Στοχαστικές Διεργασίες

Τμήμα ΗΜ/ΜΥ Δ.Π.Θ.

Πρόχειρες Σημειώσεις

Μέρος III: Ουρές Αναμονής

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
epdiaman@ee.duth.gr

Έκδοση: 12 Δεκεμβρίου 2024

Πίνακας περιεχομένων

1. Κατανομή Poisson

Μία τ.μ. X є N, ακολουθεί την κατανομή Poisson (X ~ Poisson(λ) ή απλά X ~ P(λ)), αν για κάποιο λ > 0, η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

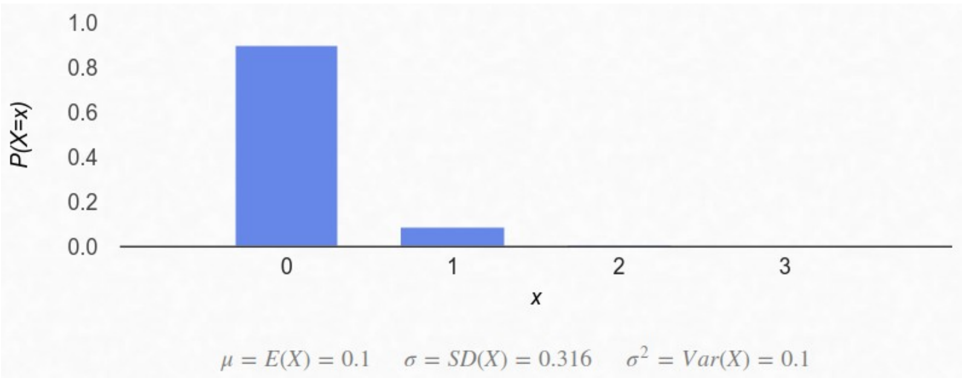
$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,\ldots$$

Η κατανομή Poisson εφαρμόζεται σε φαινόμενα με διακριτή συχνότητα που επιπλέον έχουν σταθερή πιθανότητα να συμβούν σε δοσμένο χρόνο ή χώρο. Η παράμετρος λ συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή της X σε αυτόν το χρόνο ή χώρο, ενώ επίσης λ είναι και η διασπορά της (E(X) = Var(X) = λ). Παραδείγματα τ.μ. που ακολουθούν την Poisson κατανομή:

- οι τηλεφωνικές κλήσεις που φτάνουν σε ένα σύστημα (X: πλήθος κλήσεων, λ: μέσο πλήθος κλήσεων).
- τα φωτόνια που φτάνουν σε ένα τηλεσκόπιο (X: πλήθος φωτονίων, λ: μέσο πλήθος φωτονίων που φτάνουν).
- ο αριθμός των μεταλλάξεων σε ένα κλώνο του DNA ανά μονάδα μήκους (X: πλήθος μεταλλάξεων, λ: μέσο πλήθος μεταλλάξεων που παρατηρούνται).

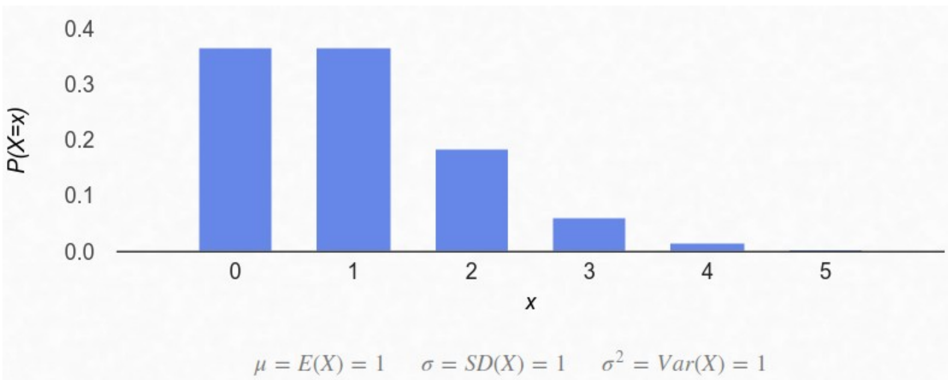
Παράδειγμα 1

λ = 0,1: $P(X = \kappa) = e^{-0,1} \cdot 0,1^{\kappa} / \kappa!$, κ = 0, 1,…



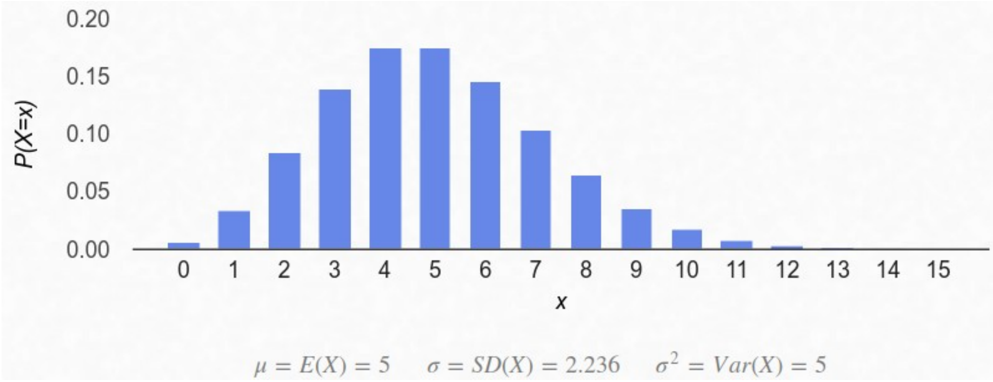
Διάγραμμα 1: Συνάρτηση πιθανότητας Poisson(0.1)

λ = 1: $P(X = \kappa) = e^{-1}/ \kappa!$, κ = 0, 1,…



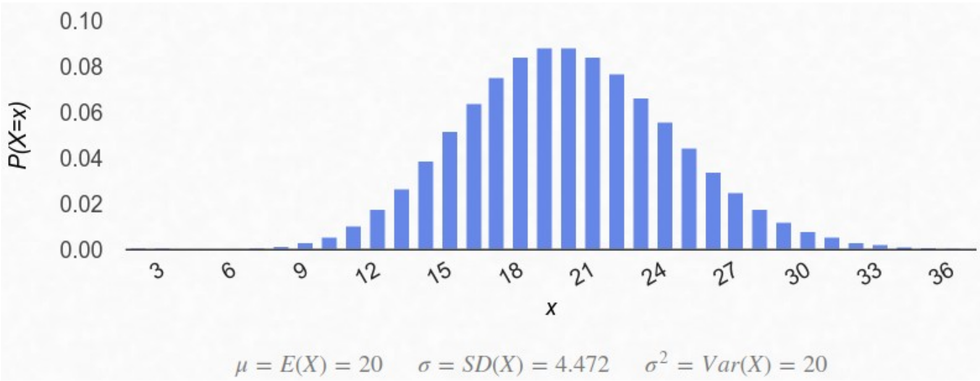
Διάγραμμα 2: Συνάρτηση πιθανότητας Poisson(1)

λ = 5: P(X = κ) = $e^{-5} \cdot 5^{κ}$ / κ!, κ = 0, 1,…



Διάγραμμα 3: Συνάρτηση πιθανότητας Poisson(5)

λ = 20: P(X = κ) = $e^{-20} \cdot 20^{κ}$ / κ!, κ = 0, 1,…



Διάγραμμα 4: Συνάρτηση πιθανότητας Poisson(20)

Παράδειγμα 2

Ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή ανά δευτερόλεπτο ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο λ = 5. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) και P(X ≥ 3).

Λύση

Είναι X ~ Poisson(5) άρα P(X = κ) = $e^{-5} \cdot 5^{κ}$ / κ!. Υπολογίζουμε:

P(X = 0) = $e^{-5} \cdot 5^{0}$ / 0! = e^{-5} = 0,0067 = 0,67%.

P(X = 1) = $e^{-5} \cdot 5^{1}$ / 1! = $5 \cdot e^{-5}$ = 0,0337 = 3,37%.

P(X = 2) = $e^{-5} \cdot 5^{2}$ / 2! = 25 · e^{-5} / 2 = 0,0842 = 8,42%.

P(X ≥ 3) = 1 – P(X < 3) = 1 – [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 0,8753 = 87,5%.

Παράδειγμα 3

Έστω ότι η τ.μ. Χ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Αν ισχύει $P(X \le 1) = 4 \cdot P(X = 2)$, να προσδιοριστεί η παράμετρος λ και να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X < 3)$, $P(X \ge 1 \mid X < 3)$.

Λύση

Είναι $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ άρα $P(X = \kappa) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^{\kappa} / \kappa!$. Τώρα,

$$P(X \le 1) = 4 \cdot P(X = 2) \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) = 4 \cdot P(X = 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda = 4\, e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 / 2$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1/2 \text{ ή } \lambda = 1.$$

Καθώς, το λ αποτελεί ρυθμό εμφάνισης, πρέπει να είναι θετικός αριθμός. Άρα $\lambda = 1$.

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= e^{-1} \cdot 1^0 / 0! + e^{-1} \cdot 1^1 / 1! + e^{-1} \cdot 1^2 / 2!$$

$$= e^{-1} \cdot 5 / 2$$

$$= 0{,}9196 \approx 92\%$$

$$P(X \ge 1 \mid X < 3) = P(X \ge 1, X < 3) / P(X < 3)$$

$$= P(X = 1 \text{ ή } X = 2) / P(X < 3)$$

$$= [P(X = 1) + P(X = 2)] / P(X < 3)$$

$$= 3/5 = 0{,}6 = 60\%.$$

1.1. Διεργασίες καταμέτρησης

Σε ορισμένα προβλήματα, μετράμε τις εμφανίσεις ορισμένων τύπων γεγονότων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, έχουμε να κάνουμε με μια διεργασία καταμέτρησης.

Για παράδειγμα, η διεργασία $\{N(t), t \geq 0\}$ που δείχνει τον αριθμό των πελατών που φτάνουν σε ένα σούπερ μάρκετ μέχρι την ώρα t ξεκινώντας από την ώρα 0. Για τέτοιου είδους διαδικασίες, συνήθως υποθέτουμε $N(0) = 0$, άρα καθώς ο χρόνος περνάει και φτάνουν πελάτες, το $N(t)$ παίρνει θετικές ακέραιες τιμές.

Ορισμός διεργασίας καταμέτρησης

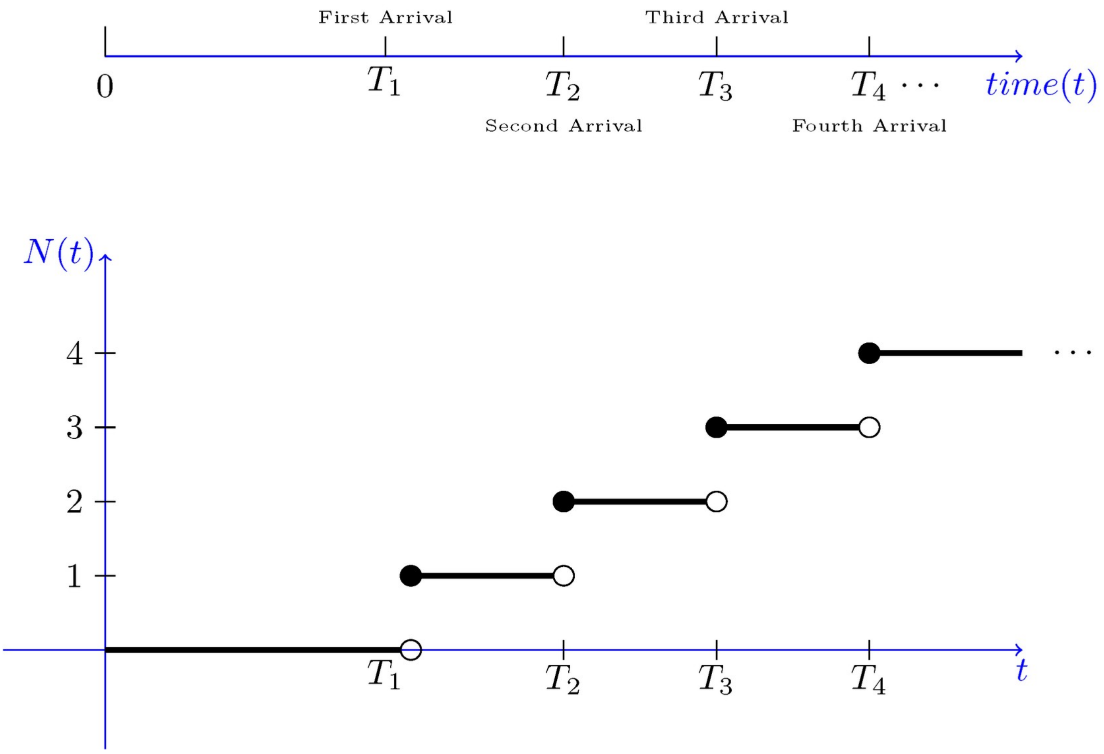
Μια στοχαστική διεργασία $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ λέγεται διεργασία καταμέτρησης εάν $N(t)$ είναι ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν από το χρόνο 0 έως και συμπεριλαμβανομένου του χρόνου t, δηλαδή

N(t) = {ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν στο (0, t]}

Για μια διαδικασία μέτρησης, υποθέτουμε:

- $N(0) = 0$.
- $N(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, για όλα τα $t \in [0,\infty)$

Για $0 \leq s < t$ η διαφορά $N(t) - N(s)$ δείχνει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα (s, t].



Διάγραμμα 5: Αναπαράσταση Διεργασίας Καταμέτρησης (πηγή: https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_1_1_counting_processes.php)

Παραδείγματα Διαδικασιών Καταμέτρησης

1) $N_1(t)$ = {πλήθος σεισμών σε έναν νομό στο (0, t μήνες]}.

2) $N_2(t)$ = {πλήθος ελαττωματικών προϊόντων στην παραγωγή στο (0, t ημέρες]}.

3) $N_3(t)$ = {πλήθος αφίξεων σε ένα κατάστημα στο (0, t ώρες]}.

4) $N_4(t)$ = {πλήθος γεννήσεων σε έναν πληθυσμό το (0, t έτη]}.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μίας διαδικασίας καταμέτρησης είναι ο τρόπος με τον οποίο αυτή αυξάνεται. Ειδικότερα, οι προσαυξήσεις σε μία διαδικασία μπορεί να είναι

α) Ανεξάρτητες, όπως π.χ. στην N_2 και στην N_3.

β) Εξαρτημένες, όπως π.χ. στην N_1.

1.2. Διεργασίες Poisson

Η κατανομή Poisson δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού συγκεκριμένων πιθανοτήτων για το πλήθος εμφανίσεων κάθε διακριτού φαινομένου που εξελίσσεται με τυχαίο τρόπο.

Αν ο ρυθμός άφιξης είναι σταθερός στην διάρκεια του χρόνου, το πλήθος αφίξεων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μήκους t, θα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ·t. Με τον τρόπο αυτό, το ίδιο το φαινόμενο είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί στα πλαίσια μίας διαδικασίας καταμέτρησης συνεχούς χρόνου, {N(t), t ≥ 0}, όπου

N(t) = {ο αριθμός των αφίξεων στο χρονικό διάστημα (0, t]} και N(0) = 0.

Ορισμός διεργασίας Poisson

Ως **διεργασία Poisson** με μέση ένταση (mean rate or intensity) λ, **ορίζεται** μία στοχαστική διεργασία καταμέτρησης {N(t), t ≥ 0} (άρα N(0) = 0), για την οποία επιπλέον:

(i) Η N(t), t ≥ 0, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή: για κάθε $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι προσαυξήσεις $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, …, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες τ.μ..

(ii) Αν X = {πλήθος γεγονότων σε χρονικό διάστημα μήκους τ}, τότε X ~ Poisson(λ·τ).

(Είναι αξιοσημείωτο ότι εξ' ορισμού το πλήθος των γεγονότων εξαρτάται μόνο από το πλάτος του χρονικού διαστήματος και όχι από τη θέση του διαστήματος στην ημιευθεία του χρόνου)

Παρατηρήσεις

1. Η προϋπόθεση (ii) είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s)) \sim N(t - s)$$

από την οποία προκύπτει ότι οι προσαυξήσεις είναι στάσιμες (ισόνομες). Ειδικότερα, συνάγουμε ότι:

$$E(N(t) - N(s)) = \text{Var}(N(t) - N(s)) = \lambda(t - s).$$

2. Η προϋπόθεση του ορισμού “(i) Η $N(t)$, $t \geq 0$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις” είναι ουσιαστική. Είναι δυνατόν μία διεργασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ να ικανοποιεί την

“(ii) Αν X = {πλήθος γεγονότων σε χρονικό διάστημα μήκους τ}, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda\cdot\tau)$.”,

χωρίς ωστόσο να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία διεργασία Poisson με παράμετρο λ: $N(t+s)-N(s)\sim\text{Poisson}(\lambda t)$, $s \geq 0$. Ορίζουμε

$$Z(t) = N(s + t) - N(s) \text{ για κάθε } t, s \geq 0.$$

Η διεργασία $\{Z(t), t \geq 0\}$ είναι διαδικασία καταμέτρησης, $Z(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, αλλά οι προσαυξήσεις της είναι εξαρτημένες καθώς για $m > s \geq 0$, $t_2 > t_1 \geq 0$ είναι

$$Z(t_2) - Z(t_1) = N(t_2+s) - N(t_1+s) \text{ και } Z(t_1) - Z(0) = N(t_1+m) - N(m),$$

τα διαστήματα $(t_1, t_2]$ και $(0, t_1]$ δεν επικαλύπτονται αλλά οι διαφορές $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ και $N(t_1+m) - N(m)$ είναι εξαρτημένες καθώς $m > s$ και τα διαστήματα $[t_1+ s, t_2+ s]$ και $[m, t_1+ m]$ επικαλύπτονται.

