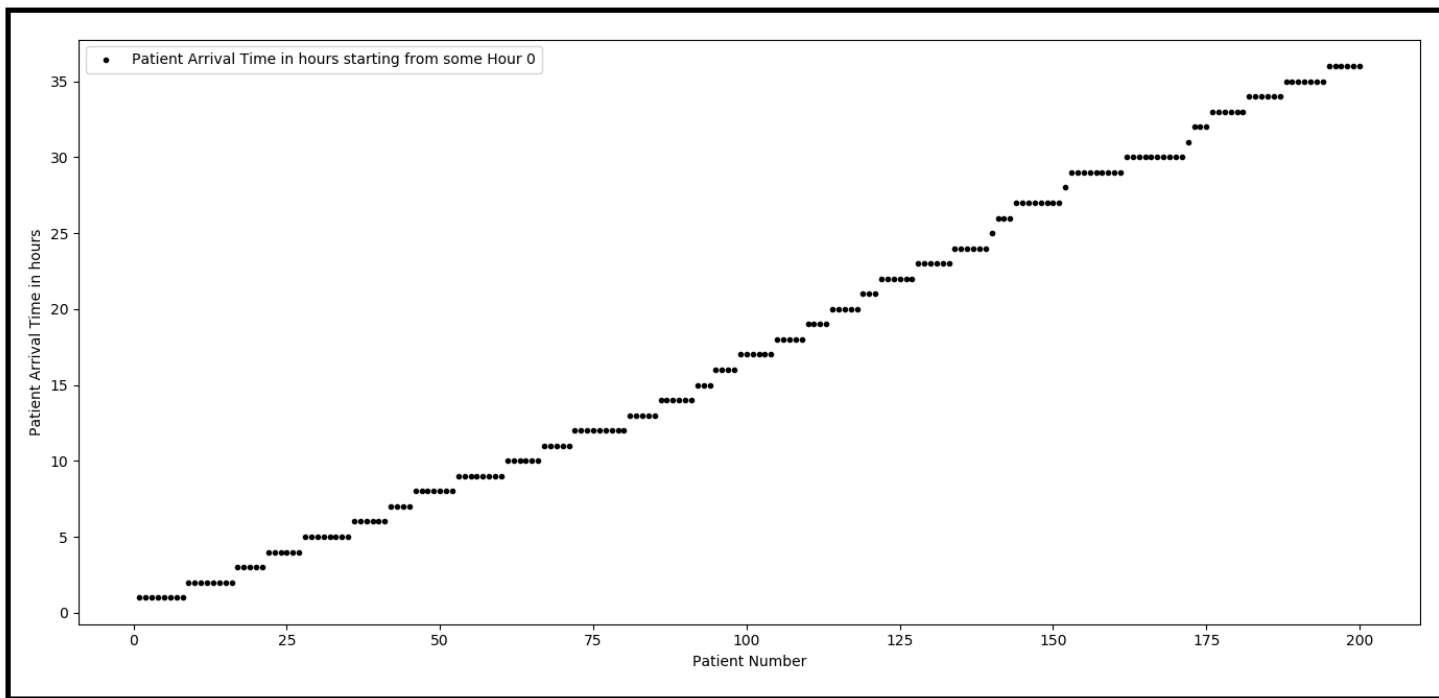
$$E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της $N(t)$ εξαρτάται από το t , ειδικότερα αυτή δεν είναι σταθερή. Προκύπτει ότι:

**Η διεργασία Poisson δεν είναι ούτε ισχυρά, ούτε ασθενώς
στάσιμη στοχαστική διεργασία.**



Διεργασία Poisson



Αφίξεις ασθενών σε ένα ιατρείο ως μία διεργασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με $\lambda = 1$ αφίξεις ανά ώρα.

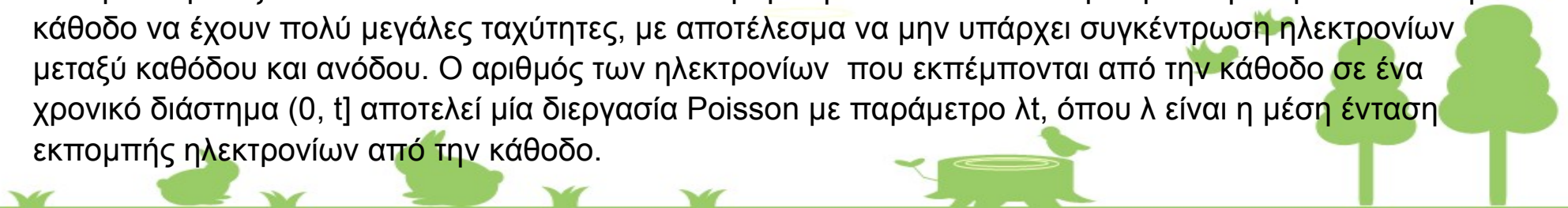
Εφαρμογές διεργασίας Poisson

Ραδιενεργή αποσύνθεση

Όλες οι σύγχρονες θεωρίες της ραδιενεργής αποσύνθεσης θεωρούν ότι σε μία ομάδα πυρήνων ενός δεδομένου στοιχείου όλοι οι πυρήνες είναι ίδιοι, ανεξάρτητοι και έχουν την ίδια πιθανότητα αποσύνθεσης σε μοναδιαίο χρόνο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι εκπομπές μίας ραδιενεργής πηγής αποτελούν μία διεργασία Poisson.

Θόρυβος βολής σε ηλεκτρονικές λυχνίες

Η ευαισθησία που επιτυγχάνεται με τους ηλεκτρονικούς ενισχυτές περιορίζεται από τις στιγμιαίες μεταβολές ρεύματος που συμβαίνουν σε τέτοια όργανα και οι οποίες καλούνται θόρυβος βολής, ο οποίος οφείλεται στις τυχαίες εκπομπές ηλεκτρονίων από την θερμαινόμενη κάθοδο. Ας υποθέσουμε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ καθόδου και ανόδου είναι τόσο μεγάλη ώστε όλα τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια από την κάθοδο να έχουν πολύ μεγάλες ταχύτητες, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει συγκέντρωση ηλεκτρονίων μεταξύ καθόδου και ανόδου. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο σε ένα χρονικό διάστημα $(0, t]$ αποτελεί μία διεργασία Poisson με παράμετρο λt , όπου λ είναι η μέση ένταση εκπομπής ηλεκτρονίων από την κάθοδο.



