



Στοχαστικές Διεργασίες

5^ο Εξάμηνο – Επιλογής

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π)



Συμπλήρωμα θεωρίας:
Πλήθος αναμενόμενων επισκέψεων και πιθανότητα
επίσκεψης



P_4 : Αλυσίδες απορρόφησης

Αναμενόμενες επισκέψεις από μία κατάσταση i σε μία άλλη κατάσταση j σε οποιαδήποτε αλυσίδα

Ο πίνακας μετάβασης P μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο 1) ενώ ο πίνακας P^n περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης n βημάτων (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο n).

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i , τότε, το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j θα είναι μετά από:

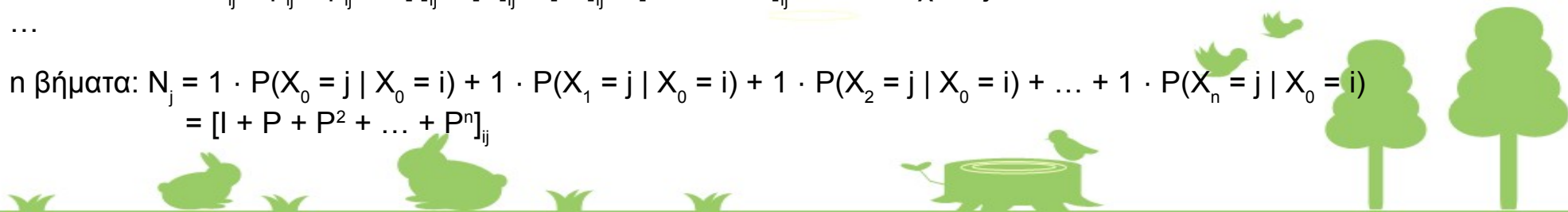
0 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j | X_0 = i) = \delta_{ij} = \{0 \text{ αν } i \neq j \text{ και } 1 \text{ αν } i = j\} = [I]_{ij}$: Το στοιχείο ij του πίνακα I .

1 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j | X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j | X_0 = i) = \delta_{ij} + p_{ij} = [I + P]_{ij}$: Το στοιχείο ij του πίνακα $I + P$.

2 βήματα: $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j | X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j | X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j | X_0 = i)$
 $= \delta_{ij} + p_{ij} + p_{ij}^{(2)} = [I]_{ij} + [P]_{ij} + [P^2]_{ij} = [I + P + P^2]_{ij}$: Το στοιχείο ij του πίνακα $I + P + P^2$.

...

n βήματα: $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j | X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j | X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j | X_0 = i) + \dots + 1 \cdot P(X_n = j | X_0 = i)$
 $= [I + P + P^2 + \dots + P^n]_{ij}$



P_4 : Αλυσίδες απορρόφησης

Αναμενόμενες επισκέψεις

Βρήκαμε ότι:

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i , τότε, το **αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων** στην κατάσταση j **μετά από n βήματα** είναι:

$$N_j = [I + P + P^2 + \dots + P^n]_{ij}$$

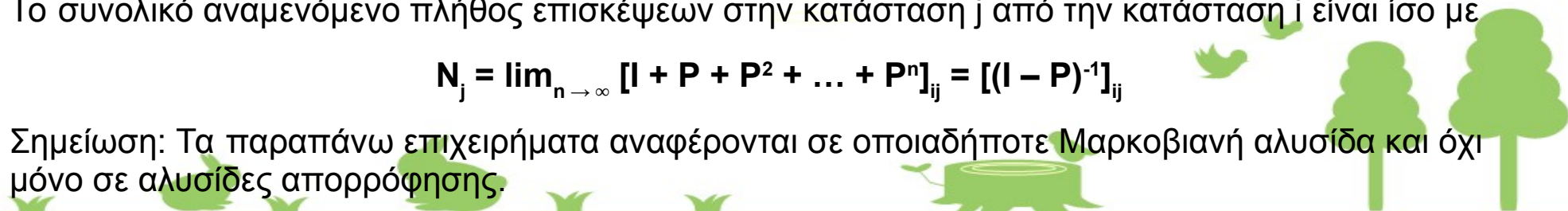
Δηλαδή, τα στοιχεία του πίνακα $I + P + P^2 + \dots + P^n$ αντιπροσωπεύουν το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από κάθε αρχική κατάσταση i στο βήμα 0 σε οποιαδήποτε κατάσταση j στο βήμα n .