Πηγή: https://math.stackexchange.com/questions/132892/counting-process-which-is-not-a-poisson-process

Πλήθος γεγονότων σε διάστημα

Αν X = {πλήθος αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους τ}, τότε **$X \sim \text{Poisson}(\lambda\cdot\tau)$.** Συμπεραίνουμε, ότι σε μια διεργασία Poisson, **το πλήθος των γεγονότων σε οποιοδήποτε διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος** και όχι από την ακριβή θέση του διαστήματος στην ημιευθεία του χρόνου. Πράγματι, για κάθε $t_2 > t_1 \geq 0$ και $r > 0$, είναι

$$N(t_2 + r) - N(t_1+ r) \sim \text{Poisson}(\lambda\cdot[t_2+ r - (t_1+ r)]) = \text{Poisson}(\lambda\cdot(t_2 - t_1))$$

και

$$N(t_2) - N(t_1) \sim \text{Poisson}(\lambda\cdot(t_2 - t_1)).$$

Συμπεραίνουμε ότι $N(t_2 + r) - N(t_1+ r) \sim N(t_2) - N(t_1)$, επομένως, η διαδικασία Poisson **είναι διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις**. Ιδιαίτερα, προκύπτει ότι:

$$E(N(t_2) - N(t_1)) = \text{Var}(N(t_2) - N(t_1)) = \lambda(t_2 - t_1), \text{ για κάθε } t_1 < t_2.$$

Από τον ορισμό της μία διεργασία Poisson ικανοποιεί την συνθήκη

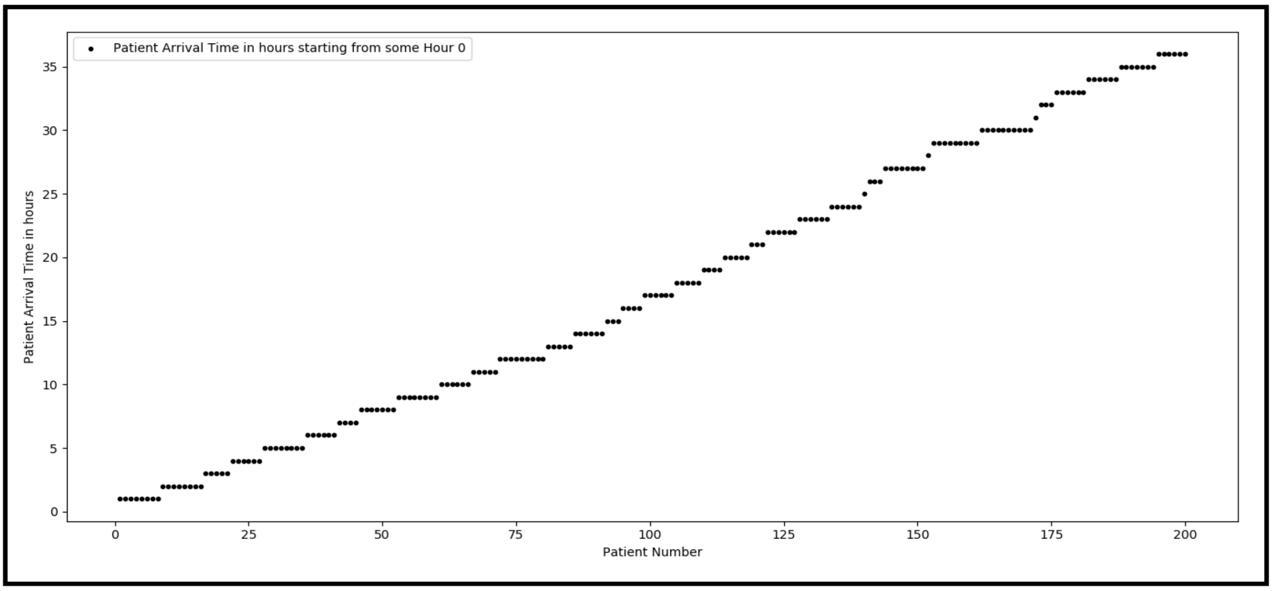
$$E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της N(t) εξαρτάται από το t, ειδικότερα αυτή δεν είναι σταθερή. Προκύπτει ότι:

Η διεργασία Poisson δεν είναι ούτε ισχυρά στάσιμη (κοινή κατανομή για κάθε συνδυασμό των μεταβλητών), ούτε ασθενώς στάσιμη (κοινό EX, VarX για όλες τις μεταβλητές) στοχαστική διεργασία.

Γραφικό παράδειγμα

Αφίξεις ασθενών σε ένα ιατρείο ως μία διεργασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με $\lambda = 1$ αφίξεις ανά ώρα.



Διάγραμμα 6: Αφίξεις ασθενών σε ένα ιατρείο ως διεργασία Poisson (πηγή: https://towardsdatascience.com/the-poisson-process-everything-you-need-to-know-322aa0ab9e9a)

Παράδειγμα: Ραδιενεργή αποσύνθεση

Όλες οι σύγχρονες θεωρίες της ραδιενεργής αποσύνθεσης θεωρούν ότι σε μία ομάδα πυρήνων ενός δεδομένου στοιχείου όλοι οι πυρήνες είναι ίδιοι, ανεξάρτητοι και έχουν την ίδια πιθανότητα αποσύνθεσης σε μοναδιαίο χρόνο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι εκπομπές μίας ραδιενεργής πηγής αποτελούν μία διεργασία Poisson.

Παράδειγμα: Θόρυβος βολής σε ηλεκτρονικές λυχνίες

Η ευαισθησία που επιτυγχάνεται με τους ηλεκτρονικούς ενισχυτές περιορίζεται από τις στιγμιαίες μεταβολές ρεύματος που συμβαίνουν σε τέτοια όργανα και οι οποίες καλούνται θόρυβος βολής, ο οποίος οφείλεται στις τυχαίες εκπομπές ηλεκτρονίων από την θερμαινόμενη κάθοδο. Ας υποθέσουμε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ καθόδου και ανόδου είναι τόσο μεγάλη ώστε όλα τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια από την κάθοδο να έχουν πολύ μεγάλες ταχύτητες, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει συγκέντρωση ηλεκτρονίων μεταξύ καθόδου και ανόδου. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο σε ένα χρονικό διάστημα (0, t] αποτελεί μία διεργασία Poisson με παράμετρο λt, όπου λ είναι η μέση ένταση εκπομπής ηλεκτρονίων από την κάθοδο.

Παράδειγμα: Διακοπές μηχανών

Θεωρούμε ένα όργανο (όπως μία λυχνία κενού ή έναν απαριθμητή Geiger) το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί και μετά επισκευάζεται ή αντικαθίσταται από ένα όργανο του ίδιου τύπου. Η διάρκεια ζωής του οργάνου θεωρείται ότι είναι μία τυχαία μεταβλητή T. Οι διάρκειες ζωής T_1 , T_2 ,...,T_n, n οργάνων που τέθηκαν σε λειτουργία θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή όπως η τυχαία μεταβλητή T. Για t > 0, έστω N(t) ο αριθμός των οργάνων που απέτυχαν στο χρονικό διάστημα (0, t]. Αν η διάρκεια ζωής κάθε οργάνου είναι μία εκθετική κατανομή, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι {N(t), t ≥ 0} είναι μία διεργασία Poisson.

Παρατήρηση

Η ιδιότητα των (στοχαστικά) ανεξάρτητων προσαυξήσεων απλοποιεί την ανάλυση μιας διαδικασίας καταμέτρησης.

Ειδικότερα, στα πλαίσια της διεργασίας Poisson, αν $0 \le t_1 < t_2$, τότε

$P(N(t_1) = i, N(t_2) = j)$ (πιθανότητα να συμβούν i αφίξεις στο $[0, t_1)$ και j στο $[0, t_2)$)

$= P(N(t_1) = i, N(t_2) – N(t_1) = j – i)$ (πιθανότητα να συμβούν i αφίξεις στο $[0, t_1)$ και j – i στο $[t_1, t_2)$)

$= P(N(t_1) = i, N(t_2 – t_1) = j – i)$ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις: $N(t_2) – N(t_1) \sim N(t_2 – t_1)$)

$= P(N(t_1) = i) \cdot P(N(t_2 – t_1) = j – i)$. (ανεξαρτησία πλήθους αφίξεων από τη θέση των διαστημάτων)

$= e^{-\lambda t1} (\lambda t_1)^i/i! \cdot e^{-\lambda(t2 -t1)} [\lambda(t_2 – t_1)]^{j – i}/(j – i)!$

$= \lambda^j e^{-\lambda t2} \cdot t_1^{\,i} \cdot (t_2 – t_1)^{j – i}/[i!(j – i)!]$.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα να έχουμε 2 αφίξεις στο διάστημα (1,2] και 3 αφίξεις στο διάστημα (3, 5].

Επειδή τα διαστήματα (1, 2] και (3, 5] είναι ξένα, μπορούμε να γράψουμε

P(2 αφίξεις σε (1,2] και 3 αφίξεις σε (3,5])

= P(2 αφίξεις σε (1,2]) · P(3 αφίξεις σε (3,5])

Παράδειγμα

Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε ένα μάρκετ μπορεί να θεωρηθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ = 10 πελάτες ανά ώρα.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να αφιχθούν 2 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να αφιχθούν 3 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20 και 7 πελάτες μεταξύ 10:20 και 11:00.

Λύση

Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε ένα μάρκετ μπορεί να θεωρηθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ = 10 πελάτες ανά ώρα = 1/6 πελάτες / λεπτό, άρα αν

$$N(t) = \{\text{πελάτες στο } (0,\ t \text{ min}]\}$$

τότε

$$N(t) \sim \text{Poisson}(t/6).$$

(α) $P(2 \text{ πελάτες μεταξύ } 10{:}00 \text{ και } 10{:}20) = P(N(20) = 2)$

$$= e^{-20/6}\frac{(20/6)^2}{2!} \approx 0{,}198 = 19{,}8\%$$

(β) $P(3 \text{ πελάτες μεταξύ } 10{:}00 \text{ και } 10{:}20 \text{ και } 7 \text{ πελάτες μεταξύ } 10{:}20 \text{ και } 11{:}00)$

$$= P(N(20) = 2,\ N(60) - N(20) = 7) = P(N(20) = 2)\ P(N(60) - N(20) = 7)$$

$$= P(N(20) = 2,\ N(40) = 7) = e^{-20/6}\frac{(20/6)^3}{3!}e^{-40/6}\frac{(40/6)^7}{7!}$$

$$\approx 0{,}2202 \cdot 0{,}1477 = 0{,}0325 = 3{,}25\%.$$

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t),\ t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ = 0,5 αφίξεις / μονάδα χρόνου.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην συμβεί καμία άφιξη στο διάστημα (3, 5].

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα διαστήματα: (0, 1], (1, 2], (2, 3] και (3, 4].

Λύση

(α) Έστω Y το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα (3, 5]. Καθώς, το μήκος του διαστήματος είναι δ = 2, θα είναι Y ~ Poisson(λ·δ) = Poisson(0,5·2) = Poisson(1).

Υπολογίζουμε, $P(Y = 0) = e^{-1}\, 1^0/0!$

$= 1/e$

$= 0{,}368$

$= 36{,}8\%$.

(β) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, το πλήθος των αφίξεων στα διαστήματα (0, 1], (1, 2], (2, 3] και (3, 4]. Κάθε ένα από τα διαστήματα έχει μήκος δ = 1, άρα Y_i ~ Poisson(0,5), i = 1, 2, 3, 4. Επιπλέον, τα διαστήματα δεν είναι επικαλυπτόμενα, άρα οι Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε: $P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1)$

$$= P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1) \cdot P(Y_3 = 1) \cdot P(Y_4 = 1)$$

$$= (0{,}5 \cdot e^{-0{,}5})^4 = 0{,}0085 = 0{,}85\%.$$

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t),\ t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 3$ αφίξεις / μονάδα χρόνου. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$.

Λύση

Τα διαστήματα $(0, 2]$ και $(1, 4]$ επικαλύπτονται άρα το πλήθος αφίξεων που θα συμβούν στα δύο χρονικά διαστήματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Γράφουμε τα διαστήματα αυτά ως ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων.

$$(0, 2] \cup (1, 4] = (0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 4],$$

Αν X: αφίξεις στο $(0, 1]$, Y: αφίξεις στο $(1, 2]$ και Z: αφίξεις στο $(2, 4]$, τότε παρατηρούμε ότι για να συμβούν δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$ πρέπει να συμβεί ένας από τους εξής καταμερισμούς στα διαστήματα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 4]$:

$$(X, Y, Z) = (1, 1, 2), \text{ ή } (X, Y, Z) = (2, 0, 3), \text{ ή } (X, Y, Z) = (0, 2, 1).$$

Αν X, Y, Z είναι το πλήθος αφίξεων στα $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 4]$ αντίστοιχα, τότε

$X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 1)$, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 2)$ ή

$X \sim \text{Poisson}(3)$, $Y \sim \text{Poisson}(3)$, $Z \sim \text{Poisson}(6)$.

Υπολογίζουμε:

P({δύο αφίξεις στο $(0, 2]$ και τρεις αφίξεις στο $(1, 4]$})

$$= P((X, Y, Z) = (1, 1, 2) \text{ ή } (X, Y, Z) = (2, 0, 3) \text{ ή } (X, Y, Z) = (0, 2, 1))$$

$$= P((X, Y, Z) = (1, 1, 2)) + P((X, Y, Z) = (2, 0, 3)) + P((X, Y, Z) = (0, 2, 1))$$

$$= P(X=1) \cdot P(Y=1) \cdot P(Z=2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0) \cdot P(Z = 3) + P(X = 0) \cdot P(Y = 2) \cdot P(Z = 1)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda}\, (2\lambda)^2/2! + e^{-\lambda}\, \lambda^2/2! \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda}\, (2\lambda)^3/3! + e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda}\, \lambda^2/2! \cdot e^{-2\lambda}\, (2\lambda)^1/1!$$

$$= e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^2/2 + e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^3/6 + e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-6} \cdot 6$$

$$= e^{-12} \cdot (18 + 9 \cdot 18 + 27) = 0{,}00127... \approx 0{,}13\%$$

Παρατήρηση

Το ίδιο πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με εφαρμογή του νόμου ολικής πιθανότητας, διαμερίζοντας τις πιθανές περιπτώσεις ως προς τις τιμές της τ.μ. Υ ως εξής:

P({δύο αφίξεις στο (0, 2] και τρεις αφίξεις στο (1, 4]})

$= P(X + Y = 2, Y + Z = 3)$

$= \Sigma_{\kappa = 0, 1, \dots} P(X + Y = 2, Y + Z = 3, Y = \kappa)$

$= \Sigma_{\kappa = 0, 1, \dots} P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = \kappa) \cdot P(Y = \kappa)$

$= P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0)$

$+ P(X+Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) + P(X + Y = 2, Y + Z = 3 \mid Y = 2) \cdot P(Y = 2)$

$= P(X = 2, Z = 3) \cdot P(Y = 0) + P(X = 1, Z = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 0, Z = 1) \cdot P(Y = 2)$

$= P(X=1) \cdot P(Y=1) \cdot P(Z = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0) \cdot P(Z = 3) + P(X = 0) \cdot P(Y = 2) \cdot P(Z = 1)$

$= e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^2/2! + e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^3/3! + e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} \lambda^2/2! \cdot e^{-2\lambda} (2\lambda)^1/1!$

$= e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^2/2 + e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-3} \cdot e^{-6} \cdot 6^3/6 + e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot 3^2/2 \cdot e^{-6} \cdot 6$

$= e^{-12} \cdot (18 + 9 \cdot 18 + 27)$

$= 0{,}00127... \approx 0{,}13\%$

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ. Να βρεθεί η συνάρτηση συνδιακύμανσης

$$\mathrm{Cov}(N(t_1), N(t_2)) = E(N(t_1) - \lambda t_1) \cdot (N(t_2) - \lambda t_2),$$

συναρτήσει των t_1, t_2 για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$.