Εφαρμογές διεργασίας Poisson

Διακοπές μηχανών

Θεωρούμε ένα όργανο (όπως μία λυχνία κενού ή έναν απαριθμητή Geiger) το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί και μετά επισκευάζεται ή αντικαθίσταται από ένα όργανο του ίδιου τύπου. Η διάρκεια ζωής του οργάνου θεωρείται ότι είναι μία τυχαία μεταβλητή T . Οι διάρκειες ζωής $T_1, T_2, \dots, T_n$, η οργάνων που τέθηκαν σε λειτουργία θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή όπως η τυχαία μεταβλητή T . Για $t > 0$, έστω $N(t)$ ο αριθμός των οργάνων που απέτυχαν στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Αν η διάρκεια ζωής κάθε οργάνου είναι μία εκθετική κατανομή, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία διεργασία Poisson.



Ανεξάρτητες προσauξήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Η ιδιότητα των (στοχαστικά) ανεξάρτητων προσauξήσεων απλοποιεί την ανάλυση μιας διαδικασίας καταμέτρησης. Στα πλαίσια της διεργασίας Poisson, αν $0 \leq t_1 < t_2$, τότε

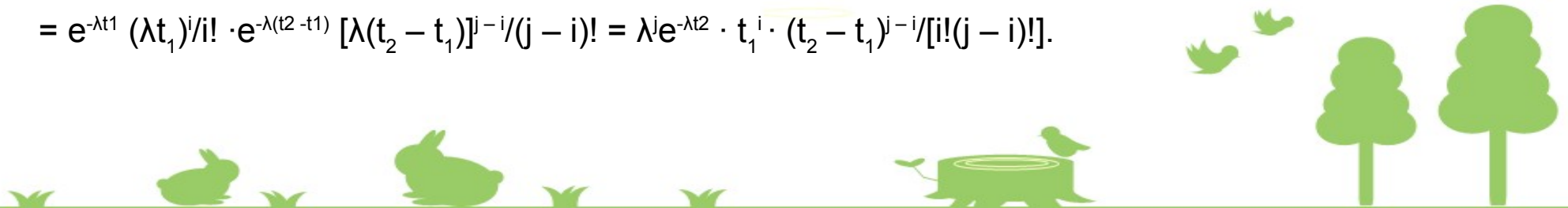
$P(N(t_1) = i, N(t_2) = j)$ (πιθανότητα να συμβούν i αφίξεις στο $[0, t_1)$ και j στο $[0, t_2)$)

$= P(N(t_1) = i, N(t_2) - N(t_1) = j - i)$ (πιθανότητα να συμβούν i αφίξεις στο $[0, t_1)$ και $j - i$ στο $[t_1, t_2)$)

$= P(N(t_1) = i, N(t_2 - t_1) = j - i)$ (ανεξάρτητες προσauξήσεις: $N(t_2) - N(t_1) \sim N(t_2 - t_1)$)

$= P(N(t_1) = i) \cdot P(N(t_2 - t_1) = j - i)$. (ανεξαρτησία πλήθους αφίξεων από τη θέση των διαστημάτων)

$= e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^i / i! \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} [\lambda(t_2 - t_1)]^{j-i} / (j-i)! = \lambda^j e^{-\lambda t_2} \cdot t_1^i \cdot (t_2 - t_1)^{j-i} / [i!(j-i)!]$.



Ανεξάρτητες προσυζητήσεις σε διεργασία καταμέτρησης

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα $(1, 2]$ και 3 αφίξεις στο διάστημα $(3, 5]$.

Επειδή τα διαστήματα $(1, 2]$ και $(3, 5]$ είναι ξένα, μπορούμε να γράψουμε

$P(2 \text{ αφίξεις σε } (1, 2] \text{ και } 3 \text{ αφίξεις σε } (3, 5])$

$$= P(2 \text{ αφίξεις σε } (1, 2]) \cdot P(3 \text{ αφίξεις σε } (3, 5])$$



Παράδειγμα 3

Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε ένα μάρκετ μπορεί να θεωρηθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες ανά ώρα.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20.

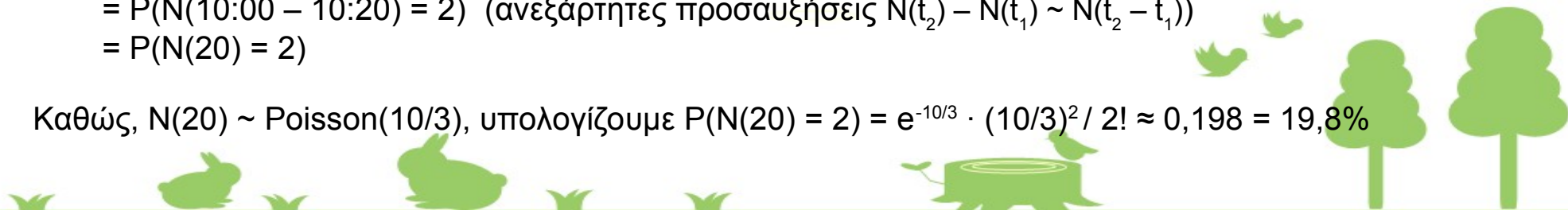
(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 3 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20 και 7 πελάτες μεταξύ 10:20 και 11.

Λύση

Έστω $N(t) = \{\text{πλήθος πελατών που φτάνουν στο μάρκετ μέχρι τη χρονική στιγμή } t\}$, τότε $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.
Είναι $\lambda = 10 \text{ πελάτες} / \text{ώρα} = 1/6 \text{ πελάτης} / \text{λεπτό}$, άρα $N(t) \sim \text{Poisson}(1/6 \cdot t)$.

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad & P(\{2 \text{ πελάτες μεταξύ } 10:00 \text{ και } 10:20\}) \\ &= P(N(10:00) - N(10:20) = 2) \\ &= P(N(10:00 - 10:20) = 2) \quad (\text{ανεξάρτητες προσαυξήσεις } N(t_2) - N(t_1) \sim N(t_2 - t_1)) \\ &= P(N(20) = 2) \end{aligned}$$

Καθώς, $N(20) \sim \text{Poisson}(10/3)$, υπολογίζουμε $P(N(20) = 2) = e^{-10/3} \cdot (10/3)^2 / 2! \approx 0,198 = 19,8\%$



Παράδειγμα 3

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 3 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20 και 7 πελάτες μεταξύ 10:20 και 11.