Αν επιπλέον $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbf{O}$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + P + P^2 + \dots + P^n) = (I - P)^{-1}$ και έχουμε ότι:

Το συνολικό αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j από την κατάσταση i είναι ίσο με

$$N_j = \lim_{n \rightarrow \infty} [I + P + P^2 + \dots + P^n]_{ij} = [(I - P)^{-1}]_{ij}$$

Σημείωση: Τα παραπάνω επιχειρήματα αναφέρονται σε οποιαδήποτε Μαρκοβιανή αλυσίδα και όχι μόνο σε αλυσίδες απορρόφησης.



P_4 : Αλυσίδες απορρόφησης

Πιθανότητα μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις

Έστω $S = T \cup A$, όπου T οι μεταβατικές καταστάσεις και A οι απορροφητικές καταστάσεις μίας απορροφητικής αλυσίδας. Έστω R ο πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές T στις απορροφητικές A καταστάσεις και Q ο πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην μεταβατική κατάσταση $t \in T$, τότε η πιθανότητα να μεταβεί στην απορροφητική κατάσταση $a \in A$, μετά από:

1 βήματα: $P(X_1 = a \mid X_0 = t) = [R]_{ta} = [I \cdot R]_{ta}$

2 βήματα: $P(X_2 = a \mid X_0 = t) = \sum_{k1 \in T} P(X_2 = a \mid X_1 = k1) \cdot P(X_1 = k1 \mid X_0 = t) = \sum_{k \in T} [R]_{k1a} [Q]_{tk1} = \sum_{k \in T} [Q]_{tk1} [R]_{k1a} = [Q \cdot R]_{ta}$

3 βήματα: $P(X_3 = a \mid X_0 = t) = \sum_{k2 \in T} \sum_{k1 \in T} P(X_3 = a \mid X_2 = k2) \cdot P(X_2 = k2 \mid X_1 = k1) \cdot P(X_1 = k1 \mid X_0 = t)$
 $= \sum_{k2 \in T} \sum_{k1 \in T} [R]_{k2a} \cdot [Q]_{k1k2} \cdot [Q]_{tk1} = \sum_{k2 \in T} [R]_{k2a} (\sum_{k1 \in T} [Q]_{k1k2} \cdot [Q]_{tk1})$
 $= \sum_{k2 \in T} [R]_{k2a} [Q^2]_{tk2} = \sum_{k2 \in T} [Q^2]_{tk2} [R]_{k2a} = [Q^2 \cdot R]_{ta}$

n βήματα: $P(X_n = a \mid X_0 = t) = \dots = [Q^n \cdot R]_{ta}$



P_4 : Αλυσίδες απορρόφησης

Πιθανότητα μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις

Η αλυσίδα μπορεί να μεταβεί από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις σε 1, 2, ... βήματα. Φανερά, τα ενδεχόμενα $M_{ta}^n = \{\text{η αλυσίδα μεταβαίνει σε } n \text{ βήματα από την } t \text{ στην } a\} = P(X_n=a \mid X_0=t)$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Άρα, η πιθανότητα μετάβασης σε οποιοδήποτε βήμα από την μεταβατική κατάσταση $t \in T$, στην απορροφητική κατάσταση $a \in A$ είναι

$$\begin{aligned} P(t \rightarrow a) &= P(M_{ta}^0) + P(M_{ta}^1) + P(M_{ta}^2) + \dots = \\ &= [I \cdot R]_{ta} + [Q \cdot R]_{ta} + [Q^2 \cdot R]_{ta} + \dots = \\ &= [(I + Q + Q^2 + \dots) \cdot R]_{ta} \\ &= [N \cdot R]_{ta}, \end{aligned}$$

Όπου $N = I + Q + Q^2 + \dots = (I - Q)^{-1}$, ο βασικός πίνακας της απορροφητικής αλυσίδας.