Λύση

Θα αξιοποιήσουμε τις εξής τρεις ιδιότητες της συνδιακύμανσης:

(α) X, Y: ανεξάρτητες $\rightarrow$ Cov(X, Y) = 0.

(β) Cov(X, X) = Var(X).

(γ) Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z).

Επιπλέον, θα χρειαστούμε τις εξής ιδιότητες της διεργασίας Poisson:

(α) $N(t_2) - N(t_1) \sim N(t_2 - t_1)$, $t_2 > t_1 \geq 0$.

(β) Οι τ.μ. $N(t_1)$, $N(t_2 – t_1)$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες για κάθε $t_2 > t_1 \geq 0$ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις μεταξύ των διαστημάτων $(0, t_1]$ και $(t_1, t_2]$).

(γ) $N(t_1) \sim$ Poisson($\lambda\cdot t_1$) και $N(t_2) \sim$ Poisson($\lambda\cdot t_2$) (άρα $E(N(t_i)) = Var(N(t_i)) = \lambda\cdot t_i$, $i = 1, 2$)

Για $t_2 > t_1 \geq 0$, είναι: $Cov(N(t_1), N(t_2)) = Cov(N(t_1), N(t_2) – N(t_1) + N(t_1))$

$$= Cov(N(t_1), N(t_2 – t_1) + N(t_1))$$

$$= Cov(N(t_1), N(t_2 – t_1)) + Cov(N(t_1), N(t_1))$$

$$= 0 + Var(N(t_1))$$

$$= \lambda t_1.$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι για $t_1 > t_2 \geq 0$, είναι $C_N(t_1, t_2) = \lambda t_2$.

Συμπεραίνουμε ότι: $\mathbf{Cov(N(t_1), N(t_2)) = \lambda \cdot min(t_1, t_2)}$, για κάθε t_1, $t_2 \geq 0$**.**

1.3. Χρόνος μέχρι το 1^{o} γεγονός

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$, διεργασία Poisson με παράμετρο λ. Έστω

X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^{o} γεγονός.

Αναζητούμε την κατανομή της τ.μ. X, δηλαδή, την τιμή της πιθανότητας $P(X_1 \leq t)$, για $t \geq 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$,

$\{X_1 > t\}$ = {δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο χρονικό διάστημα (0, t]} = $\{N(t) = 0\}$,

άρα, $P(X_1 > t) = P(N(t) = 0)$

$$= e^{-\lambda t} \lambda^0/0!$$

$$= e^{-\lambda t}$$ ή

$P(X_1 \leq t) = 1 – e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_1 \leq t) = 0$, $t < 0$),

Δηλαδή η τ.μ. X_1 έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ. Συμπεραίνουμε ότι $X_1 \sim$ Exp(λ). Άμεσες συνέπειες είναι οι εξής:

Αναμενόμενος χρόνος μέχρι το 1^{o} γεγονός: $E(X_1) = 1/\lambda$
Διασπορά χρόνου μέχρι το 1^{o} γεγονός: $Var(X_1) = 1/\lambda^2$.

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min.

(α) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1η άφιξη.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα η 1η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $E(X_1) = 1/\lambda = 1/5$ min = 0,2 min = 12 sec.

(β) Γνωρίζουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(5)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0{,}5) = 1 - P(X_1 \le 0{,}5)$$

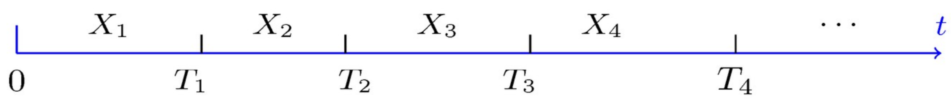
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0{,}5})$$

$$= e^{-2{,}5} = 0{,}082 = 8{,}2\%$$

1.4. Χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κατανομή του χρόνου X_i, i = 2, 3, …, που μεσολαβεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβάντων.



Έστω X_n το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ του n-1 και του n γεγονότος. Αναζητούμε την κατανομή πιθανότητας της X_n. Είναι:

$P(X_n > t) = P(\{\text{κανένα γεγονός στο } (s, s+t]\})$ (s η στιγμή που συνέβη το προηγούμενο γεγονός)

$$= P(N(s + t) - N(s) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0) \qquad \text{(ανεξάρτητες προσαυξήσεις)}$$

$$= e^{-\lambda t}.$$

Όμοια με την περίπτωση της X_1 συμπεραίνουμε, ότι $P(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ ή

$$P(X_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \ge 0 \ (\text{και } P(X_n \le t) = 0,\ t < 0).$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. X_n έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ, δηλαδή $X_n \sim$ Exp(λ). Ειδικότερα, $E(X_n) = 1/\lambda$ και $Var(X_n) = 1/\lambda^2$.

Παράδειγμα

Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ = 6 αφίξεις / min. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει μεταξύ της 3ης και της 4ης άφιξης.

Λύση

Αν X_4 το χρονικό διάστημα μεταξύ της 3ης και της 4ης άφιξης, τότε $X_4 \sim$ Poisson(8) και

$E(X_4) = 1/6$ min = 10 sec.

Σύνοψη

Αν X το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο (οποιωνδήποτε) γεγονότων, τότε

$$X \sim \text{Exp}(\lambda),$$

όπου λ το αναμενόμενο πλήθος αφίξεων στη μονάδα του χρόνου. Η αναμενόμενη τιμή της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο αφίξεων είναι

$$E(X) = 1/\lambda$$

ενώ η διακύμανση αυτής είναι

$$Var(X) = 1/\lambda^2.$$

1.5. Χρόνος για την άφιξη, δεδομένου πως δεν αυτή δεν έχει συμβεί για χρόνο t_0

Σε μία διεργασία Poisson, **ο αριθμός των αφίξεων** που συμβαίνει σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι **ανεξάρτητος ο ένας με τον άλλο** (ιδιότητα ανεξάρτητων προσαυξήσεων που αποδίδεται στη διεργασία Poisson από τον ορισμό της). Αυτή η ανεξαρτησία αντανακλάται και **στους χρόνους μεταξύ των αφίξεων**, καθώς αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα

Έστω X η τυχαία μεταβλητή του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ δύο αφίξεων σε μία διεργασία Poisson. Για κάθε t_0, $x \geq 0$, είναι

$$P(X > x + t_0 \mid X > t_0) = P(X > x).$$

Απόδειξη

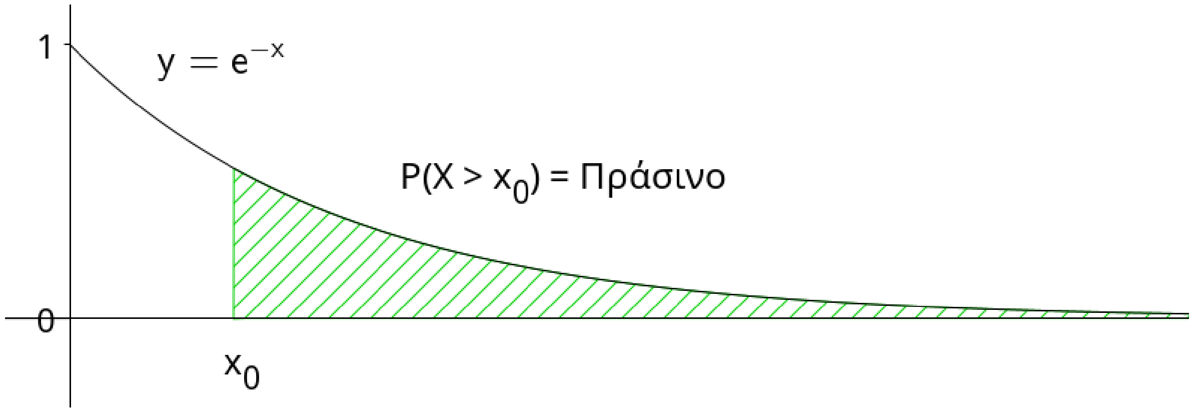
$P(X > x + t_0 \mid X > t_0) =$

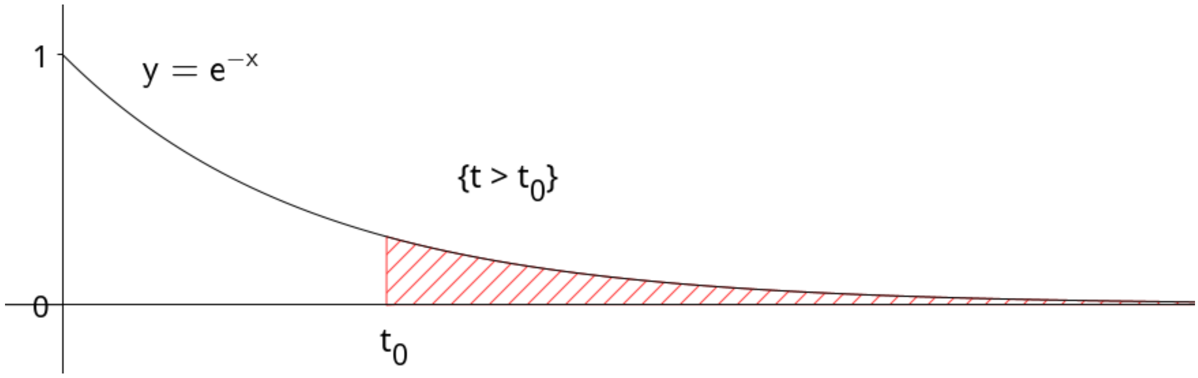
$= P(X > x + t_0, X > t_0) / P(X > t_0)$

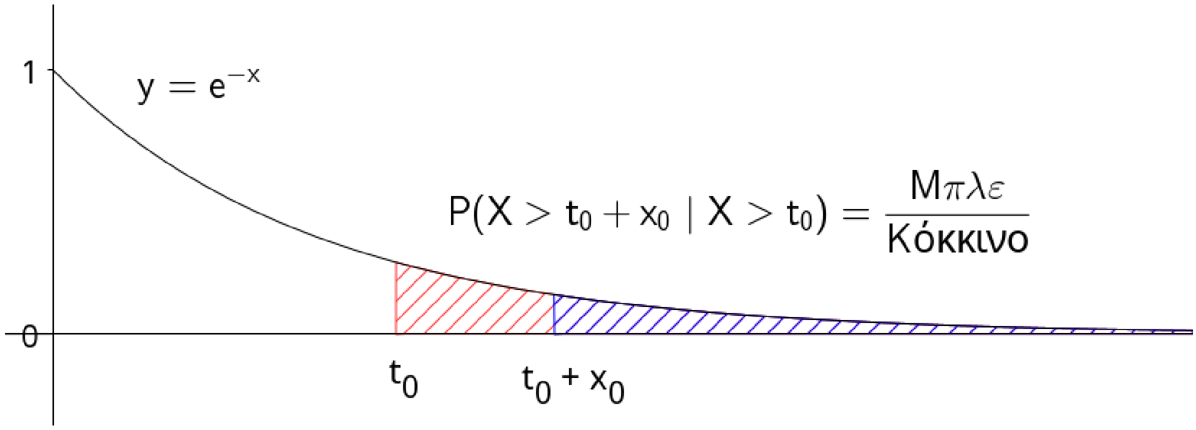
$= P(X > x + t_0) / P(X > t_0)$

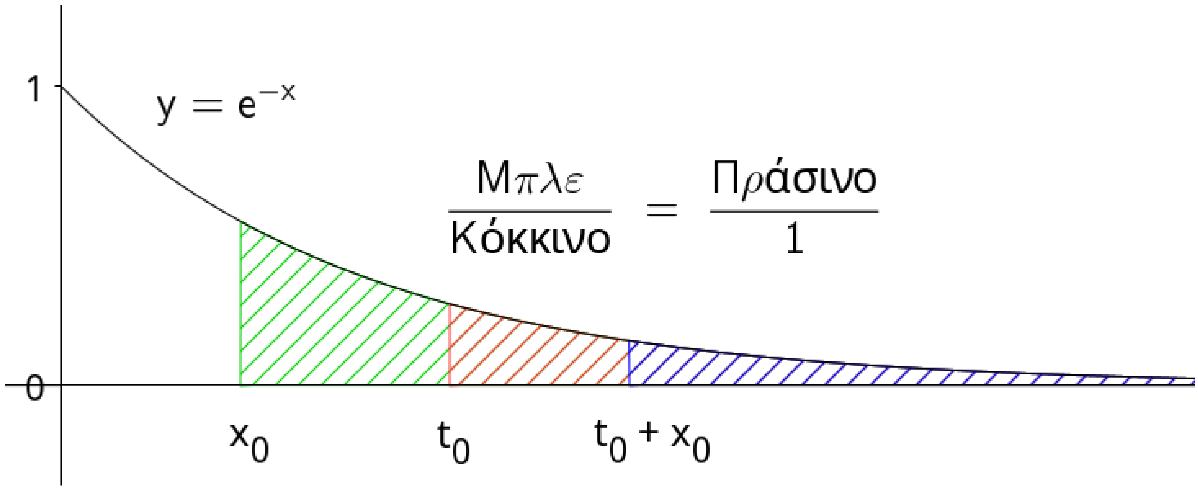
$= e^{-\lambda(x + t0)} / e^{-\lambda t0} = e^{-\lambda x}$

$= P(X > x).$









Διάγραμμα 7: Η έλλειψη μνήμης ως ομοιότητα εμβαδών στο διάγραμμα της $y = e^x$.

Παρατήρηση

Το τελευταίο θεώρημα φαίνεται μη ρεαλιστικό, γιατί στην καθημερινότητα, αν ένα γεγονός έχει ήδη καθυστερήσει κάποιο χρονικό διάστημα τότε περιμένουμε να συμβεί πιο σύντομα στη συνέχεια, δηλαδή περιμένουμε η κατανομή του χρόνου πραγματοποίησης να έχει αλλάξει. Αυτή η αντίληψη υπάρχει διότι στις περισσότερες διαδικασίες αναμονής στην πραγματική ζωή, το θεωρητικό χρονικό διάστημα που αυτό θα συμβεί δεν είναι άπειρο όπως στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής. Ωστόσο, το θεώρημα αφορά και ισχύει για την περίπτωση όπου μπορούμε να δεχθούμε ότι είναι δυνατόν η αναμονή να έχει απεριόριστα μεγάλες τιμές.

Ένα αξιοσημείωτο συμπέρασμα είναι πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, είναι η μόνη συνάρτηση με “αυτοόμοια” γραφική παράσταση, υπό την έννοια ότι ο λόγος του μέρους $[0, x]$ προς το όλο 1, είναι όσο ο λόγος του $[t_0, x + t_0]$ προς το $[t_0, +\infty]$. Σε όρους πιθανότητας και δεσμευμένης πιθανότητας, η τελευταία ισότητα των λόγων, μεταφράζεται ακριβώς στο συμπέρασμα του θεωρήματος (Διαγράμματα προηγούμενης σελίδας).

Σημείωση: Μία απόδειξη για τη μοναδικότητα είναι διαθέσιμη εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/1664347/uniqueness-of-memoryless-property

Παράδειγμα

Έστω $N(t)$ μια διεργασία Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ συμβάντα / λεπτό και έστω X_1, X_2, …,, οι αντίστοιχοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Ξεκινούμε να παρακολουθούμε τη διαδικασία το 10ο λεπτό. Έστω T η χρονική στιγμή που συμβαίνει το πρώτο γεγονός, μετά το 10ο λεπτό.

(δ) Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. T.

Λύση

(α) Είναι $X_1 \sim Exp(\lambda)$ και $\lambda = 2$, άρα $X_1 \sim Exp(2)$. Υπολογίζουμε

$$P(X_1 > 0{,}5) = e^{-2 \cdot 0{,}5}$$

$$= e^{-1} = 0{,}368$$

$$= 36{,}8\%.$$

(β) $P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 3 - 1)$ (Θεώρημα 13.4)

$$= P(X_1 > 2)$$

$$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$$

(γ) Αν X_3 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 2η και 3η μέτρηση τότε $X_3 \sim Exp(2)$. Αν X_4 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 3η και 4η μέτρηση τότε $X_4 \sim Exp(2)$.

{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > 4\}$

{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 = 2\}$

P({το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} | {το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό}) =

$$= P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2)$$

$$= P(X_4 > 2)$$

$$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$$

(δ) Μετά, το 10ο λεπτό παρακολουθούμε μία διεργασία Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς, αν

T = {χρονικό διάστημα μέχρι το 1ο γεγονός (μετά το 10ο λεπτό)}

είναι τότε $T = 10 + X$, όπου $X \sim Exp(2)$.

Άρα, $E(T) = E(10 + X) = 10 + E(X) = 10 + 1/\lambda = 10 + ½ = 10{,}5$ και

$Var(T) = Var(10 + X) = Var(X) = 1/\lambda^2 = 1/2^2 = 1/4$.