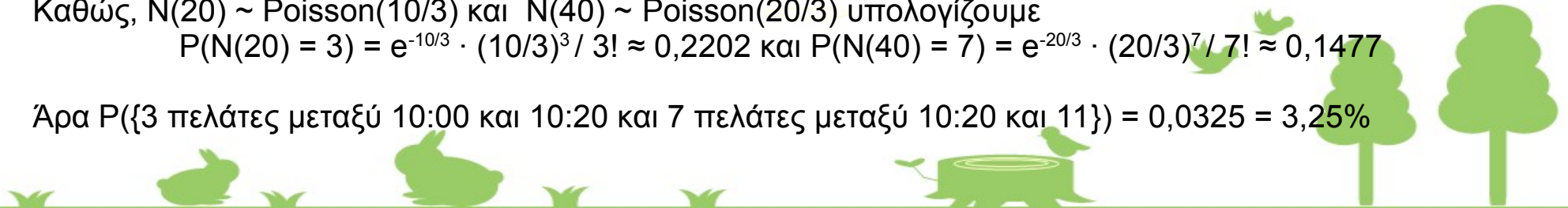
Λύση

Έστω $N(t) = \{\text{πλήθος πελατών που φτάνουν στο μάρκετ μέχρι τη χρονική στιγμή } t\}$, τότε $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.
Είναι $\lambda = 10 \text{ πελάτες / ώρα} = 1/6 \text{ πελάτης / λεπτό}$, άρα $N(t) \sim \text{Poisson}(1/6 \cdot t)$.

$$\begin{aligned}(\beta) P(\{3 \text{ πελάτες μεταξύ } 10:00 \text{ και } 10:20 \text{ και } 7 \text{ πελάτες μεταξύ } 10:20 \text{ και } 11\}) \\&= P(N(10:00) - N(10:20) = 3, N(10:20) - N(11:00) = 7) \\&= P(N(20) = 3, N(40) = 7) \text{ (ανεξάρτητες προσauξήσεις)} \\&= P(N(20) = 3) \cdot P(N(40) = 7) \text{ (ανεξαρτησία πλήθους γεγονότων από τη θέση των διαστημάτων)}\end{aligned}$$

Καθώς, $N(20) \sim \text{Poisson}(10/3)$ και $N(40) \sim \text{Poisson}(20/3)$ υπολογίζουμε
 $P(N(20) = 3) = e^{-10/3} \cdot (10/3)^3 / 3! \approx 0,2202$ και $P(N(40) = 7) = e^{-20/3} \cdot (20/3)^7 / 7! \approx 0,1477$

Άρα $P(\{3 \text{ πελάτες μεταξύ } 10:00 \text{ και } 10:20 \text{ και } 7 \text{ πελάτες μεταξύ } 10:20 \text{ και } 11\}) = 0,0325 = 3,25\%$



Παράδειγμα 4

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0,5$ αφίξεις / μονάδα χρόνου.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην συμβεί καμία άφιξη στο διάστημα $(3, 5]$.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα διαστήματα: $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ και $(3, 4]$.

Λύση

(α) Έστω Y το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(3, 5]$. Καθώς, το μήκος του διαστήματος είναι $\delta = 2$, θα είναι $Y \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot \delta) = \text{Poisson}(0,5 \cdot 2) = \text{Poisson}(1)$.

Υπολογίζουμε, $P(Y = 0) = e^{-1} \frac{1^0}{0!} = 1/e = 0,368 = 36,8\%$.



Παράδειγμα 4

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0,5$ αφίξεις / μονάδα χρόνου.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην συμβεί καμία άφιξη στο διάστημα $(3, 5]$.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα διαστήματα: $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ και $(3, 4]$.

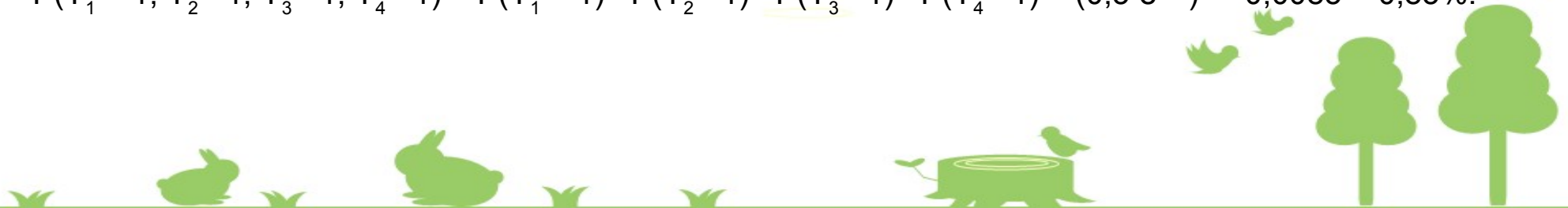
Λύση

(β) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , το πλήθος των αφίξεων στα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ και $(3, 4]$.

Κάθε ένα από τα διαστήματα έχει μήκος $\delta = 1$, άρα $Y_i \sim \text{Poisson}(0,5)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Επιπλέον, τα διαστήματα δεν είναι επικαλυπτόμενα, άρα οι Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε:

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1) = P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1) \cdot P(Y_3 = 1) \cdot P(Y_4 = 1) = (0,5 \cdot e^{-0,5})^4 = 0,0085 = 0,85\%.$$



Παράδειγμα 5

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 3$ αφίξεις / μονάδα χρόνου. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$.

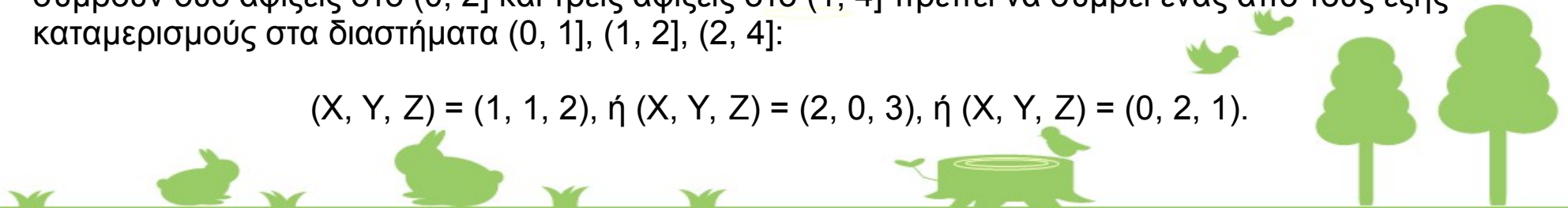
Λύση

Τα διαστήματα $(0, 2]$ και $(1, 4]$ επικαλύπτονται άρα το πλήθος αφίξεων που θα συμβούν στα δύο χρονικά διαστήματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Γράφουμε τα διαστήματα αυτά ως ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων.

$$(0, 2] \cup (1, 4] = (0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 4],$$