Δηλαδή: Ο πίνακας $N \cdot R$ περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας $N \cdot R$ ονομάζεται και **πίνακας λύσεων** της αλυσίδας.

Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες



P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται **αδιαχώριστη (indecomposable ή irreducible)** ή **μη διαχωρίσιμη** αν αποτελείται από μόνο μία βασική κλάση καταστάσεων, δηλαδή όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν η μία από την άλλη.

Φανερά, μία αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μπορεί να περιέχει απορροφητικές καταστάσεις.



P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Δραστηριότητα 1

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P είναι αδιαχώριστη, όπου

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

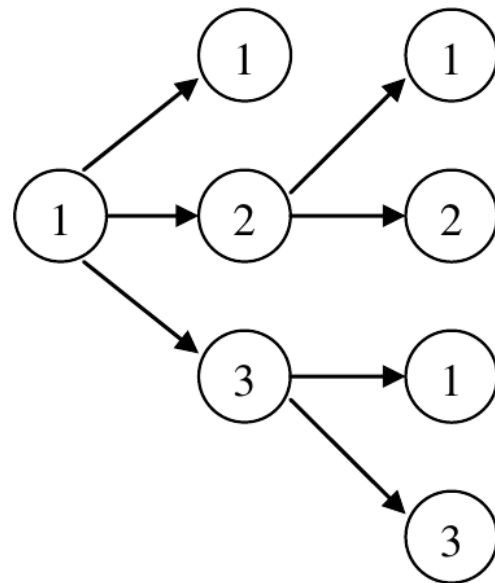


P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Λύση

Το διάγραμμα ροής των καταστάσεων είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$



Καθώς οι καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$ αποτελούν μία βασική κλάση καταστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Παράδειγμα

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες με πίνακες μετάβασης P_1 και P_2 δεν είναι αδιαχώριστες (γιατί;).

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

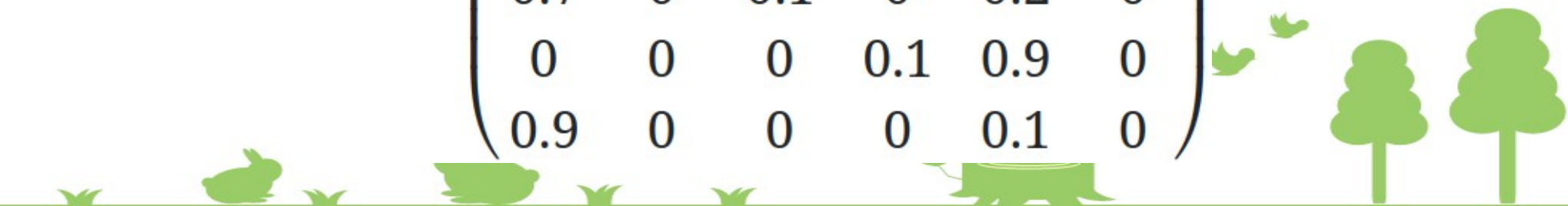


P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Δραστηριότητα 2

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P_3 είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