1.6. Ομοιομορφία χρόνου δεδομένης της άφιξης

Θεώρημα

Έστω $\{N(t),\ t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ. **Αν γνωρίζουμε πως έχει συμβεί μία άφιξη μέχρι τη χρονική στιγμή t (N(t) = 1)**, τότε, η χρονική στιγμή x που αυτή έχει συμβεί, $0 \le x \le t$, έχει ομοιόμορφη κατανομή στο (0, t]. Δηλαδή, αν X η χρονική στιγμή που έγινε η $1^{η}$ άφιξη, τότε:

$$P(X \le x \mid N(t) = 1) = x/t,\ 0 \le x \le t.$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$, άρα $P(N(t) = 1) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^1/1! = \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$. Είναι:

$$\begin{aligned} P(X \le x, N(t) = 1) &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x] \text{ και } 0 \text{ αφίξεις στο } (x, t]\}) \\ &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x]\}) \cdot P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (x, t]\}) \\ &= P(\{1 \text{ άφιξη στο } (0, x]\}) \cdot P(\{0 \text{ αφίξεις στο } (0, t-x]\}) \\ &= P(N(x) = 1) \cdot P(N(t) - N(x) = 0) \\ &= P(N(x) = 1) \cdot P(N(t - x) = 0) \\ &= e^{-\lambda x} (\lambda x)^1/1! \cdot e^{-\lambda(t - x)} (\lambda(t - x))^0/0! = \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Τώρα, $P(X \le x \mid N(t) = 1) = P(X \le x, N(t) = 1) / P(N(t) = 1) = \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda t} / \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t} = x/t$.

Παρατηρήσεις

1. Το αποτέλεσμα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ το οποίο εκφράζει το χρόνο που **αναμένεται να συμβεί** η 1η άφιξη. Γνωρίζοντας όμως ότι η πρώτη άφιξη συμβαίνει έως τη χρονική στιγμή t, η πιθανότητα να έχει συμβεί μέσα στο (0, t] κατανέμεται ομοιόμορφα σε αυτό.

2. Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται για n αφίξεις. Δηλαδή, γνωρίζοντας ότι έχουν συμβεί n αφίξεις στο διάστημα (0, t] (N(t) = n), οι n χρόνοι άφιξης κατανέμονται όπως προβλέπεται από την κοινή συνάρτηση κατανομής n ανεξάρτητων ομοιόμορφων U(0,t) τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η

$$f_{T_1, T_2, \ldots, T_n \mid N(t) = n}(t_1, t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}.$$

Παράδειγμα

Αν γνωρίζουμε ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας ενός εστιατορίου έχει έρθει ένας πελάτης, να βρεθεί η πιθανότητα αυτός

(α) να έχει έρθει στα πρώτα 10 λεπτά.

(β) να έχει έρθει μεταξύ του 25 και του 40 λεπτού της ώρας.

Λύση

Έστω N(t) = {πλήθος πελατών στο διάστημα (0, t]} και t: ο χρόνος σε λεπτά.

Γνωρίζουμε ότι ο πελάτης **έχει αφιχθεί** μέσα στα πρώτα 60 λεπτά, δηλαδή ότι N(60) = 1.

Αν X η τ.μ. που αναπαριστά τη στιγμή της άφιξης μέσα στο διάστημα (0, 60], τότε η τ.μ. X έχει κατανομή U(0, 60), άρα:

(α) $P(X \leq 10) = 10/60 = 1/6 = 16{,}7\%$.

(β) $P(25 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 25) = (40 - 25)/60 = 15/60 = 0{,}25 = 25\%$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η πιθανότητα, δύο πελάτες που έχουν αφιχθεί σε ένα κατάστημα τα πρώτα δύο λεπτά από τη στιγμή που άνοιξε, να έχουν αφιχθεί στο πρώτο από τα δύο λεπτά. Οι αφίξεις των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι δύο πελάτες A και B **έχουν αφιχθεί** στα πρώτα δύο λεπτά. Κάθε πελάτης μπορεί να έχει μπει είτε στο 1ο είτε στο 2ο λεπτό και ο χρόνος προσέλευσης του κάθε ενός ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, άρα έχουν αφιχθεί κατά τη διάρκεια του 1ου λεπτού με πιθανότητα 50% στο κάθε ένα. Καθώς, οι αφίξεις των πελατών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα και οι δύο πελάτες να έχουν μπει στο κατάστημα κατά τη διάρκεια του πρώτου λεπτού είναι $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = 25\%$.

Σημείωση

Εναλλακτικά και ισοδύναμα μπορούμε να δούμε ότι από τους συνολικά τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς προσέλευσης στα δύο λεπτά ((AB, 0), (A, B), (B, A), (0, AB)) ένας είναι ο επιθυμητός κατά τον οποίο και οι δύο μπαίνουν στο κατάστημα κατά τη διάρκεια του 1ου λεπτού.

1.7. Άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών

Ο νόμος ολικής πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί και στην περίπτωση συνεχών μεταβλητών. Ειδικότερα, αξιοποιώντας τον ορισμό $f_{X|Y}(x|y) = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$, γράφουμε:

Νόμος Ολικής Πιθανότητας για Συνεχείς Μεταβλητές

Αν X, Y, συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,dy$$

Πρόταση

Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, X, Y ~ Exp(λ) και Z = X + Y, τότε

$$f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z},\ z > 0.$$

Απόδειξη

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X+Y|X}(z|x) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-x)} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad \text{ή } Z \sim \text{Erlang}(2, \lambda).$$

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα (κατανομή Erlang)

Αν $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_\kappa$ όπου $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, i = 1, 2,..., κ, τότε

$$P(X \le x) = 1 - \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{1}{n!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^n,\ x \ge 0 \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(k-1)!},\ x > 0.$$

Η παραπάνω κατανομή ονομάζεται κατανομή **Erlang(κ, λ)**.

Σημειώσεις

1. Περισσότερες πληροφορίες για τη δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας μπορούν να βρεθούν εδώ: **https://math.stackexchange.com/questions/2035418/can-we-prove-the-law-of-total-probability-for-continuous-distributions**

2. Μία απόδειξη για το τελευταίο θεώρημα είναι διαθέσιμη εδώ: **https://math.stackexchange.com/questions/250733/how-is-the-erlang-pdf-derived**

3. Η σχέση της εκθετικής κατανομής με την κατανομή Erlang είναι ανάλογη με τη σχέση που έχει η γεωμετρική κατανομή (πιθανότητα πρώτης επιτυχίας), με την αρνητική διωνυμική κατανομή (πιθανότητα πλήθους δοκιμασιών μέχρι τις n επιτυχίες)

4. Η κατανομή Erlang αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα, καθώς

Γάμμα(α, β) ≡ Erlang(α, β), για α, β є N

1.8. Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Έστω T_1, T_2, …T_n, …, ο χρόνος μέχρι την υλοποίηση του $1^{ου}$, $2^{ου}$, …, n – οστού, … γεγονότος. Αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το $1^{ο}$ γεγονός, και X_n: ο χρόνος που περνάει μεταξύ του n – 1 και του n γεγονότος, τότε:

$T_1 = X_1$,

$T_2 = X_1 + X_2$

$T_3 = X_1 + X_2 + X_3$

….

$T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Οι τ.μ. T_1, T_2, …T_n, …, δεν είναι ανεξάρτητες καθώς $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$. Ωστόσο, κάθε

$$T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

είναι μία συνεχής τ.μ. που προκύπτει ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Exp(λ). Άρα, T_n ~ Erlang(n, λ) (κατανομή Erlang), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \; t > 0.$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_n(t) = P(T_n \leq t) \; = \; 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k \; , x \geq 0$$

Επιπλέον,

- $E(T_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n/\lambda$.
- $Var(T_n) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$

  $= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$

  $= n/\lambda^2$ (X_i, i = 1, 2, … ανεξάρτητες).

Σύνοψη

Αν X είναι ο χρόνος μεταξύ της εμφάνισης γεγονότων σε μία Poisson διεργασία, τότε X ~ Exp(λ) (εκθετική κατανομή με παράμετρο λ). Έστω T_n η χρονική στιγμή κατά την οποία το νιοστό γεγονός συμβαίνει σε μία Poisson διεργασία. Η αναμενόμενη τιμή της T_n είναι $E(T_n) = n/λ$ και η διακύμανση αυτής $Var(T_n) = n/λ^2$.

Παράδειγμα

Ερωτήσεις καταφθάνουν σε ένα μηχανισμό καταγραφής μηνυμάτων σύμφωνα με μία Poisson διεργασία με συχνότητα 15 ερωτήσεις το λεπτό.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ότι σε μία περίοδο 1 λεπτού, 3 ερωτήσεις θα φθάσουν κατά τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 κατά τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα, ο χρόνος έως τη δεύτερη ερώτηση να είναι μεγαλύτερος από τα 10 sec.

(γ) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του χρόνου μέχρι την άφιξη της $10^{ης}$ ερώτησης.

Λύση

Είναι λ = 15 / 60 = 0,25 ερωτήσεις / sec, άρα $P(N(t) = k) = e^{-0,25t} (0,25t)^k/k!$

(α) Τα χρονικά διαστήματα (0, 10] και (45, 60] δεν επικαλύπτονται άρα το πλήθος των ερωτήσεων στο ένα διάστημα είναι ανεξάρτητο με το πλήθος ερωτήσεων του άλλου. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(N(10) = 3,\ N(60) – N(45) = 2) = P(N(10) = 3) \cdot P(N(15) = 2)$$

$$= e^{-2,5}\, 2,5^3/3! \cdot e^{-3,75}\, 3,75^2/2!$$

$$= 0,2138 \cdot 0,1654$$

$$\approx 0,035 = 3,5\%.$$

(β) Αν X ο χρόνος μέχρι τη 2η ερώτηση τότε $X = X_1 + X_2$, όπου X_i ~ Exp(0,25), i = 1, 2, άρα τότε X ~ Erlang(2, 0.25) και

$$P(X > 10) = \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} e^{-0,25 \cdot 10}(0,25 \cdot 10)^n = 3,5 \cdot e^{-2,5} = 0,287.$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, P(X > 10) = P(N(10) = 0) + P(N(10) = 1) = 0,287.

(γ) Είναι $E(T_{10}) = 10 \cdot E(X) = 10 / λ = 40$ sec και

$Var(T_{10}) = 10 \cdot Var(X) = 10 / λ^2 = 160\ sec^2$, άρα $StDev(T_{10}) = 160^{0,5} = 12,6$ sec.

1.9. Άθροισμα ανεξάρτητων Poisson μεταβλητών

Πρόταση

Το άθροισμα δύο **ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών $X \sim Poisson(\lambda)$ και $Y \sim Poisson(\mu)$ είναι ομοίως κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda + \mu$, δηλαδή, αν $Z \sim X + Y$, και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε $Z \sim Poisson(\lambda + \mu)$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $P(Z = z) = e^{-\lambda+\mu} \cdot (\lambda + \mu)^z / z!$, για κάθε z ϵ N. Πράγματι, είναι

$P(Z = z) = \Sigma_{j = 0, 1, \ldots} P(Z = z, X = j)$ (Νόμος Ολικής Πιθανότητας)

$= \Sigma_{j = 0, 1, \ldots, z} P(Y = z - j, X = j)$ (αν $j > z$, τότε $P(Z = z \mid X = j) = 0$)

$= \Sigma_{j = 0, 1, \ldots, z} P(Y = z - j) \cdot P(X = j)$ (οι X, Y, είναι ανεξάρτητες τ.μ.)

$= \Sigma_{j = 0, 1, \ldots, z}\, e^{-\mu} \cdot \mu^{z - j} / (z - j)! \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^j / j!$

$= \Sigma_{j = 0, 1, \ldots, z}\, \mu^{z - j} / [j! \cdot (z - j)!] \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \lambda^j$

$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \Sigma_{j = 0, 1, \ldots, z}$ (z ανά j) $\cdot \lambda^j \cdot \mu^{z - j} / z!$

$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda + \mu)^z / z!$

Παρατηρήσεις

1. Η υπόθεση της (στοχαστικής) ανεξαρτησίας των X, Y είναι ουσιαστική. Αν οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες τότε $Cov(X, Y) > 0$ και κατά συνέπεια θα είναι

$$Var(X + Y) = Var(X) + 2Cov(X, Y) + Var(Y) > Var(X) + Var(Y) = E(X + Y),$$

δηλαδή, η τ.μ. X + Y δεν μπορεί να ακολουθεί την κατανομή Poisson στην οποία $\mu = \sigma^2$.

2. Η παραπάνω πρόταση δεν αποκλείει το ενδεχόμενο το άθροισμα δύο **εξαρτημένων** Poisson μεταβλητών να είναι Poisson μεταβλητή. Ένα παράδειγμα αναφέρεται στη δημοσίευση [Jacod, J. (1975). Two Dependent Poisson Processes Whose Sum Is Still a Poisson Process. Journal of Applied Probability, 12(1), 170–172. https://doi.org/10.2307/3212423]

1.10. Συγχώνευση διεργασιών Poisson

Πολλές φορές είναι απαραίτητη η αναγνώριση δύο ανεξάρτητων διεργασιών καταμέτρησης ως μία κοινή διεργασία καταμέτρησης, όπως για παράδειγμα όταν σε ένα αεροδρόμιο οι επιβάτες από δύο διαφορετικά εκδοτήρια εισιτηρίων, περνάνε από τον ίδιο έλεγχο αποσκευών.

Αντίστροφα, είναι δυνατό να απαιτηθεί ο διαχωρισμός μίας διεργασίας καταμέτρησης σε δύο μέρη, όταν για παράδειγμα υπάρχουν δύο ταμεία σε ένα εμπορικό κατάστημα για να εξυπηρετήσουν μία ουρά στην οποία οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με μία κατανομή Poisson.

Θα αποδείξουμε ότι εάν τα γεγονότα που περιγράφονται από μια διεργασία Poisson χωριστούν σε δύο νέες διεργασίες με τυχαία κατανομή των συμβάντων στις δύο διεργασίες, τότε οι νέες διεργασίες είναι διεργασίες Poisson και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η πιο χρήσιμη συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι (αντίστροφα σκεπτόμενοι) οποιεσδήποτε δύο ανεξάρτητες διεργασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από μια ενιαία διεργασία με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ορισμός

Δύο διακριτές διεργασίες συνεχούς χρόνου $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και $\{N_2(t), t \geq 0\}$ ονομάζονται ανεξάρτητες εάν για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς k και όλα τα $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, οι τυχαίες μεταβλητές $N_1(t_1),\ldots,N_1(t_k)$ είναι ανεξάρτητες από τις $N_2(t_1),\ldots,N_2(t_k)$.

Αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

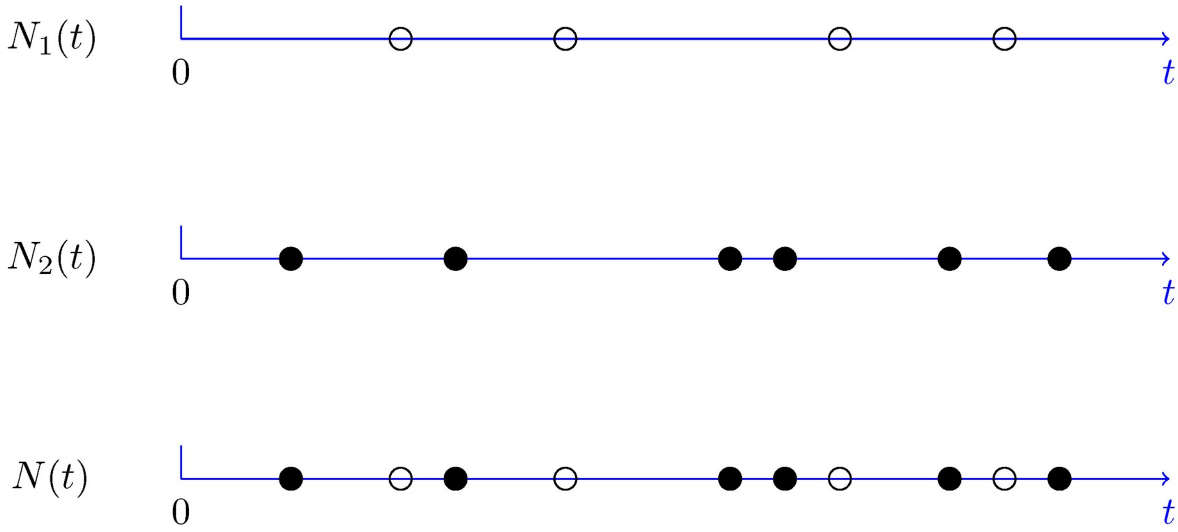
Οι διεργασίες καταμέτρησης $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και $\{N_2(t), t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τα διαστήματα μεταξύ των γεγονότων για τη $N_1(t)$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις αντίστοιχες μεταβλητές που εκφράζουν τα διαστήματα μεταξύ αφίξεων για τη $N_2(t)$.

Η απόδειξη παραλείπεται.

Έστω τώρα, $N_1(t)$ και $N_2(t)$ δύο *ανεξάρτητες* διεργασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t).$$

Η τυχαία διεργασία N(t) είναι το άθροισμα των γεγονότων στο διάστημα (0, t], που συμβαίνουν στην $N_1(t)$ και $N_2(t)$.