Αν X : αφίξεις στο $(0, 1]$, Y : αφίξεις στο $(1, 2]$ και Z : αφίξεις στο $(2, 4]$, τότε παρατηρούμε ότι για να συμβούν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$ πρέπει να συμβεί ένας από τους εξής καταμερισμούς στα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 4]$:

$$(X, Y, Z) = (1, 1, 2), \text{ ή } (X, Y, Z) = (2, 0, 3), \text{ ή } (X, Y, Z) = (0, 2, 1).$$



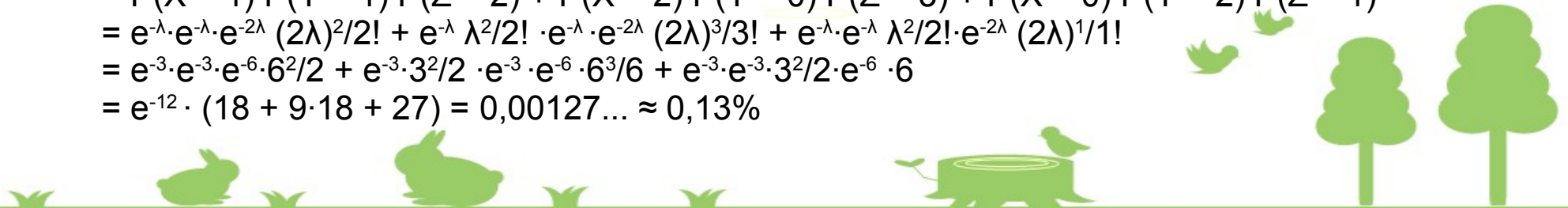
Παράδειγμα 5

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 3$ αφίξεις / μονάδα χρόνου. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$.

Λύση

Αν X, Y, Z είναι το πλήθος αφίξεων στα $(0, 1], (1, 2], (2, 4]$ αντίστοιχα, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 1)$, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 2)$ ή **$X \sim \text{Poisson}(3)$, $Y \sim \text{Poisson}(3)$, $Z \sim \text{Poisson}(6)$** . Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} &P(\{\text{δύο αφίξεις στο } (0, 2] \text{ και τρεις αφίξεις στο } (1, 4]\}) \\ &= P((X, Y, Z) = (1, 1, 2) \text{ ή } (X, Y, Z) = (2, 0, 3) \text{ ή } (X, Y, Z) = (0, 2, 1)) \\ &= P((X, Y, Z) = (1, 1, 2)) + P((X, Y, Z) = (2, 0, 3)) + P((X, Y, Z) = (0, 2, 1)) \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) \cdot P(Z = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0) \cdot P(Z = 3) + P(X = 0) \cdot P(Y = 2) \cdot P(Z = 1) \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^2/2! + e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^3/3! + e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^1/1! \\ &= e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^2/2 + e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^3/6 + e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-6} \cdot 6 \\ &= e^{-12} \cdot (18 + 9 \cdot 18 + 27) = 0,00127... \approx 0,13\% \end{aligned}$$



Παράδειγμα 5

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 3$ αφίξεις / μονάδα χρόνου. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$.

Παρατήρηση

Το ίδιο πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με εφαρμογή του νόμου ολικής πιθανότητας, διαμερίζοντας τις πιθανές περιπτώσεις ως προς τις τιμές της τ.μ. Y ως εξής:

$P(\{\text{δύο αφίξεις στο } (0, 2] \text{ και τρεις αφίξεις στο } (1, 4]\})$

$$= P(X + Y = 2, Y + Z = 3)$$

$$= \sum_{\kappa=0,1,\dots} P(X + Y = 2, Y + Z = 3, Y = \kappa)$$

$$= \sum_{\kappa=0,1,\dots} P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = \kappa) \cdot P(Y = \kappa)$$

$$= P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0)$$

$$+ P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) + P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 2) \cdot P(Y = 2)$$

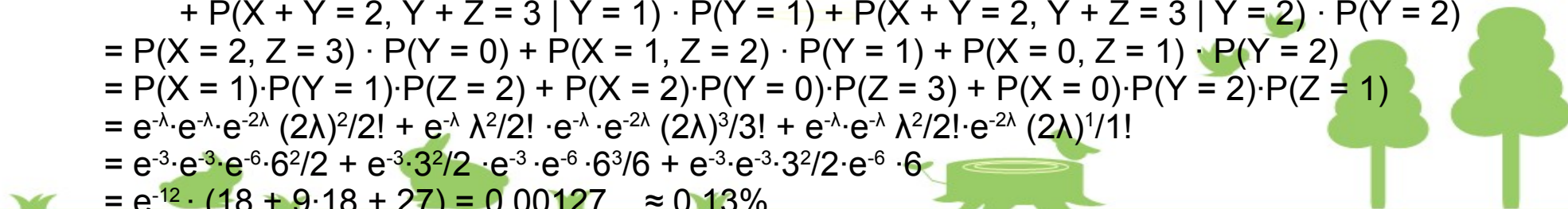
$$= P(X = 2, Z = 3) \cdot P(Y = 0) + P(X = 1, Z = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 0, Z = 1) \cdot P(Y = 2)$$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) \cdot P(Z = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0) \cdot P(Z = 3) + P(X = 0) \cdot P(Y = 2) \cdot P(Z = 1)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^2/2! + e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^3/3! + e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^1/1!$$

$$= e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^2/2 + e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^3/6 + e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-6} \cdot 6$$

$$= e^{-12} \cdot (18 + 9 \cdot 18 + 27) = 0,00127 \dots \approx 0,13\%$$



Παράδειγμα 6

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ . Να βρεθεί η συνάρτηση συνδιακύμανσης

$$C_N(t_1, t_2) = \text{Cov}(N(t_1), N(t_2)) = E(N(t_1) - \lambda t_1, N(t_2) - \lambda t_2),$$

συναρτήσει των t_1, t_2 για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$.

Λύση

Θα αξιοποιήσουμε τις εξής τρεις πληροφορίες για μία διεργασία Poisson:

(α) $N(t_2) - N(t_1) \sim N(t_2 - t_1)$, $t_2 > t_1 \geq 0$.

(β) Οι τ.μ. $N(t_1)$, $N(t_2 - t_1)$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες για κάθε $t_2 > t_1 \geq 0$ (ανεξάρτητες προσauξήσεις).