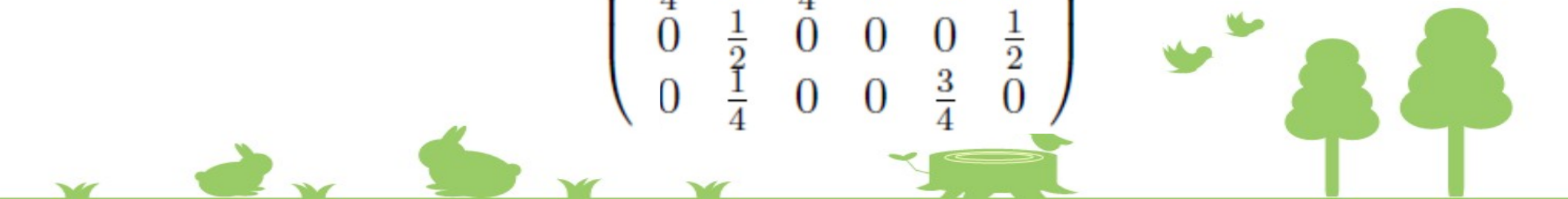


P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Δραστηριότητα 2

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, με πίνακα μετάβασης P δεν είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

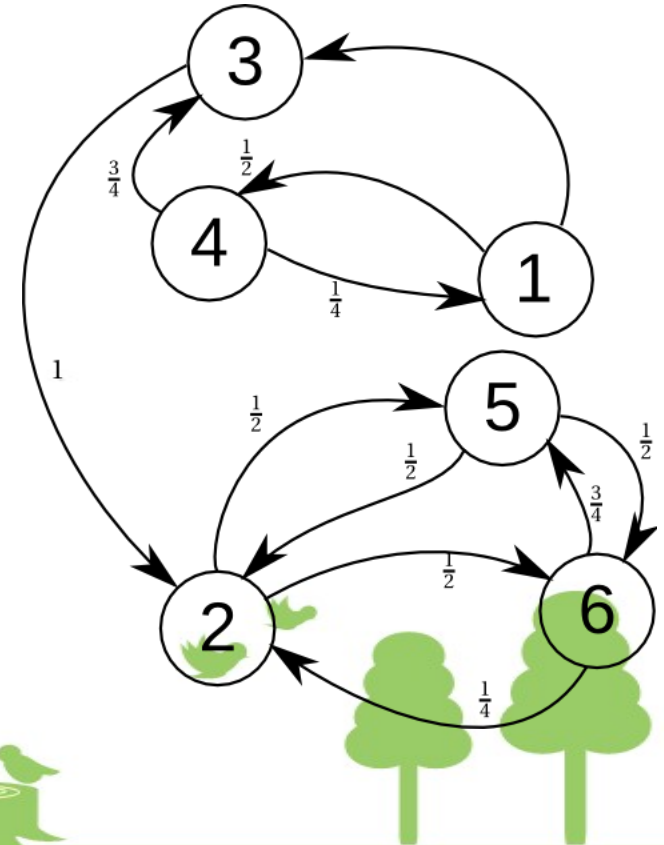


P_4 : Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Λύση δραστηριότητας 2

Δεν είναι αδιαχώριστη καθώς οι $\{1, 4\}$, $\{3\}$ και $\{2, 5, 6\}$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας.

Επιπλέον, η $\{3\}$ είναι κατάσταση απορρόφησης και η $\{2, 5, 6\}$ είναι κλάση απορρόφησης.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Εισαγωγή

Αν $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j)$, το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ είναι το οριακό διάνυσμα πιθανοτήτων της κατανομής και περιγράφει τις πιθανότητες για οποιαδήποτε τελική κατάσταση που μπορεί να βρεθεί η αλυσίδα. Ανακύπτουν δύο ερωτήματα

α) Υπάρχει το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$;

β) Αν υπάρχει τότε πώς υπολογίζεται;



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

α) Υπάρχει το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$;

Απάντηση

Αποδεικνύεται ότι για κάθε ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων το διάνυσμα

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k), \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j), j = 1, 2, \dots, k,$$

υπάρχει χωρίς ωστόσο να είναι απαραίτητα μοναδικό. Αν επιπλέον, η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε αποδεικνύεται πως είναι μοναδικό.