Διάγραμμα 8: Συγχώνευση Διεργασιών Poisson

Πρόταση

Η $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Απόδειξη

Πράγματι,

(α) $N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0$.

(β) Καθώς η $N_1(t)$ και η $N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν ανεξάρτητες προσαυξήσεις, συμπεραίνουμε ότι η N(t) έχει επίσης ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(γ) Αν $I = (t, t + \tau]$, $\tau > 0$, τότε το πλήθος γεγονότων στο I που σχετίζονται με τις $N_1(t)$ και $N_2(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές Poisson($\lambda_1\tau$) και Poisson($\lambda_2\tau$), συνεπώς, ο αριθμός των αφίξεων στο I που σχετίζεται με τη N(t) είναι Poisson(($\lambda_1+\lambda_2$)τ) (άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Poisson).

Γενικότερα, ισχύει ότι:

Έστω $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)$, m ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Αν,

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_m(t), \ t \geq 0.$$

Τότε, η N(t) είναι μια διεργασία Poisson με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$.

Παράδειγμα

Έστω $N_1(t)$ και $N_2(t)$ δύο ανεξάρτητες διεργασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ συμβάντα / χρονική μονάδα και $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ η συγχωνευμένη διεργασία.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να συμβούν στη συγχωνευμένη διεργασία, 5 γεγονότα στο διάστημα (0, 2] από τα οποία τα 2 γεγονότα να συμβούν στο διάστημα (0, 1].

(β) Γνωρίζοντας ότι έχουν συμβεί 2 γεγονότα στη συγχωνευμένη διεργασία στο χρονικό διάστημα (0, 1] να βρεθεί η πιθανότητα 1 από αυτά να έχει έρθει από την $N_1(t)$.

Λύση

Είναι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda = 3$.

(α) $P(N(1) = 2, N(2) = 5)$ = P(2 γεγονότα στο [0, 1) και άλλα 3 γεγονότα στο [1, 2)) =

= P(2 γεγονότα στο [0, 1)) · P(3 γεγονότα στο [1, 2)) =

= P(2 γεγονότα στο [0, 1)) · P(3 γεγονότα στο [0, 1)) =

$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2/2! \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^3/3! \approx 0{,}05 = 5\%$.

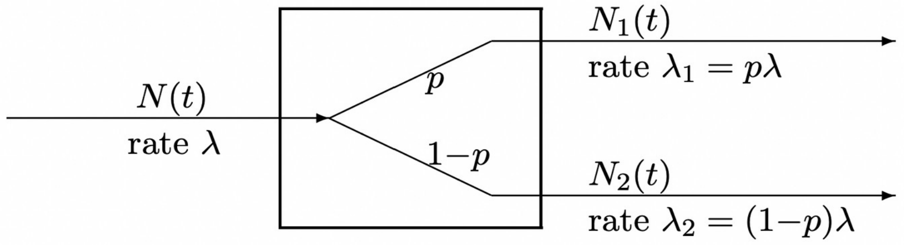
(β) $P(N_1(1) = 1 \mid N(1) = 2)$

$= P(N_1(1) = 1, N(1) = 2) / P(N(1) = 2)$

$= P(N_1(1) = 1) \cdot P(N_2(1) = 1) / P(N(1) = 2) =$

$= e^{-1} \cdot 2e^{-2} / e^{-3} \cdot 3^2/2! = 4/9 = 0{,}444\ldots \approx 44{,}4\%$

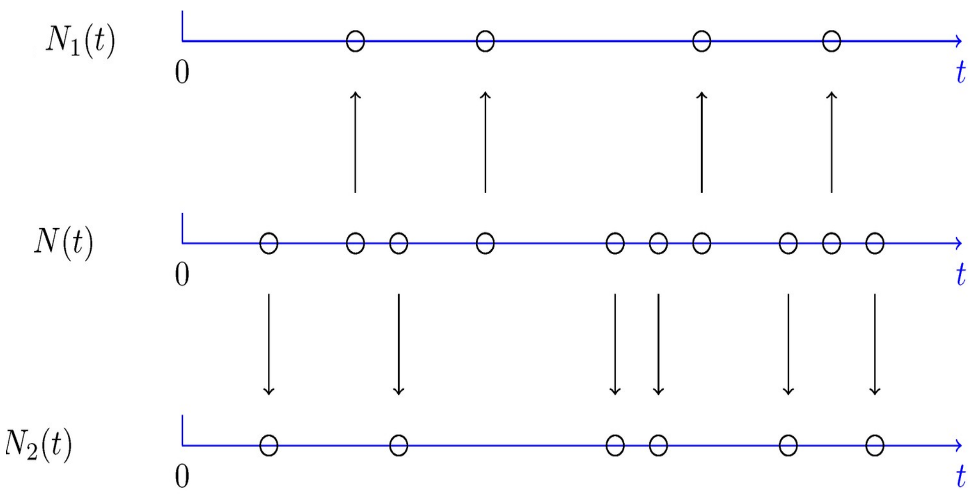
1.11. Διαίρεση διεργασιών Poisson



Διάγραμμα 9: Διαίρεση Διεργασιών Poisson (1)

Θεώρημα (διαίρεσης διεργασίας Poisson)

Έστω {N(t), t ≥ 0} διαδικασία Poisson με ρυθμό λ της οποίας κάθε ένα γεγονός, μοιράζεται σε δύο άλλες διεργασίες $N_1(t)$ και $N_2(t)$ με πιθανότητα p και 1 – p αντίστοιχα. Τότε, οι διεργασίες $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και $\{N_2(t), t \geq 0\}$ είναι δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους διεργασίες Poisson με παραμέτρους λp και λ(1 – p) αντίστοιχα.



Διάγραμμα 10: Διαίρεση Διεργασιών Poisson (2)

Παράδειγμα (αντί απόδειξης)

Ο αριθμός των πελατών N(t) που επισκέπτονται ένα εστιατόριο στο διάστημα (0, t], είναι διεργασία Poisson με παράμετρο λ. Η πιθανότητα ένας πελάτης να καταναλώσει και ποτό μαζί με το φαγητό του είναι p, ανεξάρτητα από άλλους πελάτες και ανεξάρτητα από την τρέχουσα τιμή του N(t). Έστω X(t) ο αριθμός των πελατών που αγοράζουν ποτό στο χρονικό διάστημα (0, t] και Y(t) ο αριθμός των πελατών που δεν αγοράζουν ποτό στο ίδιο διάστημα (δηλαδή, X(t) + Y(t) = N(t)).

(α) Να δείξετε ότι οι X(t), Y(t) είναι διεργασίες Poisson με ρυθμό pλ και (1 – p)λ αντίστοιχα.

(β) Να δείξετε ότι οι τ.μ. X(t) και Y(t) είναι ανεξάρτητες.

Λύση

(α) Φανερά, $X(0) = Y(0) = 0$. Επιπλέον, οι προσαυξήσεις των $X(t)$, $Y(t)$ αποτελούν ένα μέρος των προσαυξήσεων της $N(t)$) και η $N(t)$ είναι διεργασία Poisson άρα τόσο η $X(t)$ όσο και η $Y(t)$ θα έχουν ομοίως ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Απομένει να δείξουμε ότι για δοσμένο χρονικό διάστημα $\Delta = (0, t]$, είναι $X(t) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$ και $Y(t) \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p)t)$. Φανερά, τόσο η τ.μ. $X(t)$ όσο και η $Y(t)$ εξαρτώνται από την τρέχουσα τιμή που θα έχει αποκτήσει η τ.μ. $N(t)$.

Γνωρίζουμε ότι σε δοσμένο διάστημα Δ, είναι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Αν $N(t) = n$ τότε κάθε ένας από τους n πελάτες είτε παίρνει ποτό με πιθανότητα p είτε δεν παίρνει με πιθανότητα $1 – p$ και οι $X(t)$, $Y(t)$ μετράνε το πλήθος των αντίστοιχων συμβάντων.

Συνεπώς, είναι:

$$(X(t) \mid N(t) = n) \sim B(n, p) \text{ και } (Y(t) \mid N(t) = n) \sim B(n, 1 – p),$$

δηλαδή $P(X(t) = \kappa \mid N(t) = n) = (n \text{ ανά } \kappa)\, p^{\kappa}\cdot(1- p)^{n – \kappa}$ και αντίστοιχα,

$$P(Y(t) = \kappa \mid N(t) = n) = (n \text{ ανά } \kappa)\, (1 - p)^{\kappa}\cdot p^{n – \kappa},\ \kappa = 0, 1, \dots, n.$$

Για κάθε $\kappa = 0, 1, 2\dots$, είναι

$P_X(\kappa) = P(X(t) = \kappa) = \Sigma_{n = 0, 1, \dots} P(X(t) = \kappa \mid N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)$ (νόμος ολικής πιθανότητας)

$= \Sigma_{n = \kappa, \kappa+1, \dots} P(X(t) = \kappa \mid N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)$ (αν $n < \kappa$, τότε $P(X = \kappa) = 0$)

$= \Sigma_{n = \kappa, \kappa+1, \dots} (n \text{ ανά } \kappa) \cdot p^{\kappa}\cdot(1- p)^{n – \kappa}\cdot e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^{n}/n!$

$= \Sigma_{n = \kappa, \kappa+1, \dots} p^{\kappa}\cdot(1- p)^{n – \kappa}\cdot e^{-\lambda\Delta}\cdot(\lambda t)^{n}/[\kappa!(n - \kappa)!]$

$= e^{-\lambda t}\cdot(\lambda tp)^{\kappa}\cdot 1/\kappa!\cdot\Sigma_{n = \kappa, \kappa+1, \dots}[\lambda t(1- p)]^{n – \kappa}/(n - \kappa)!$

$= e^{-\lambda t}\cdot(\lambda tp)^{\kappa}\cdot 1/\kappa!\cdot\Sigma_{n = 0, 1, \dots}[\lambda t(1- p)]^{n}/n!$

$= e^{-\lambda t}\cdot(\lambda tp)^{\kappa}\cdot 1/\kappa!\cdot e^{\lambda t(1-p)}$

$= e^{-\lambda tp}\cdot(\lambda tp)^{\kappa}/\kappa!$

Άρα, $X(t) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$. Συμπεραίνουμε ότι η $X(t)$ είναι διεργασία Poisson με ρυθμό λp.
Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι $Y(t) \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p)t)$.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $P(X(t) = i, Y(t) = j) = P(X(t) = i) \cdot P(Y(t) = j)$.

Πράγματι, για i, j ε N, είναι

$P(X(t) = i, Y(t) = j) =$

$= \Sigma_{n = 0, 1, \ldots} P(X(t) = i, Y(t) = j \mid N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)$ (νόμος ολικής πιθανότητας)

$= P(X(t) = i, Y(t) = j \mid N(t) = i + j) \cdot P(N(t) = i + j)$ (είναι $P(X = i.\ Y = j \mid N = n) = 0$ αν $n \neq i + j$)

$= P(X(t) = i \mid N(t) = i + j) \cdot P(N(t) = i + j)$ (είναι $P(Y = j) = 1$, αν $X = i$ και $N = i + j$)

$= [(i + j)$ ανά $i] \cdot p^i \cdot (1 - p)^j \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^{i+j} / (i + j)!$ (είναι $(X(t) \mid N(t) = i + j) \sim B(i + j, p)$ και $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$)

$= e^{-\lambda} \cdot (\lambda p)^i \cdot [\lambda(1 - p)]^j \cdot / [i! \cdot j!]$

$= e^{-\lambda p} \cdot (\lambda p)^i / i! \cdot e^{-\lambda(1 - p)} \cdot [\lambda(1 - p)]^j \cdot / j!$

$= P(X(t) = i) \cdot P(Y(t) = j)$

Δείξαμε ότι $P(X(t) = i, Y(t) = j) = P(X(t) = i) \cdot P(Y(t) = j)$, άρα οι τυχαίες μεταβλητές X(t), Y(t) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σημείωση

Το τελευταίο αποτέλεσμα φαίνεται παράδοξο γιατί οι X(t), Y(t) συνδέονται πάντα με τη σχέση $X(t) + Y(t) = N(t)$. Ωστόσο, αυτή η σχέση δεν προσδιορίζει την τιμή καμίας από τις δύο καθώς η N(t) εξακολουθεί και παίρνει οποιαδήποτε τιμή στους φυσικούς αριθμούς. Ειδικότερα, η ανεξαρτησία τους αντανακλά το γεγονός πως η κατανομή των αφίξεων σε αυτές γίνεται με τυχαίο τρόπο.

Παράδειγμα

Έστω $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και $\{N_2(t), t \geq 0\}$ δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, αντίστοιχα. Βρείτε την πιθανότητα η $2^η$ άφιξη στο $N_1(t)$ να συμβεί πριν από την $3^η$ άφιξη στο $N_2(t)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συγχωνευμένη διεργασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3$. Οι διεργασίες $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και $\{N_2(t), t \geq 0\}$ μπορούν να θεωρηθούν τα μέρη στα οποία διαιρείται η $\{N(t), t \geq 0\}$ αν κάθε γεγονός της αποδοθεί στη $\{N_1(t), t \geq 0\}$ με πιθανότητα $p = 1/3$ και στη $\{N_2(t), t \geq 0\}$ με πιθανότητα $1 - p = 2/3$.

Στην περίπτωση της παραπάνω θεώρησης, το θεώρημα διαίρεσης μίας διεργασίας Poisson μας διασφαλίζει ότι στην περίπτωση αυτή θα είναι $N_1(t) \sim Poisson(\lambda p) = Poisson(1)$ και $N_2(t) \sim Poisson(\lambda(1\text{-}p)) = Poisson(2)$ όπως προβλέπεται στην υπόθεση της άσκησης. Τώρα, είναι:

P({η δεύτερη άφιξη στη N_1(t) να συμβεί πριν από την τρίτη άφιξη στη N_2(t)})

= P({ από τις πρώτες 4 αφίξεις στη N(t), οι 2 τουλάχιστον να διανεμηθούν στην N_1(t)})

= P({ από τις πρώτες 4 αφίξεις στη N(t), οι 2 ή οι 3 ή οι 4 να διανεμηθούν στην N_1(t)})

= P_0.

Αν, κάθε μία από τις πρώτες 4 αφίξεις θεωρηθεί ως δοκιμασία Bernoulli όπου “επιτυχία” είναι η διανομή της στη N_1(t) με πιθανότητα p = 1/3, τότε αρκεί να βρούμε την πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 2 “επιτυχίες” σε 4 ανεξάρτητες δοκιμές. Υπολογίζουμε:

$P_0 = \Sigma_{\kappa = 2, 3, 4}$ (4 ανά κ) $p^{\kappa} (1 - p)^{n - \kappa}$

$= 6\,(1/3)^2\,(2/3)^2 + 4\,(1/3)^3\,(2/3) + (1/3)^4$

= 33/81 = 0,407 = 40,7%.

Εναλλακτική Λύση

Αν X = {ο χρόνος έως τη $2^{η}$ άφιξη στο N_1(t)}, Y = {ο χρόνος έως τη $3^{η}$ άφιξη στο N_2(t)}, τότε X, Y ανεξάρτητες, X ~ Erlang(2, 1), Y ~ Erlang(3, 2) και $f_X(x) = x\,e^{-x}$, $f_Y(x) = 4\,x^2 e^{-2x}$, x > 0.

Υπολογίζουμε

$$P(X < Y) = \iint_{x<y} f_{X,Y}(x, y)\,dxdy = \iint_{x<y} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{y} f_X(x)\,dx \right) f_Y(y)\,dy$$

Είναι $\displaystyle\int_0^{y} f_X(x)\,dx = \int_0^{y} x \cdot e^{-x}\,dx = (-y-1)e^{-y} + 1$

Τελικά: $\displaystyle P(X < Y) = \int_0^{\infty} [(-y-1)e^{-y} + 1]\,4y^2 e^{-2y}\,dy = \frac{11}{27} = 0{,}407.$

Σημειώσεις

1. Για την πιθανότητα της μορφής P(X < Y) περισσότερες πληροφορίες μπορούν να βρεθούν εδώ: ***https://math.stackexchange.com/questions/261073/finding-probability-pxy***

2. Κωδικός Octave για την επαλήθευση των υπολογισμών:

```
syms x y; f = x*e^(-x); p = int (int(f, 0, y)*4*y^2*e^(-2*y), 0, inf)
```

1.12. Ασκήσεις στις διεργασίες Poisson

1. Γνωρίζοντας ότι $e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ να αποδείξετε ότι $e^{-\lambda} = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το όριο του λογαρίθμου της παράστασης.

2. Οι ακόλουθες δύο πιθανότητες προκύπτουν από τη διωνυμική κατανομή και τη κατανομή Poisson, αντίστοιχα. Ποια από τις παρακάτω είναι την πιθανότητα, αν ρίξουμε αν ζάρι 6 φόρες, να έρθει ο αριθμός 3 δύο φορές;

(α) $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}2009$ (β) $e^{-3{,}5}\frac{3{,}5^2}{2!} = 0{,}1850$

3. Ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή ανά δευτερόλεπτο ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 5. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) και P(X ≥ 3).

4. Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Αν ισχύει P(X ≤ 1) = 4·P(X = 2), να προσδιοριστεί η παράμετρος λ και να υπολογιστούν οι πιθανότητες P(X < 3), P(X ≥ 1 | X < 3).

5. Τα τελευταία 100 χρόνια, έχουν σημειωθεί 93 σεισμοί μεγέθους 6,0 και άνω της κλίμακας Ρίχτερ. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε 3 σεισμούς την ίδια χρονιά που έχουν όλοι μέγεθος 6,0 ή περισσότερο;

6. Ένα τηλεφωνικό κέντρο δέχεται 2 κλήσεις κάθε 3 λεπτά. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να φτάσουν 5 ή περισσότερες κλήσεις σε διάστημα 9 λεπτών.

7. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα δύο **ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών X_1 ~ Poisson(λ_1) και X_2 ~ Poisson(λ_2) είναι ομοίως κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$, δηλαδή, αν X ~ $X_1 + X_2$, τότε X ~ Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$).

Υπόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι $P(X = z) = e^{-\lambda}\cdot\lambda^z/z!$, για κάθε z ε N και $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

8. Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε ένα μάρκετ μπορεί να θεωρηθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ = 10 πελάτες ανά ώρα.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 3 πελάτες μεταξύ 10:00 και 10:20 και 7 πελάτες μεταξύ 10:20 και 11.

9. Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ = 0,5 αφίξεις / μονάδα χρόνου.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην συμβεί καμία άφιξη στο διάστημα (3, 5].
(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα διαστήματα: (0, 1], (1, 2], (2, 3] και (3, 4].

10. Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ = 3 αφίξεις / μονάδα χρόνου. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν δύο αφίξεις στο (0, 2] και τρεις αφίξεις στο (1, 4].

11. Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ. Να βρεθεί η συνάρτηση συνδιακύμανσης $C_N(t_1, t_2) = Cov(N(t_1), N(t_2)) = E(N(t_1) - \lambda t_1, N(t_2) - \lambda t_2)$, συναρτήσει των t_1, t_2 για κάθε $t_1, t_2 \geq 0$.

12. Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ = 5 αφίξεις / min.

(α) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1η άφιξη.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα η 1η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

13. Έστω $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ μια διεργασία Poisson με ρυθμό λ. Να δειχθεί ότι, αν γνωρίζουμε πως έχει συμβεί μία άφιξη μέχρι τη χρονική στιγμή t (N(t) = 1), τότε ο χρόνος x που αυτή έχει συμβεί, $0 \leq x \leq t$, έχει ομοιόμορφη κατανομή στο (0, t].

Υπόδειξη
Αν X_1 η χρονική στιγμή που έγινε η $1^η$ άφιξη, τότε, αρκεί να δειχθεί ότι $P(X_1 \leq x \mid N(t) = 1) = x/t$, $0 \leq x \leq t$.

14. Αν γνωρίζουμε ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας ενός εστιατορίου έχει έρθει ένας πελάτης, να βρεθεί η πιθανότητα αυτός

(α) να έχει έρθει στα πρώτα 10 λεπτά.

(β) να έχει έρθει μεταξύ του 25 και του 40 λεπτού της ώρας.

15. Να βρεθεί η πιθανότητα, δύο πελάτες που έχουν αφιχθεί σε ένα κατάστημα τα πρώτα δύο λεπτά από τη στιγμή που άνοιξε, να έχουν αφιχθεί στο πρώτο από τα δύο λεπτά.

16. Έστω X ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο αφίξεων σε μία διεργασία Poisson με παράμετρο λ. Να αποδείξετε ότι τότε για κάθε t_0, $x \geq 0$, $P(X > x + t_0 \mid X > t_0) = P(X > x)$

17. Έστω $T_1, T_2, \ldots T_n, \ldots$, ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την υλοποίηση του 1ου, 2ου, …, n – οστού, … γεγονότος. Να δείξετε ότι (α) $E(T_n) = n/\lambda$. (β) $Var(T_n) = n/\lambda^2$.

18. Ερωτήσεις καταφθάνουν σε ένα μηχανισμό καταγραφής μηνυμάτων σύμφωνα με μία Poisson διεργασία με ένταση 15 ερωτήσεων το λεπτό.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ότι σε μία περίοδο 1 λεπτού, 3 ερωτήσεις να φθάσουν κατά τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 κατά τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

(β) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου μέχρι την άφιξη της $10^{ης}$ ερώτησης.

19. Έστω $N_1(t)$ και $N_2(t)$ δύο ανεξάρτητες διεργασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ συμβάντα / χρονική μονάδα και $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ η συγχωνευμένη διεργασία.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να συμβούν στη συγχωνευμένη διεργασία 2 γεγονότα στο χρονικό διάστημα (0, 1] και συνολικά 5 γεγονότα στο χρονικό διάστημα (0, 2].

(β) Γνωρίζοντας ότι έχουν συμβεί 2 γεγονότα στη συγχωνευμένη διεργασία στο χρονικό διάστημα (0, 1] να βρεθεί η πιθανότητα 1 από αυτά να έχει έρθει από την $N_1(t)$.

Παράρτημα 1: Γέννεση της κατανομής Poisson ως όριο δοκιμασιών Bernoulli

Διαχωρίζουμε τη μονάδα του χρόνου σε n μέρη. Σε κάθε ένα από αυτά είτε συμβαίνει είτε δεν συμβαίνει μία άφιξη και έστω p η πιθανότητα άφιξης σε κάθε ένα από αυτά τα μέρη. Αν X_n η τ.μ. που μετράει το πλήθος αφίξεων στη μονάδα του χρόνου, τότε $X_n \sim B(n, p)$ και $E(X_n) = np$.

Αν λ το (γνωστό) πλήθος αφίξεων στη μονάδα του χρόνου, τότε ορίζουμε p = λ / n και θεωρούμε την τ.μ. $X_n \sim B(n, \lambda/n)$ για $n \geq \lambda$. Η τ.μ. X_n, εξακολουθεί να έχει $E(X_n) = \lambda$ και τώρα μετράει τις αφίξεις στην μονάδα του χρόνου, όταν αυτή η χρονική μονάδα διαχωρίζεται σε n μέρη και σε κάθε ένα από αυτά υπάρχει πιθανότητα άφιξης λ / n.

Για p = λ / n και για $k \leq n$, γράφουμε:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Όμως

- $$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k} = 1.$$
- $$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}. \quad (*)$$
- $$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = P(Y = k), \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

(*) Απόδειξη του $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}}$**.**

Θέτουμε $y_n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$, άρα $\ln y_n = n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

Είναι $$\lim_{n \to \infty} \ln y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}\left(-\frac{\lambda}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lambda.$$ (κανόνας De L'Hospital)

Άρα $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y_n} = e^{\lambda}$.

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ)

Μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου $\{X(t),\ t \geq 0\}$ (ΜΑΣΧ), $X(t) \in S$, είναι ένα σύστημα όπου:

(α) Το σύστημα παραμένει σε κάθε μία κατάσταση για χρόνο $Exp(\lambda_i)$ κατανομή, $i \in S$.

(β) Το σύστημα τηρεί η Μαρκοβιανή Ιδιότητα στη συνεχή της εκδοχή:

Για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, είναι

$$P(X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_1) = i_1) = P(X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n)=i).$$

(γ) Η αλυσίδα είναι ομογενής ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$P(X(s + t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),\ s, t \geq 0.$$

Ο πίνακας μετάβασης μίας ΜΑΣΧ είναι συνάρτηση του χρόνου. Ενδεικτικά, αν $S = \{1, 2, \dots, n\}$, γράφουμε

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

όπου $p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),\ s, t \geq 0$.

Καθώς, ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i \in S$ ακολουθεί την $Exp(\lambda_i)$ κατανομή, συμπεραίνουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στην κατάσταση i είναι $1/\lambda_i$. Ειδικότερα, αν η κατάσταση i είναι απορροφητική τότε $\lambda_i = 0$.

Έστω T_i ο χρόνος παραμονής του συστήματος στην κατάσταση i. Είναι

$$P(T_i < \delta) = 1 - e^{-\lambda_i \delta} = 1 - (1 - \lambda_i \delta) + \delta o(\delta) = \lambda_i \delta + \delta o(\delta).$$

Καθώς, $P(T_i < \delta) = P(X(\delta) \neq i \mid X(0) = i)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_i = \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{P(T_1 < \delta)}{\delta} - o(\delta)\right] = \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{P(X(\delta) \neq i \mid X(0) = i)}{\delta}\right]$$

Συνεπώς, το λ_i, εκτός από ρυθμός αποχωρήσεων από την κατάσταση i στη μονάδα του χρόνου, αναγνωρίζεται και ως **ο ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας το σύστημα να αλλάξει κατάσταση, αν βρίσκεται στην κατάσταση i ϵ S**.

Για κάθε μία ΜΑΣΧ ορίζεται μία ενσωματωμένη αλυσίδα μετάβασης (η οποία είναι ΜΑΔΧ) η οποία περιγράφει τη μετάβαση μεταξύ των καταστάσεων της ΜΑΣΧ. Καθώς, δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε πως η αλυσίδα μεταβαίνει στην ίδια κατάσταση κάποια χρονική στιγμή (για να παρατηρηθεί αυτό το φαινόμενο πρέπει να έχει προηγηθεί μετάβαση σε κάποια γειτονική κατάσταση), προκύπτει πως για τον πίνακα μετάβασης Q της ενσωματωμένης ΜΑΔΧ είναι $q_{ii} = 0$, για όλες τις μη απορροφητικές καταστάσεις $i \in S$.

Παράδειγμα

Έστω μια ΜΑΣΧ με $S = \{0, 1\}$ και παραμέτρους χρόνου παραμονής $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$.

(α) Να περιγραφεί η ενσωματωμένη ΜΑΔΧ (χώρος καταστάσεων, πίνακας μετάβασης, διάγραμμα καταστάσεων).

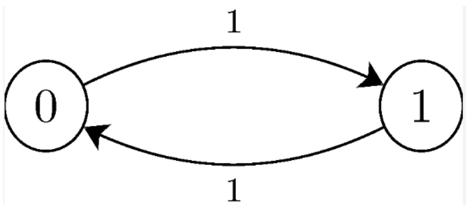
(β) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $P(t)$ της ΜΑΣΧ.

Λύση

(α) Η ενσωματωμένη ΜΑΔΧ κληρονομεί από τη ΜΑΣΧ το χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1\}$. Ο πίνακας μετάβασης της ΜΑΔΧ είναι ο

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και το διάγραμμα καταστάσεων είναι το:



(β) Αρκεί να βρούμε τις πιθανότητες

$p_{00}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0)$, $p_{01}(t) = P(X(t) = 1 \mid X(0) = 0)$

$p_{10}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 1)$, $p_{11}(t) = P(X(t) = 1 \mid X(0) = 1)$

Αν $X(0) = 0$, τότε για να είναι $X(t) = 0$, αρκεί να έχουν γίνει μεταβάσεις οποιουδήποτε πλήθους της μορφής $0 \to 1 \to 0$.

Ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση 0 είναι $\text{Exp}(\lambda)$, άρα παραμένει στην κατάσταση αυτή για αναμενόμενο χρόνο $1/\lambda$, ή ισοδύναμα αναμένονται λ αναχωρήσεις από τη 0 στη μονάδα του χρόνου ή λt αναχωρήσεις στο διάστημα $(0, t]$. Καθώς η μόνη πιθανή διέξοδος από την κατάσταση 0 είναι η κατάσταση 1, συμπεραίνουμε ότι οι μεταβάσεις $0 \to 1$ στο διάστημα $(0, t]$ είναι $\text{Poisson}(\lambda t)$ μεταβλητή.

Αντίστοιχα, οι μεταβάσεις $1 \to 0$ είναι ομοίως $\text{Poisson}(\lambda t)$ μεταβλητή (είναι σημαντικό πως $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$ – αν ήταν $\lambda_0 \neq \lambda_1$ τότε το πρόβλημα θα ήταν πιο περίπλοκο!).

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως η πιθανότητα της διαδρομής $0 \to 1 \to 0$ σε οποιοδήποτε πλήθος βημάτων είναι η πιθανότητα να υπάρχουν άρτιου πλήθους αφίξεις σε *μία* διεργασία $\text{Poisson}(\lambda t)$. Αντίστοιχα, υπολογίζουμε:

$p_{00}(t) = P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0)$

$= P(\{\text{Αφίξεις} = 2n, \text{ όπου Αφίξεις} \sim \text{Poisson}(\lambda t)\})$

$= \Sigma_{n\geq 0}\, e^{-\lambda t} (\lambda t)^{2n} / (2n)!$ (από ορισμό κατανομής Poisson)

$= e^{-\lambda t} \Sigma_{n\geq 0} (\lambda t)^{2n} / (2n)!$

$= e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t)$

$= e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) / 2$

$= ½ + ½ e^{-2\lambda t}$.

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$p_{01}(t) = 1 – p_{00}(t) = ½ – ½ e^{-2\lambda t}$.

Από τη συμμετρία των καταστάσεων, ανάλογα βρίσκουμε:

$p_{11}(t) = p_{00}(t) = ½ + ½ e^{-2\lambda t}$,

$p_{10}(t) = p_{01}(t) = ½ – ½ e^{-2\lambda t}$.

Συμπεραίνουμε, ότι ο πίνακας μετάβασης της ΜΑΣΧ είναι ο

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα

Αν P(t) είναι ο πίνακας μετάβασης μίας ΜΑΣΧ, τότε

(α) $P(0) = I$ (για κάθε i, j ϵ S, $p_{ii}(0) = 1$ και $p_{ij}(0) = 0$, $i \neq j$).

(β) Οι γραμμές έχουν άθροισμα 1.

(γ) $P(t + s) = P(t)P(s)$ (Εξισώσεις Chapman – Kolmogorov).

Απόδειξη

(α), (β): Προφανή

(γ) Η απόδειξη του (γ) είναι ανάλογη της διακριτής περίπτωσης. Πράγματι, για κάθε i, j ϵ S, είναι:

$[P(t + s)]_{ij} = p_{ij}(s + t)$

$= P(X(s + t) = j \mid X(0) = i)$

$= \Sigma_{k\epsilon S} P(X(s + t) = j \mid X(s) = k) \cdot P(X(s) = k \mid X(0) = i)$

$= \Sigma_{k\epsilon S}\, p_{kj}(t) \cdot p_{ik}(s)$

$= \Sigma_{k\epsilon S}\, p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(t)$

$= [P(t)P(s)]_{ij}$, $s, t \geq 0$.

Ορισμός (Οριακή κατανομή ΜΑΣΧ)

Έστω X(t) μια ΜΑΣΧ με πίνακα μετάβασης P(t) και χώρο κατάστασης S={0, 1, 2, ...}. Μια κατανομή πιθανότητας $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots]$, $\pi_i \in [0, 1]$, $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, ονομάζεται οριακή κατανομή για τη X(t) εάν

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = i \mid X(0) = j), \text{ για κάθε } j \in S.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η οριακή κατανομή (αν υπάρχει) για το τελευταίο παράδειγμα ΜΑΣΧ.

2.1. Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα από την πραγματική ανάλυση

Θεώρημα

Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι θετική. Πράγματι, για κάθε x є R:
$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0 \leftrightarrow f(x) > 0$ καθώς η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική.

Θέτοντας x = y = 0 παίρνουμε, $f(0) = f(0)^2 \leftrightarrow f(0) = 0$ ή $1 \leftrightarrow$ **f(0) = 1** καθώς f(x) ≠ 0.

Τώρα, παρατηρούμε ότι από την υπόθεση f(x + y) = f(x) ·f(y), γενικότερα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)}$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση για τον φυσικό αριθμό n є N, υπολογίζουμε:

$$f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1)^n$$

Τώρα, αν m є Z^- = {…, -3, -2, -1, 0} , τότε -m є N, και $f(-m) = f(1)^{-m}$. Επιπλέον:

$$f(m) \cdot f(-m) = f(m - m) = f(0) = 1, \text{ άρα } f(m) = f(-m)^{-1} = [f(1)^{-m}]^{-1} = f(1)^m,$$

Δηλαδή $\mathbf{f(m) = f(1)^m}$, m є Z.

Περνώντας από τους ακέραιους στους ρητούς, παρατηρούμε ότι για κάθε ρητό 1/λ με λ є N^* είναι:

$$f(1) = f(1/\lambda) + f(1/\lambda) + \ldots + f(1/\lambda) \text{ (λ φορές)} = [f(1/\lambda)]^\lambda \leftrightarrow f(1/\lambda) = f(1)^{1/\lambda},$$

Αξιοποιώντας την f(1/λ)·f(-1/λ)= f(1/λ – 1/λ) = f(0) = 1, βρίσκουμε ότι το ίδιο ισχύει για λ є Z^-.