(γ) $N(t_1) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t_1)$ και $N(t_2) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t_2)$



Παράδειγμα 6

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ . Να βρεθεί η συνάρτηση συνδιακύμανσης

$$C_N(t_1, t_2) = \text{Cov}(N(t_1), N(t_2)) = E[(N(t_1) - \lambda t_1)(N(t_2) - \lambda t_2)],$$

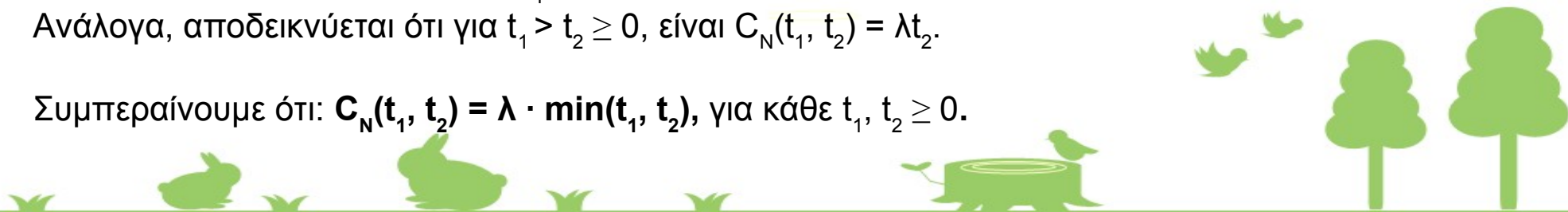
συναρτήσει των t_1, t_2 για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Για } t_2 > t_1 \geq 0, \text{ είναι: } C_N(t_1, t_2) &= \text{Cov}(N(t_1), N(t_2)) \\ &= \text{Cov}(N(t_1), N(t_2) - N(t_1) + N(t_1)) \\ &= \text{Cov}(N(t_1), N(t_2 - t_1) + N(t_1)) \\ &= \text{Cov}(N(t_1), N(t_2 - t_1)) + \text{Cov}(N(t_1), N(t_1)) \\ &= 0 + \text{Var}(N(t_1)) \\ &= \lambda t_1. \end{aligned}$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι για $t_1 > t_2 \geq 0$, είναι $C_N(t_1, t_2) = \lambda t_2$.

Συμπεραίνουμε ότι: $C_N(t_1, t_2) = \lambda \cdot \min(t_1, t_2)$, για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$.



Χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$, διεργασία Poisson με παράμετρο λ . Έστω

X_1 : ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^ο γεγονός.

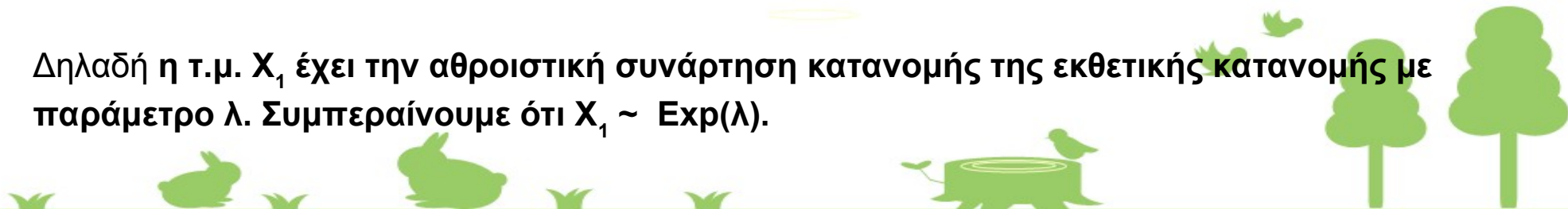
Αναζητούμε την κατανομή της τ.μ. X , δηλαδή, την τιμή της πιθανότητας $P(X_1 \leq t)$, για $t \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$\{X_1 > t\} = \{\text{δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο χρονικό διάστημα } (0, t]\} = \{N(t) = 0\},$$

άρα, $P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \lambda^0 / 0! = e^{-\lambda t}$ ή $P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_1 \leq t) = 0$, $t < 0$),

Δηλαδή η τ.μ. X_1 έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ . Συμπεραίνουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.



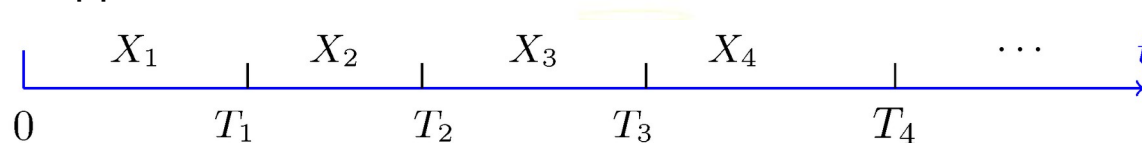
Χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός

Βρήκαμε, ότι αν X_1 : ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^ο γεγονός, τότε $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Άμεσα συμπεράσματα είναι τα εξής:

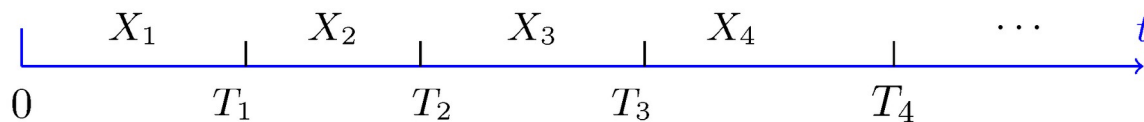
- Αναμενόμενος χρόνος μέχρι το 1^ο γεγονός: $E(X_1) = 1/\lambda$
- Διασπορά χρόνου μέχρι το 1^ο γεγονός: $\text{Var}(X_1) = 1/\lambda^2$.

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κατανομή του χρόνου X_i , $i = 2, 3, \dots$, που μεσολαβεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβάντων.



Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Έστω X_n το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ του $n-1$ και του n γεγονότος. Αναζητούμε την κατανομή πιθανότητας της X_n .



Είναι: $P(X_n > t) = P(\{\text{κανένα γεγονός στο διάστημα } (s, s+t]\})$ (s η στιγμή που συνέβη το προηγούμενο γεγονός)

$$= P(N(s + t) - N(s) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0)$$

(ανεξάρτητες προσauξήσεις)

$$= e^{-\lambda t}.$$

Όμοια με την περίπτωση της X_1 συμπεραίνουμε, ότι $P(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ ή

$$P(X_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \text{ (και } P(X_n \leq t) = 0, t < 0).$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. X_n έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , δηλαδή $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Σημείωση: $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, άρα $E(X_n) = 1/\lambda$ και $\text{Var}(X_n) = 1/\lambda^2$.

Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Σύνοψη

Αν X το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο (οποιασδήποτε) γεγονότων, τότε

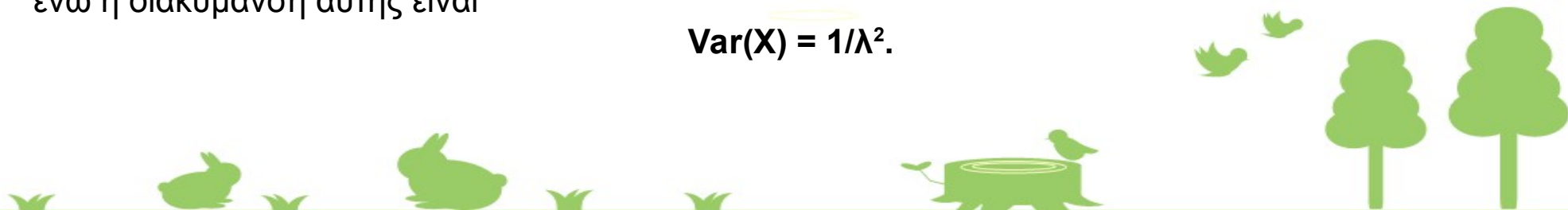
$$X \sim \text{Exp}(\lambda),$$

όπου λ το αναμενόμενο πλήθος αφίξεων στη μονάδα του χρόνου. Η αναμενόμενη τιμή της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο αφίξεων είναι

$$E(X) = 1/\lambda$$

ενώ η διακύμανση αυτής είναι

$$\text{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$



Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Σε μία διεργασία Poisson, **ο αριθμός των αφίξεων** που συμβαίνει σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι **ανεξάρτητος ο ένας με τον άλλο** (ιδιότητα ανεξάρτητων προσauξήσεων που αποδίδεται στη διεργασία Poisson από τον ορισμό της).

Αυτή η ανεξαρτησία εκφράζεται και **στους χρόνους μεταξύ των αφίξεων**, καθώς

$$\text{για κάθε } t_0, x \geq 0, P(X > x + t_0 \mid X > t_0) = P(X > x).$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} P(X > x + t_0 \mid X > t_0) &= \\ &= P(X > x + t_0, X > t_0) / P(X > t_0) \\ &= P(X > x + t_0) / P(X > t_0) \\ &= e^{-\lambda(x + t_0)} / e^{-\lambda t_0} = e^{-\lambda x} \\ &= P(X > x). \end{aligned}$$



Ομοιομορφία χρόνου δεδομένης της άφιξης

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ . Τότε, **αν γνωρίζουμε πως έχει συμβεί μία άφιξη μέχρι τη χρονική στιγμή t ($N(t) = 1$)**, ο χρόνος x που αυτή έχει συμβεί, $0 \leq x \leq t$, έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, t]$. Δηλαδή, αν X_1 η χρονική στιγμή που έγινε η 1^η άφιξη, τότε:

$$P(X_1 \leq x \mid N(t) = 1) = x/t, \quad 0 \leq x \leq t.$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$, άρα $P(N(t) = 1) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^1 / 1! = \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$. Είναι:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x, N(t) = 1) &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x] \text{ και } 0 \text{ αφίξεις στο } (x, t]\}) \\ &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x]\}) \cdot P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (x, t]\}) \\ &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x]\}) \cdot P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (0, t - x]\}) \\ &= e^{-\lambda x} (\lambda x)^1 / 1! \cdot e^{-\lambda(t-x)} (\lambda(t-x))^0 / 0! = \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Τώρα, $P(X_1 \leq x \mid N(t) = 1) = P(X_1 \leq x, N(t) = 1) / P(N(t) = 1) = \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda t} / \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t} = x/t$.

Σημείωση: Το αποτέλεσμα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ το οποίο εκφράζει το χρόνο που **αναμένεται να συμβεί** η 1^η άφιξη. Γνωρίζοντας όμως ότι η πρώτη άφιξη συμβαίνει έως τη χρονική στιγμή t , η πιθανότητα να έχει συμβεί μέσα στο $(0, t]$ κατανέμεται ομοιόμορφα σε αυτό.

Ομοιομορφία χρόνου δεδομένης της άφιξης

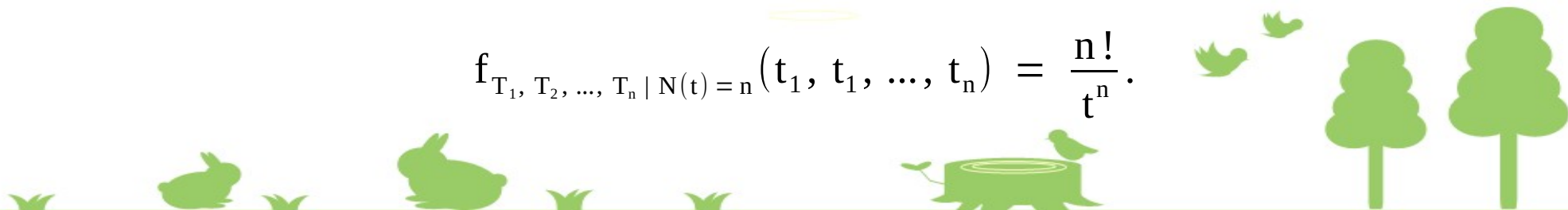
Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ . Ναδειχθεί ότι, αν γνωρίζουμε πως έχει συμβεί μία άφιξη μέχρι τη χρονική στιγμή t ($N(t) = 1$), τότε ο χρόνος x που αυτή έχει συμβεί, $0 \leq x \leq t$, έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, t]$. Δηλαδή, ότι, αν X_1 η χρονική στιγμή που έγινε η 1^η άφιξη, τότε:

$$P(X_1 \leq x \mid N(t) = 1) = x/t, \quad 0 \leq x \leq t.$$

Παρατήρηση

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται για n αφίξεις. Δηλαδή, γνωρίζοντας ότι έχουν συμβεί n αφίξεις στο διάστημα $(0, t]$ ($N(t) = n$), οι n χρόνοι άφιξης κατανέμονται όπως προβλέπεται από την κοινή συνάρτηση κατανομής n ανεξάρτητων ομοιόμορφων $U(0, t)$ τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n \mid N(t) = n}(t_1, t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n}.$$



Παράδειγμα 7

Έστω $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min.

(α) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1η άφιξη.