Σημειώσεις

1. Μία απόδειξη για την ύπαρξη είναι διαθέσιμη εδώ: <http://homepages.math.uic.edu/~furman/preprints/whatis-published.pdf>

Ειδικότερα, αν δεν υπάρχουν μηδενικές καταχωρήσεις είναι συνέπεια του Θεωρήματος Perron-Frobenius.

2. Αν υπάρχει παραπάνω από μία οριακή κατανομή τότε κάθε γραμμικός τους συνδυασμός είναι επίσης οριακή κατανομή, δηλαδή τελικά είναι άπειρες σε πλήθος.

3. Κάθε απορροφητική αλυσίδα έχει παραπάνω από μία οριακή κατανομή.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

β) Αν υπάρχει τότε πώς υπολογίζεται;

Απάντηση

Θέτουμε $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ και υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ ορίζεται καλώς. Από τη σχέση

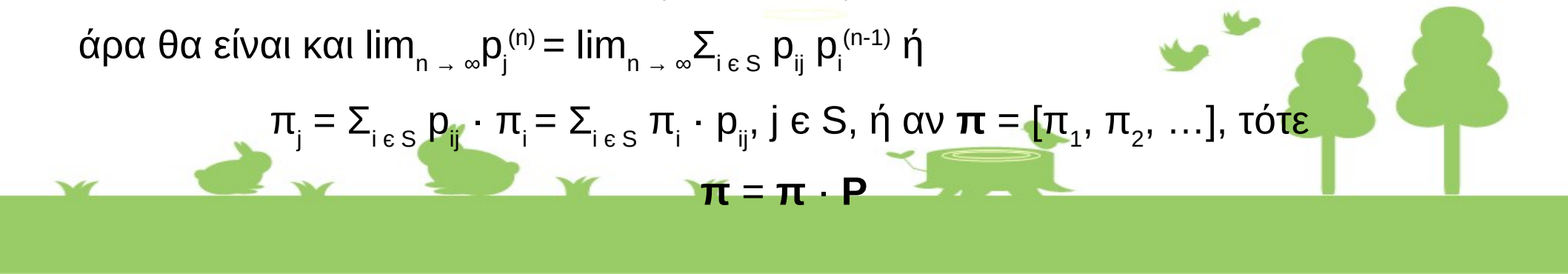
$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \cdot P(X_{n-1} = i)$$

παίρνουμε

$$p_j^{(n)} = \sum_{i \in S} p_{ij} p_i^{(n-1)}$$

άρα θα είναι και $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} p_{ij} p_i^{(n-1)}$ ή

$$\pi_j = \sum_{i \in S} p_{ij} \cdot \pi_i = \sum_{i \in S} \pi_i \cdot p_{ij}, j \in S, \text{ ή αν } \pi = [\pi_1, \pi_2, \dots], \text{ τότε}$$

$$\pi = \pi \cdot P$$


P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Δηλαδή: Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$$\pi = \pi \cdot P$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

μπορεί να οδηγήσει στον εντοπισμό των οριακών πιθανοτήτων, δηλαδή των πιθανοτήτων με τις οποίες λαμβάνεται κάθε διαφορετική κατάσταση καθώς το πλήθος των βημάτων τείνει στο άπειρο.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Παράδειγμα 1

Έστω $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ και $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις $S = \{0, 1\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

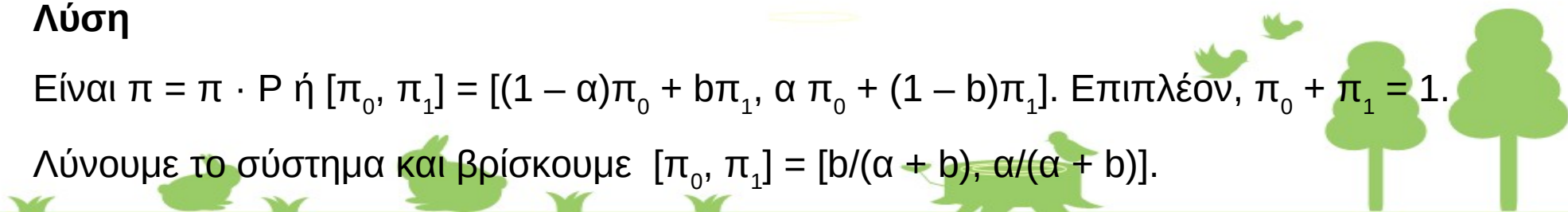
$$\begin{pmatrix} 1 - a & a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει).