Γενικότερα, αν κ/λ є Q με κ ≥ 0, λ > 0, τότε

$$f(\kappa/\lambda) = f(1/\lambda + 1/\lambda + \ldots + 1/\lambda) \ (\kappa \text{ φορές}) = f(1/\lambda)^{\kappa} = f(1)^{\kappa/\lambda}.$$

Συμπέρασμα που ανάλογα γενικεύεται για κ є Z, λ є Z^*.
Έχοντας αποδείξει ότι $f(\rho) = f(1)^{\rho}$, για κάθε ρ є Q, η συνέχεια είναι απλή:

Οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, άρα για κάθε x є R – Q, υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $\rho_n \to x$. Καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής είναι:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} \rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)^{\rho n} = f(1)^{\lim n\to\infty \rho n} = f(1)^x. = e^{cx},$$

για c = ln(f(1)).

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

2.2. Στοιχεία για τις ημιομάδες τελεστών

Στα πλαίσια της θεωρίας τελεστών ο ορισμός της ημιομάδας είναι ο εξής:

Ορισμός (θεωρίας τελεστών)

Ένα σύνολο τελεστών {T(t), t ≥ 0}, φραγμένων και ορισμένων σε ένα διανυσματικό χώρο Banach X, ονομάζεται **ημιομάδα (semigroup)** όταν τα στοιχεία του ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες

- T(0) = I
- T(t + s) = T(t) T(s)
- $\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x, \quad x \in X.$

Για μία ημιομάδα τελεστών, ορίζεται ο απειροστικός γεννήτορας (infinitesimal generator):

Ορισμός

Ως **απειροστικός γεννήτορας** της ημιομάδας τελεστών {T(t), t ≥ 0} όπου T(t): X → X, ορίζεται να είναι ο τελεστής

$$G = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t}$$

Το πεδίο ορισμού του G είναι το υποσύνολο του X, στο οποίο το όριο υπάρχει, δηλαδή στο σύνολο $\left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ υπάρχει στο } X \right\}$

Ο απειροστικός γεννήτορας έχει την ικανότητα αναπαράστασης της ημιομάδας, ενώ συνδέεται μαζί της με διαφορικές σχέσεις. Ειδικότερα, ισχύει ότι:

Θεώρημα

Για κάθε t ≥ 0, είναι

- $T(t) = e^{Gt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(Gt)^n}{n!}$.

- T'(t) = G T(t) (Backward equation)

- T'(t) = T(t) G (Forward equation)

Σημείωση: Η έννοια της ημιομάδας και τα αποτελέσματα που τη συνοδεύουν αποτελούν τη φυσική γενίκευση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^{\lambda x}$, στα πλαίσια ενός συνόλου τελεστών.

2.3. Ο πίνακας μετάβασης P(t) ως ημιομάδα πινάκων

Αν θεωρήσουμε το σύνολο των πινάκων μεταβάσεων {P(t), t ≥ 0} εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων, παρατηρούμε ότι:

- P(0) = I
- P(t + s) = P(t)P(s) (Μαρκοβιανή Ιδιότητα)
- $\lim_{t \to 0^+} P(t)\pi = \pi$, (προκύπτει από τη συνέχεια της συνάρτησης πιθανότητας)

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι:

Το σύνολο των πινάκων μεταβάσεων {P(t), t ≥ 0} εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων, αποτελεί μία **ημιομάδα (semigroup) πινάκων.**

Ως ημιομάδα, το σύνολο των πινάκων μεταβάσεων {P(t), t ≥ 0} οφείλει να έχει και απειροστικό γεννήτορα, ο οποίος θα ορίζεται ως $G = \lim_{t \to 0^+} \frac{P(t) - I}{t}$. Για τον ακριβή υπολογισμό του, αξιοποιούμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση

Έστω {X(t), t ≥ 0} μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου και Q ο πίνακας μετάβασης της ενσωματωμένης διακριτής Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Έστω ακόμα λ_i ο ρυθμός αποχώρησης του συστήματος από την κατάσταση i.

Αν $p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$ τότε

$$p_{ij}(t) = I(i,j)e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} Q p_{ij}(t-s)ds, \quad i,\ j \in S.$$

Έστω τώρα ότι $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$ και $G = [g_{ij}]_{i,j \in S}$. Αξιοποιώντας την τελευταία πρόταση και τον ορισμό του G, αποδεικνύεται επιπλέον ότι:

$$g_{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{p_{ij}(t) - I(i,j)}{t} = -\lambda_i I(i,j) + \lambda_i q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij}, & i \neq j \\ -\lambda_i, & i = j \end{cases}, \quad i, j \in S.$$

Η ποσότητα **$g_{ij} = \lambda_i q_{ij}$** ονομάζεται **ρυθμός μετάβασης από την i στην j**.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως:

Ο απειροστικός γεννήτορας G, προσδιορίζει τόσο τους ρυθμούς μετάβασης όσο και τον πίνακα μετάβασης Q της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Ειδικότερα, αν γνωρίζουμε τον πίνακα $G = [g_{ij}]_{i,j\epsilon S}$, τότε

- $\lambda_i = -g_{ii}$, i є S.
- $q_{ij} = -\dfrac{g_{ij}}{g_{ii}}, \ i \neq j.$

Επιπλέον, ισχύουν τα εξής:

- $g_{ii} \leq 0$, i є S.
- $\sum_{j \in S} g_{ij} = 0.$

Σημείωση: Αποδείξεις για τα παραπάνω αποτελέσματα είναι διαθέσιμες εδώ: https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability_Theory/Probability_Mathematical_Statistics_and_Stochastic_Processes_(Siegrist)/16%3A_Markov_Processes/16.16%3A_Transition_Matrices_and_Generators_of_Continuous-Time_Chains

Παράδειγμα

Έστω μια ΜΑΣΧ με S = {0, 1} και παραμέτρους χρόνου παραμονής $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$. Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

Λύση

Είναι $g_{01}(t) = \lambda_0 \cdot q_{01} = \lambda$, $g_{10}(t) = \lambda_1 \cdot q_{10} = \lambda$.

$g_{00}(t) = -\lambda_0 = -\lambda$, $g_{11}(t) = -\lambda_1 = -\lambda$.

Συμπεραίνουμε ότι

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα για μία ΜΑΣΧ που κληρονομείται από τη θεωρία των ημιομάδων τελεστών είναι το παρακάτω.

Θεώρημα (Διαφορικές Εξισώσεις Kolmogorov)

Για κάθε Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, ισχύουν οι εξής δύο εξισώσεις

- $P'(t) = P(t) \cdot G$ (forward equation)

- $P'(t) = G \cdot P(t)$ (backward equation)

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις αυτές είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις σχέσεις

- $p'_{ij}(t) = \Sigma_{k \in S} p_{ik}(t) g_{kj}$, i, j є S
- $p'_{ij}(t) = \Sigma_{k \in S} g_{ik} p_{kj}(t)$, i, j є S

Οι εξισώσεις προς τα εμπρός (forward) και προς τα πίσω (backward) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για να απαντηθούν ερωτήσεις που αφορούν μία αλυσίδα Markov. Ειδικότερα, ισχύει και η εξής:

Πρόταση

Αν G είναι ο γεννήτορας πίνακας μίας ΜΑΣΧ και P(t) ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και t, τότε

$$P(t) = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!}$$

Σημείωση: Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν εδώ:

https://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/312/ContinuousTime.pdf

Παράδειγμα

Έστω μια ΜΑΣΧ με S = {0, 1} και παραμέτρους χρόνου παραμονής $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$. Να επαληθεύσετε ότι $P'(t) = G \cdot P(t) = P(t) \cdot G$.

Λύση

Είναι

$$P'(t) = \begin{bmatrix} -\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t} \\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t} \end{bmatrix}.$$

και

$$P(t) \cdot G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t} \\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} = P'(t)$$

$$G\cdot P(t) = \begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \lambda & -\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda e^{-2\lambda t} & \lambda e^{-2\lambda t}\\ \lambda e^{-2\lambda t} & -\lambda e^{-2\lambda t}\end{bmatrix}=P'(t)$$

Συμπεραίνουμε, ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει.

Παράδειγμα

Σε μία ΜΑΣΧ, με S = {1, 2, 3} ο απειροστικός γεννήτορας είναι ο πίνακας

$$G = \begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση 3, τότε ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση 1 μετά από 2 χρονικές περιόδους;

Λύση

Αν P(t) ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των στιγμών 0 και t, τότε

$$P'(t) = G\cdot P(t)$$

από όπου προκύπτει

$$P(t) = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tG)^n}{n!}$$

Στο σημείο αυτό διαγωνιοποιούμε τον πίνακα G. Οι ιδιοτιμές του είναι 0, -5, -4 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$G = V\cdot D\cdot V^{-1},\ \text{όπου}\ D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}.$$

Συνάγουμε, ότι:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{V(tD)^n V^{-1}}{n!} = V\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tD)^n}{n!}V^{-1} = V\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5t)^n}{n!} & 0\\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4t)^n}{n!}\end{bmatrix}\cdot V^{-1}$$

ή

$$P(t) = V \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot V^{-1}$$

Τελικά

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5t} & \frac{1}{10}\left(e^{-5t}(5e^{t} - 8) + 3\right) & \frac{1}{10}e^{-5t}(-5e^{t} + e^{5t} + 4) \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5t} & \frac{1}{10}\left(e^{-5t}(12 - 5e^{t}) + 3\right) & \frac{1}{10}e^{-5t}(5e^{t} + e^{5t} - 6) \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5t} & \frac{3}{10}e^{-5t}(-5e^{t} + e^{5t} + 4) & \frac{1}{10}e^{-5t}(15e^{t} + e^{5t} - 6) \end{bmatrix}$$

Για t = 2, είναι

$$[P(2)]_{31} = \frac{3}{5}(1 - e^{-10}) = 0{,}6.$$

Σημειώσεις

1. Κώδικας octave για τους υπολογισμούς: format rat; [V, D] = eig(G)

2. Σχετική αναφορά: https://math.stackexchange.com/questions/3994279/probabilities-and-rates-in-a-ctmc/4007906#4007906

2.4. Στάσιμη κατανομή μίας ΜΑΣΧ

Ορισμός

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου και $\{P(t), t \geq 0\}$ το σύνολο των πινάκων μετάβασης. Μία κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$, ονομάζεται στάσιμη όταν

$$\pi P(t) = \pi,$$

για κάθε $t \geq 0$.

Όταν υπάρχει η οριακή κατανομή, τότε αυτή θα είναι και στάσιμη. Ωστόσο, είναι δυνατόν να υπάρχει η στάσιμη κατανομή χωρίς να υπάρχει η οριακή. Ο εντοπισμός της μπορεί να γίνει με τους παρακάτω δύο τρόπους.

a) Εύρεση στάσιμης κατανομής ΜΑΣΧ από την αντίστοιχη ΜΑΔΧ

Ο υπολογισμός της οριακής κατανομής μίας ΜΑΣΧ, ορισμένες φορές μπορεί να γίνει μέσα από την αντίστοιχη ενσωματωμένη ΜΑΔΧ.

Προς αυτήν την κατεύθυνση, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω {X(t), t ≥ 0} μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ), με χώρο καταστάσεων S = {1, 2, …}, της οποίας η αντίστοιχη Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ) είναι αδιαχώριστη και επαναληπτική (δηλαδή το σύστημα αν βρεθεί σε μία κατάσταση, τότε επιστρέφει σε αυτή στο μέλλον με θετική πιθανότητα).

Αν $\tilde{\pi} = [\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, ...]$ είναι η στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ, λ_1, λ_2, …, είναι οι ρυθμοί μετάβασης από τις καταστάσεις 1, 2, .., και $\Lambda = \sum_{k \in S} \frac{\tilde{\pi}_k}{\lambda_k} < +\infty$, τότε

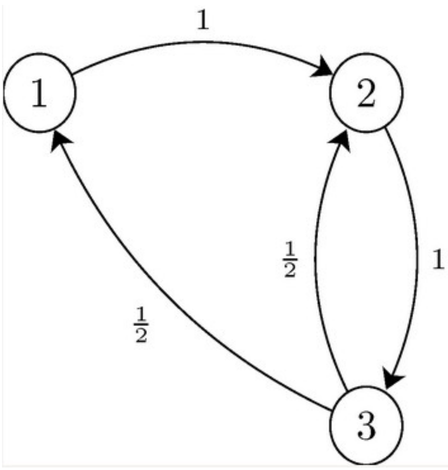
$$\pi = \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{\tilde{\pi}_1}{\lambda_1}, \frac{\tilde{\pi}_2}{\lambda_2}, \frac{\tilde{\pi}_3}{\lambda_3}, ...\right]$$

είναι η στάσιμη κατανομή της ΜΑΣΧ, δηλαδή

$$\lim_{t \to +\infty} P(X(t) = j \mid X(0) = i) = \frac{\tilde{\pi}_j}{\Lambda \lambda_j},\ j \in S.$$

Παράδειγμα

Για μία ΜΑΣΧ με S = {1, 2, 3} γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ και πως το διάγραμμα της αντίστοιχης ενσωματωμένης ΜΑΔΧ είναι το εξής:



Να βρεθεί η οριακή κατανομή της ΜΑΣΧ (αν υπάρχει).

Λύση

Η αντίστοιχη ΜΑΔΧ είναι αδιαχώριστη και έχει πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $\tilde{\pi} P = \tilde{\pi}$ και βρίσκουμε πως η στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ είναι η

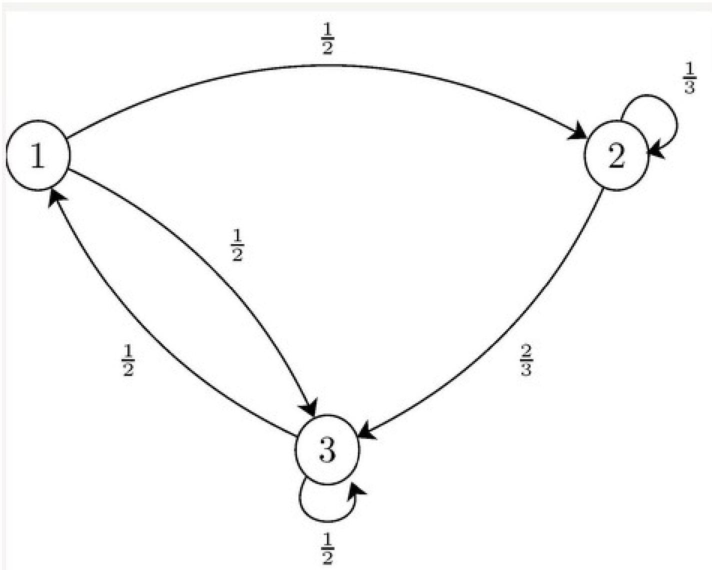
$$\tilde{\pi} = [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}].$$

Αντίστοιχα, υπολογίζουμε $\Lambda = \frac{1/5}{2} + \frac{2/5}{1} + \frac{2/5}{3} = \frac{19}{30}$ και

$$\pi = \frac{1}{19}[3,\ 12,\ 4]$$

Άσκηση

Για μία ΜΑΣΧ με S = {1, 2, 3} γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$ και πως το διάγραμμα της αντίστοιχης ενσωματωμένης ΜΑΔΧ είναι το εξής:



Να βρεθεί η οριακή κατανομή της ΜΑΣΧ (αν υπάρχει).

Σημείωση: Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου προέρχεται από την ιστοσελίδα: https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_3_1_introduction.php

b) Εύρεση στάσιμης κατανομής ΜΑΣΧ από τον απειροστικό γεννήτορα

Θεώρημα

Αν G είναι ο γεννήτορας πίνακας μίας ΜΑΣΧ X(t), τότε η κατανομή **π** αποτελεί στάσιμη κατανομή για την X(t), αν και μόνο αν

$$\boldsymbol{\pi G = O.}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι συνέπεια των δ.ε. Kolmogorov και του ορισμού της στάσιμης κατανομής. Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι S = {1, 2, …, n}.

α) π στάσιμη → πG = O

Έστω $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n]$ η στάσιμη κατανομή της X(t).Τότε πP(t) = π. Παραγωγίζοντας ως προς t, παίρνουμε

πP’(t) = O ή πGP(t) = O.

Για t = 0, παίρνουμε ότι πG = O που είναι το ζητούμενο.

β) πG = O → π στάσιμη

Αντίστροφα, αν πG = O, τότε πGP(t) = O, ή πP’(t) = O ή (πP(t))’ = O ή πP(t) = C, όπου C ένας σταθερός πίνακας.

Όμως, για t = 0, C = πP(0) =πI = π και καταλήγουμε στο ότι πP(t) = π, δηλαδή ότι η π είναι η στάσιμη κατανομή της X(t).