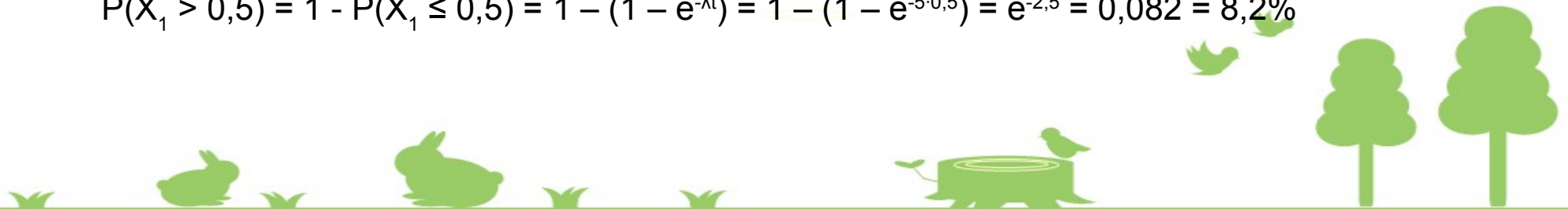
(β) Να βρεθεί η πιθανότητα η 1η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $E(X_1) = 1/\lambda = 1/5 \text{ min} = 0,2 \text{ min} = 12 \text{ sec.}$

(β) Γνωρίζουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(5)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0,5) = 1 - P(X_1 \leq 0,5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0,5}) = e^{-2,5} = 0,082 = 8,2\%$$



Παράδειγμα 8

Αν γνωρίζουμε ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας ενός εστιατορίου έχει έρθει ένας πελάτης, να βρεθεί η πιθανότητα αυτός

(α) να έχει έρθει στα πρώτα 10 λεπτά.

(β) να έχει έρθει μεταξύ του 25 και του 40 λεπτού της ώρας.

Λύση

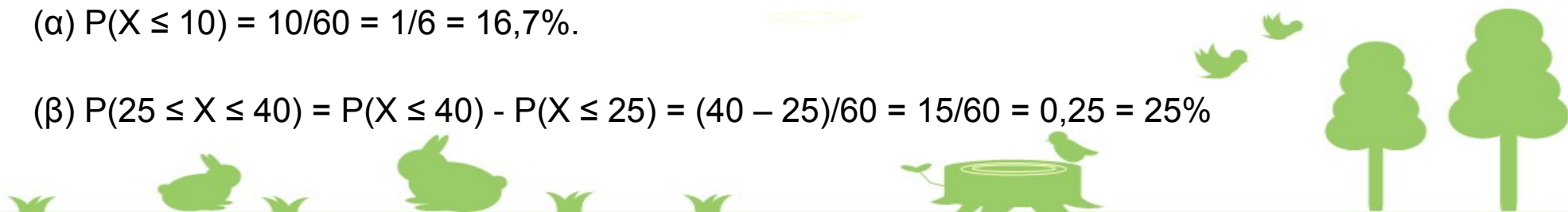
Έστω $N(t) = \{\text{πλήθος πελατών στο διάστημα } (0, t]\}$ και t : ο χρόνος σε λεπτά.

Γνωρίζουμε ότι ο πελάτης έχει αφιχθεί μέσα στα πρώτα 60 λεπτά, δηλαδή ότι $N(60) = 1$.

Αν X η τ.μ. που αναπαριστά τη στιγμή της άφιξης μέσα στο διάστημα $(0, 60]$, τότε η τ.μ. X έχει κατανομή $U(0, 60)$, άρα:

$$(α) P(X \leq 10) = 10/60 = 1/6 = 16,7\%.$$

$$(β) P(25 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 25) = (40 - 25)/60 = 15/60 = 0,25 = 25\%$$



Παράδειγμα 9

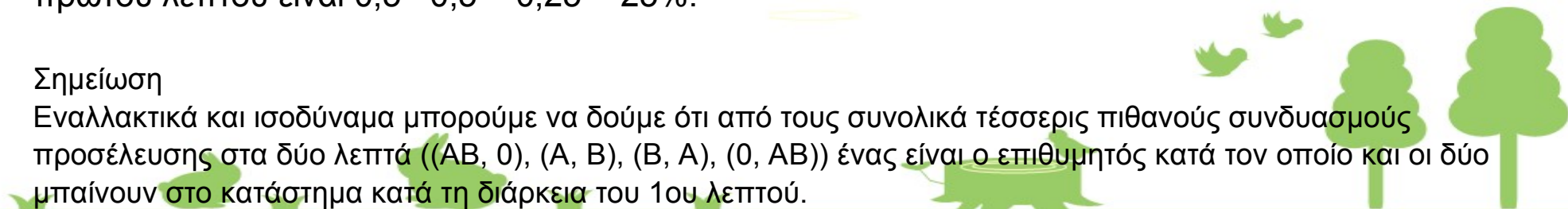
Να βρεθεί η πιθανότητα, δύο πελάτες που έχουν αφιχθεί σε ένα κατάστημα τα πρώτα δύο λεπτά από τη στιγμή που άνοιξε, να έχουν αφιχθεί στο πρώτο από τα δύο λεπτά. Οι αφίξεις των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι δύο πελάτες **A** και **B** έχουν αφιχθεί στα πρώτα δύο λεπτά. Κάθε πελάτης μπορεί να έχει μπει είτε στο 1ο είτε στο 2ο λεπτό και ο χρόνος προσέλευσης του κάθε ενός ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, άρα έχουν αφιχθεί κατά τη διάρκεια του 1ου λεπτού με πιθανότητα 50% στο κάθε ένα. Καθώς, οι αφίξεις των πελατών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα και οι δύο πελάτες να έχουν μπει στο κατάστημα κατά τη διάρκεια του πρώτου λεπτού είναι $0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$.

Σημείωση

Εναλλακτικά και ισοδύναμα μπορούμε να δούμε ότι από τους συνολικά τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς προσέλευσης στα δύο λεπτά ((AB, 0), (A, B), (B, A), (0, AB)) ένας είναι ο επιθυμητός κατά τον οποίο και οι δύο μπαίνουν στο κατάστημα κατά τη διάρκεια του 1ου λεπτού.



Παράδειγμα 10

Έστω $N(t)$ μια διεργασία Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ συμβάντα / λεπτό και έστω $X_1, X_2, \dots$, οι αντίστοιχοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

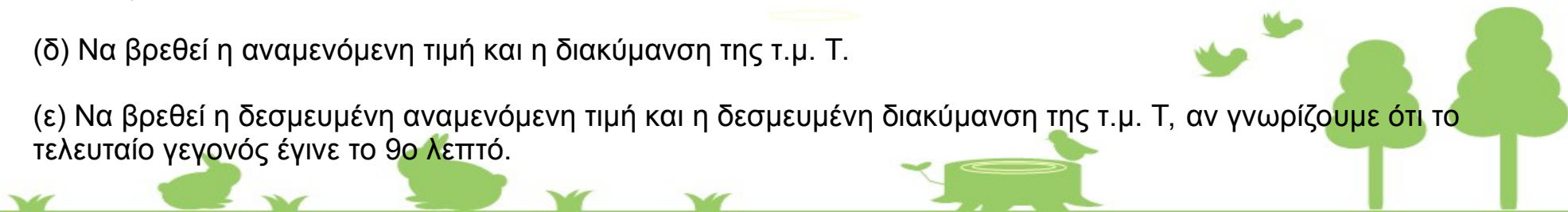
(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Ξεκινούμε να παρακολουθούμε τη διαδικασία το 10ο λεπτό. Έστω T η χρονική στιγμή που βλέπουμε το πρώτο γεγονός.