Λύση

Είναι $\pi = \pi \cdot P$ ή $[\pi_0, \pi_1] = [(1 - \alpha)\pi_0 + b\pi_1, \alpha\pi_0 + (1 - b)\pi_1]$. Επιπλέον, $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $[\pi_0, \pi_1] = [b/(\alpha + b), \alpha/(\alpha + b)]$.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Παράδειγμα 2

Έστω $S = \{0, 1\}$ και

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Αν $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ η οριακή (στάσιμη) κατανομή πιθανοτήτων τότε

$$\left. \begin{array}{l} \pi = \pi \cdot P \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_0 = 0,5\pi_0 + 0,4\pi_1 \\ \pi_1 = 0,5\pi_0 + 0,6\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_0 = \frac{4}{9} \\ \pi_1 = \frac{5}{9} \end{array} \right\}$$

Δηλαδή, το σύστημα, ανεξάρτητα από την αρχική του κατάσταση, λαμβάνει την κατάσταση 0 με πιθανότητα $4/9$ και την κατάσταση 1 με πιθανότητα $5/9$.

Επιπλέον: Αν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση 1 τότε θα ξαναβρεθεί σε αυτήν μετά από $9/5 = 1,8$ βήματα ενώ μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 0 μεσολαβούν $9/4 = 2,25$ βήματα.

P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Παράδειγμα 3

Έστω $S = \{0, 1, 2\}$ και

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή

(β) Να βρεθεί το μέσο πλήθος βημάτων που απαιτούνται μεταξύ δύο επισκέψεων στις καταστάσεις της αλυσίδας.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Παράδειγμα 3

Αν $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ η οριακή στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων τότε

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

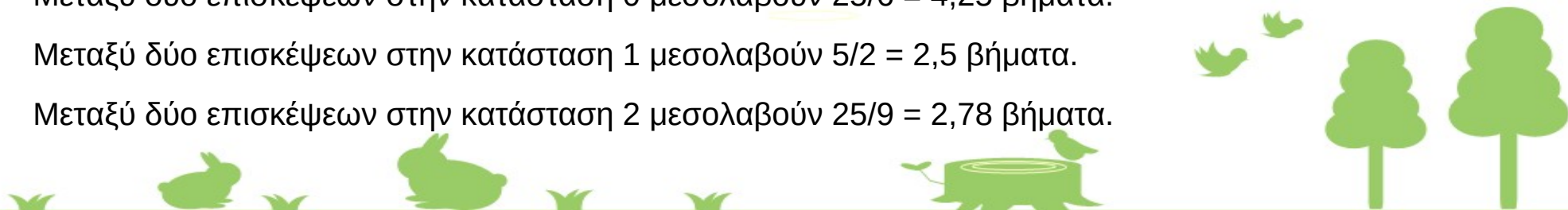
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \text{ και}$$
$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} \\ \pi_1 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} \\ \pi_2 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} \end{aligned}$$

Από την λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (6/25, 2/5, 9/25)$.

Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 0 μεσολαβούν $25/6 = 4,25$ βήματα.

Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 1 μεσολαβούν $5/2 = 2,5$ βήματα.

Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 2 μεσολαβούν $25/9 = 2,78$ βήματα.



P_4 : Στάσιμη συμπεριφορά

Δραστηριότητα

Να βρεθεί η οριακή στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων της αλυσίδας που περιγράφεται από το διάγραμμα.