(δ) Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. T .

(ε) Να βρεθεί η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή και η δεσμευμένη διακύμανση της τ.μ. T , αν γνωρίζουμε ότι το τελευταίο γεγονός έγινε το 9ο λεπτό.



Παράδειγμα 10

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

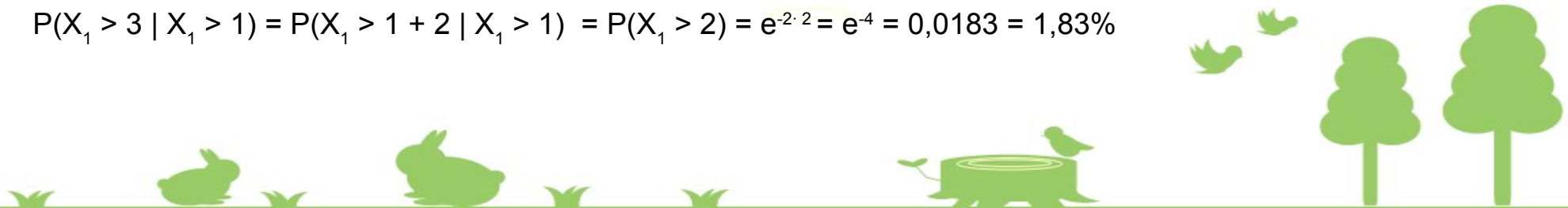
Είναι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $\lambda = 2$, άρα $X_1 \sim \text{Exp}(2)$.

Υπολογίζουμε $P(X_1 > 0,5) = e^{-2 \cdot 0,5} = e^{-1} = 0,368 = 36,8\%$.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

Λύση

$$P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 1 + 2 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0,0183 = 1,83\%$$



Παράδειγμα 10

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Λύση

Αν X_3 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 2η και 3η μέτρηση τότε $X_3 \sim \text{Exp}(2)$.

Αν X_4 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 3η και 4η μέτρηση τότε $X_4 \sim \text{Exp}(2)$.

{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} = $\{X_4 > 4\}$

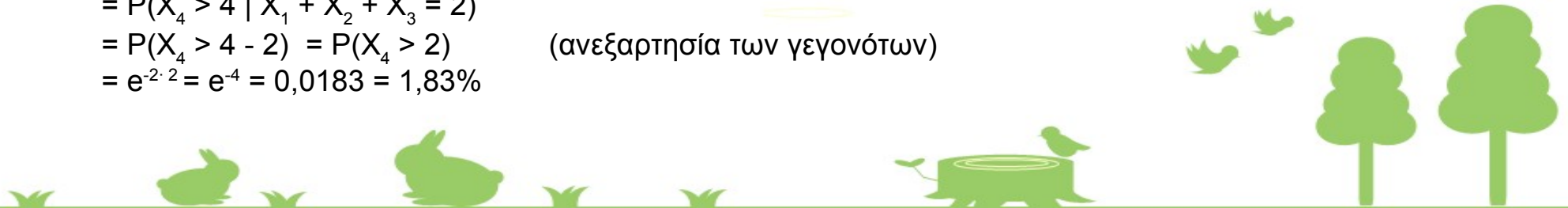
{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 = 2\}$

$P(\{\text{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό}\} \mid \{\text{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό}\}) =$

$$= P(X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2)$$

$$= P(X_4 > 4 - 2) = P(X_4 > 2) \quad (\text{ανεξαρτησία των γεγονότων})$$

$$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0,0183 = 1,83\%$$



Παράδειγμα 10

Ξεκινούμε να παρακολουθούμε τη διαδικασία το 10ο λεπτό. Έστω T η χρονική στιγμή που βλέπουμε το πρώτο γεγονός.

(δ) Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. T .

Λύση

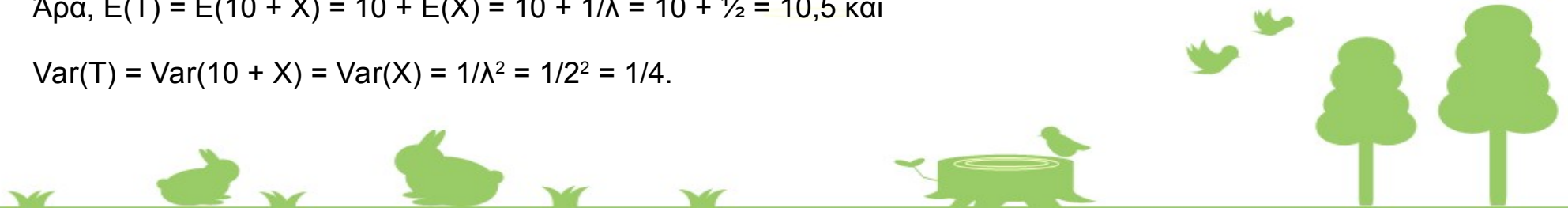
Μετά, το 10ο λεπτό παρακολουθούμε μία διεργασία Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς, αν

$$T = \{\text{χρονικό διάστημα μέχρι το 1ο γεγονός (μετά το 10ο λεπτό)}\}$$

είναι τότε $T = 10 + X$, όπου $X \sim \text{Exp}(2)$.

Άρα, $E(T) = E(10 + X) = 10 + E(X) = 10 + 1/\lambda = 10 + 1/2 = 10,5$ και

$\text{Var}(T) = \text{Var}(10 + X) = \text{Var}(X) = 1/\lambda^2 = 1/2^2 = 1/4$.



Παράδειγμα 10

Ξεκινούμε να παρακολουθούμε τη διαδικασία το 10ο λεπτό. Έστω T η χρονική στιγμή που βλέπουμε το πρώτο γεγονός.

(ε) Να βρεθεί η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή και η δεσμευμένη διακύμανση της τ.μ. T , αν γνωρίζουμε ότι το τελευταίο γεγονός έγινε το 9ο λεπτό.

Λύση

Τα γεγονότα που συμβαίνουν μετά το 10ο λεπτό, είναι ανεξάρτητα από τα γεγονότα πριν το 10ο λεπτό, ως εκ τούτου, αν

$A = \{\text{το τελευταίο γεγονός έγινε το 9ο λεπτό}\}$ και

$T = \{\text{χρονικό διάστημα μέχρι το 1ο γεγονός (μετά το 10ο λεπτό)}\}$

Τότε $E(T | A) = E(T) = 10,5$ και $\text{Var}(T | A) = \text{Var}(T) = 1/4$.