Παράδειγμα

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή του τελευταίου παραδείγματος λύνοντας την πG = 0.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση $\pi \cdot G = [\pi_0, \pi_1] \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

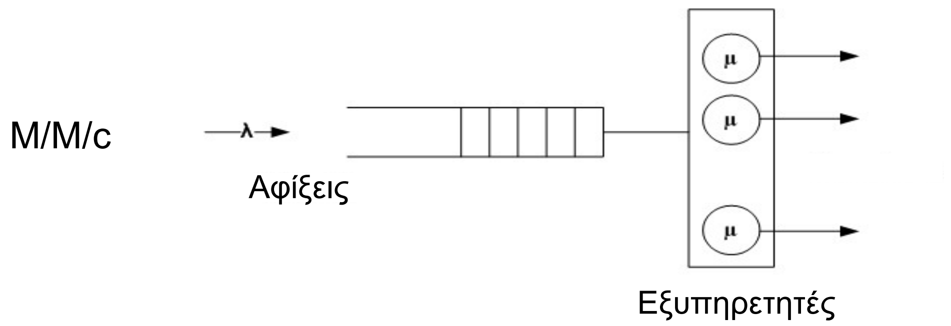
Από το αντίστοιχο 2 x 2 σύστημα

$$\pi_0(-\lambda) + \pi_1\lambda = 0$$

$$\pi_0 \lambda + \pi_1(-\lambda) = 0$$

βρίσκουμε $\pi_0 = \pi_1 = ½$.

3. Ουρές αναμονής



Διάγραμμα 11: Ουρά M/M/c

Η θεωρία των ουρών αποσκοπεί στην κατασκευή ενός μοντέλου με το οποίο μπορεί να προβλεφθεί το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής όσων βρίσκονται στην ουρά.

Η θεωρία ουρών θεωρείται κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας, επειδή τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται συχνά κατά τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με τους πόρους που απαιτούνται για την παροχή μιας υπηρεσίας. Ωστόσο, βρίσκει εφαρμογές σε πολλά διαφορετικά πεδία όπως στα δίκτυα υπολογιστών.

Οι ουρές αναμονής περιγράφονται με μία σειρά χαρακτήρων που δηλώνουν τα χαρακτηριστικά τους και χωρίζονται με κάθετες μεταξύ τους. Ο τρόπος αυτός καταγραφής προτάθηκε από τον D. G. Kendall το 1953 και έκτοτε καθιερώθηκε.

Σύμφωνα με την περιγραφή κατά Kendall (Kendall notation) ένα μοντέλο ουράς, περιγράφεται με τρεις χαρακτήρες γραμμένους στη μορφή A/S/c, όπου

- το A (arrivals) υποδηλώνει την κατανομή του χρόνου μεταξύ των αφίξεων στην ουρά,
- το S (service) την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης και
- το c (channels) τον αριθμό των καναλιών υπηρεσίας που ανοίγουν στον κόμβο.

Αργότερα, ο τρόπος περιγραφής μίας ουράς κατά Kendall επεκτάθηκε στη μορφή A/S/c/K/N/D όπου K είναι η χωρητικότητα της ουράς, N είναι το μέγεθος του πληθυσμού των θέσεων εργασίας που πρέπει να εξυπηρετηθούν και D είναι ο τρόπος με τον οποίο εξυπηρετείται η ουρά (FIFO, LIFO κλπ).

Ο πρώτος χαρακτήρας σε μία ουρά, περιγράφει τη διαδικασία άφιξης στην ουρά.

- Το M σημαίνει έλλειψη μνήμης (memoryless) και σημαίνει μια διαδικασία άφιξης Poisson.
- Το D σημαίνει ντετερμινιστικό και σημαίνει ότι το διάστημα μεταξύ αφίξεων είναι σταθερό και μη τυχαίο.
- Το G σημαίνει γενική κατανομή μεταξύ αφίξεων.

Ο δεύτερος χαρακτήρας περιγράφει τη διαδικασία εξυπηρέτησης. Χρησιμοποιούνται τα ίδια γράμματα, με το Μ να αντιστοιχεί μια εκθετική κατανομή χρόνου υπηρεσίας.

3.1. Η ουρά αναμονής M/M/1

Διάγραμμα 12: Ουρά M/M/1

Στην ουρά αναμονής M/M/1, οι αφίξεις (πρώτο M στο M/M/1) πραγματοποιούνται **με ρυθμό λ** σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson.

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (δεύτερο Μ στο M/M/1) έχουν εκθετική κατανομή **με ρυθμό μ** στην ουρά M/M/1, όπου 1/μ είναι ο μέσος χρόνος υπηρεσίας.

Οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με την Poisson κατανομή με παράμετρο λ. Άρα, τα διαστήματα μεταξύ αφίξεων θα ακολουθούν την Exp(λ). Καθώς η αναμενόμενη τιμή της εκθετικής κατανομής είναι η 1/λ συμπεραίνουμε ότι **αναμένεται μία άφιξη κάθε 1/λ χρονικές μονάδες**. Αντίστοιχα, καθώς η εξυπηρέτηση των πελατών συμβαίνει με κατανομή Exp(μ) συμπεραίνουμε ότι **αναμένεται μία εξυπηρέτηση κάθε 1/μ χρονικές μονάδες.**

Ο λόγος

$$\rho = \frac{\text{αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης}}{\text{αναμενόμενος χρόνος μεταξύ δύο αφίξεων}} = \frac{(1/\mu)}{(1/\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

αναπαριστά το ρυθμό αξιοποίησης των δυνατοτήτων εξυπηρέτησης. Αναφέρεται και ως **ένταση φορτίου** ή ως **συντελεστής απασχόλησης**.

Αν ρ = λ / μ > 1, οι αφίξεις (χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων Exp(λ)) συμβαίνουν με ρυθμό που δεν μπορεί να καλυφθεί από τη δυνατότητα εξυπηρέτησης (χρόνος μεταξύ διαδοχικών εξυπηρετήσεων Exp(μ)). Στην περίπτωση αυτή η ουρά θα μεγαλώνει απεριόριστα, όπως και ο χρόνος αναμονής. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ασταθές**. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με **ευσταθείς ουρές**, δηλαδή ουρές για τις οποίες

$$\boldsymbol{\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.}$$

Κάθε ένας εξυπηρετητής, εξυπηρετεί έναν πελάτη κάθε φορά, σύμφωνα με τον κανόνα “ο πρώτος που έρχεται είναι ο πρώτος που εξυπηρετείται” (First In First Out - FIFO).

Όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση, ο πελάτης φεύγει από την ουρά και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μειώνεται κατά έναν. Επιπλέον, δεν υπάρχει όριο στον αριθμό των πελατών που μπορεί να αφιχθούν και να εξυπηρετηθούν, ούτε στον αριθμό ατόμων που περιμένουν να εξυπηρετηθούν.

Σημείωση
Αν $\mu = \lambda$, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, με την πρώτη άφιξη, ξεκινάνε να μετράνε ταυτόχρονα δύο χρονόμετρα: το χρονόμετρο της επόμενης άφιξης και το χρονόμετρο της πρώτης εξυπηρέτησης. Για να επανέλθει το σύστημα στην αρχική κατάσταση ($X(t) = 0$) πρέπει η εξυπηρέτηση να γίνει πιο γρήγορα από την επόμενη άφιξη, το οποίο όμως συμβαίνει μόνο με 50% πιθανότητα, ενώ με επίσης 50% πιθανότητα θα συμβεί και επόμενη άφιξη πριν την προηγούμενη αποχώρηση.

Μετά από λίγο είναι σίγουρο ότι θα υπάρχει ένας μη εξυπηρετούμενος πελάτης στην ουρά και ένας που θα εξυπηρετείται. Μετά τη δεύτερη άφιξη, λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα «έλλειψης μνήμης» των εμπλεκόμενων εκθετικών κατανομών, υπάρχει και πάλι 50% πιθανότητα να φτάσει άλλος πελάτης πριν φύγει ο προηγούμενος πελάτης. Συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των πελατών στο σύστημα μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος με μια αντίστοιχη πιθανότητα αρκετά μεγάλη ώστε να διασφαλίζεται ότι η αναμενόμενη τιμή συγκλίνει στο άπειρο με το χρόνο.

Εύκολα επαληθεύει κάποιος πως το αναμενόμενο πλήθος ατόμων στο σύστημα αυξάνει με το χρόνο.

Σημείωση: Κατανομή $X – Y$, για $X, Y \sim Exp(\lambda)$: https://math.stackexchange.com/questions/115022/pdf-of-the-difference-of-two-exponentially-distributed-random-variables

Πρόταση

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$ και X, Y ανεξάρτητες τ.μ., τότε

(α) $Z = \min(X, Y) \sim Exp(\lambda + \mu)$.

(β) $P(X > Y) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

(γ) $P(X < Y) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Απόδειξη

(α) $P(Z > z) = P(\min(X, Y) > z)$

$= P(X > z, Y > z)$

$= P(X > z)\, P(Y > z)$

$= e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu z}$

$= e^{-(\lambda+\mu)z}$

Άρα, $P(Z \le z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$ και $Z \sim Exp(\lambda + \mu)$.

(β) $P(X > Y) = \int_0^{+\infty} P(X > y) f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

(γ) $P(X < Y) = 1 - P(X > Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3.2. Εφαρμογή ΜΔΣΧ στην ουρά Μ/Μ/1

Σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης που έχει έναν μόνο εξυπηρετητή, οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι Exp(μ) μεταβλητή.

Έστω **X(t) ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t**, οπότε ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τη στιγμή t, τότε η επόμενη κατάσταση θα είναι είτε i+1 (εάν φτάσουν νέοι πελάτες) είτε κατάσταση i−1 (αν φύγει κάποιος πελάτης και είναι i > 0).

(α) Αν X(t) = 0 και T_0 = {χρόνος μέχρι να γίνει X(t) = 1}, δείξτε ότι $T_0 \sim Exp(\lambda)$.

(β) Αν X(t) = i, i > 0, και T_i ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση του συστήματος, δείξτε ότι $T_i \sim Exp(\lambda + \mu)$.

(γ) Αν X(t) = i, i > 0, να βρεθεί η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση του συστήματος να είναι η i + 1.

(δ) Σχεδιάστε την αντίστοιχη ενσωματωμένη ΜΑΔΧ.

(ε) Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(ζ) Σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ΜΑΣΧ.

Λύση

(α) Εάν X(t) = 0, τότε θα γίνει X(t) = 1 όταν φτάσει ένας νέος πελάτης. Δεδομένου ότι οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων στη διαδικασία Poisson έχουν εκθετική κατανομή Exp(λ), άρα η ίδια κατανομή θα ισχύει και για το χρόνο παραμονής στην κατάσταση αυτή.

(β) Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, όπου i > 0. Άρα, υπάρχει ήδη ένας πελάτης που εξυπηρετείται. Ονομάζουμε:

- X: το χρόνο μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη
- Y: το χρόνο μέχρι την εξυπηρέτηση του ήδη υπάρχοντος πελάτη

Είναι $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$ και X, Y ανεξάρτητες. Αν T_i ο χρόνος μέχρι την επόμενη μετάβαση τότε

$$T_i = \min(X, Y) \sim Exp(\lambda+\mu).$$

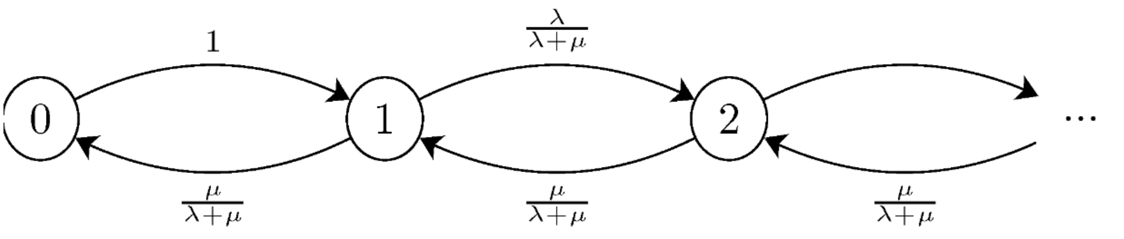
(γ) Είναι $p_{i,\,i-1} = P(X > Y) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Πράγματι:

$$P(X \geq Y) = \int_0^{+\infty} P(X \geq y) f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y}\,dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu) y}\,dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Αντίστοιχα, $p_{i,\,i+1} = P(X < Y) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

(δ) Διάγραμμα της ενσωματωμένης ΜΑΔΧ εφοδιασμένο με τις πιθανότητες τελικής μετάβασης:



(ε) Οι ρυθμοί μεταβολής κάθε μίας κατάσταση i είναι οι εξής:

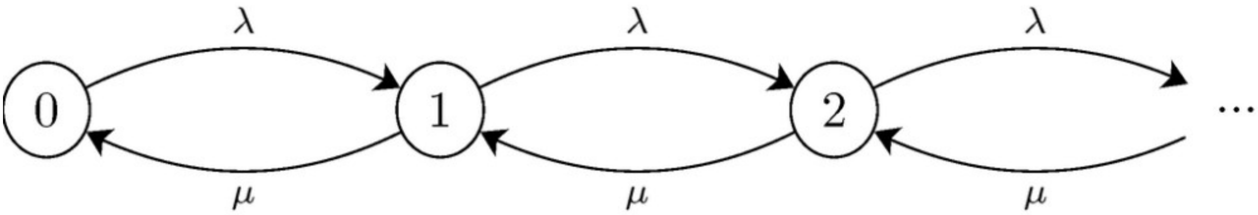
- $\lambda_0 = \lambda$,
- $\lambda_i = \lambda + \mu$, $i = 1, 2, \ldots$

Τα στοιχεία του γεννήτορα πίνακα G είναι τα εξής: $g_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij}, & i \neq j. \\ -\lambda_i, & i = j. \end{cases}$

Ο γεννήτορας πίνακας είναι ο

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

(ζ) Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της ΜΑΣΧ είναι το παρακάτω:



3.3. Κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Στόχος είναι να βρεθεί η κατανομή της X(t). Για n = 0, 1, … ορίζουμε

$w_n(t) = P(X(t) = n)$ = {τη χρονική στιγμή t υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα},

και $W(t) = [w_n(t)]_{n\in N} = [P(X(t) = n]_{n\in N}$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας W ικανοποιεί και αυτός τη διαφορική εξίσωση Kolmogorov:

$$\mathbf{W'(t) = W(0)P'(t) = W(0)P(t)G = W(t)G.}$$

Η εξίσωση W′(t) = W(t)G είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Αν γνωρίζουμε την αρχική κατανομή πιθανοτήτων W(0), μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση για να βρούμε W(t) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\mathbf{W(t) = W(0)\, e^{Gt},}$$

όπου e^{Gt} είναι η εκθετική μορφή του απειροστικού γεννήτορα G.

Έχει ωστόσο ενδιαφέρον να παρουσιαστεί και μία εναλλακτική στοιχειώδης απόδειξη.

a) Στοιχειώδης απόδειξη της εξίσωσης W'(t) = W(t)G.

Αν

- A_Δ = {Οι αφίξεις σε χρονικό διάστημα μήκους Δ}
- E_Δ = {Οι εξυπηρετήσεις σε χρονικό διάστημα μήκους Δ}

τότε

$$\mathbf{A_\Delta \sim Poisson(\lambda\Delta)} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E_\Delta \sim Poisson(\mu\Delta)}.$$

Παρατηρούμε ότι:

- $P(A_\Delta = 0) = e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta),\ P(A_\Delta = 1) = e^{-\lambda\Delta}\lambda\Delta = \lambda\Delta + o(\Delta)$ και

  $P(A_\Delta = n) = e^{-\lambda\Delta}\dfrac{(\lambda\Delta)^n}{n!} = o(\Delta)$, n ≥ 2.
- $P(E_\Delta = 0) = e^{-\mu\Delta} = 1 - \mu\Delta + o(\Delta),\ P(E_\Delta = 1) = e^{-\mu\Delta}\mu\Delta = \mu\Delta + o(\Delta)$ και

  $P(E_\Delta = n) = e^{-\mu\Delta}\dfrac{(\mu\Delta)^n}{n!} = o(\Delta)$, n ≥ 2.

Στον όρο o(Δ) έχουν ενσωματωθεί όλοι οι όροι των σειρών Maclaurin της $e^{-\lambda\Delta}$ που είναι τάξης Δ^2.

Για την $w_n(t)$ μπορούμε να γράψουμε τις εξής σχέσεις:

$$w_0(t+\Delta) = w_0(t)P(A_\Delta = 0) \qquad \text{(κανένας πελάτης στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε)}$$

$$+\sum_{i \ge 1} w_0(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i) \qquad \text{(κανένας πελάτης στο χρόνο t, i ήρθαν, i έφυγαν)}$$

$$+\sum_{i \ge 1} w_1(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+1) \qquad \text{(1 πελάτης στο χρόνο t, i ήρθαν, i + 1 έφυγαν)}$$

$$+\sum_{i \ge 1} w_2(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+2) \qquad \text{(2 πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i + 2 έφυγαν)}$$

$$+ \ldots$$

ή $$w_0(t+\Delta) = w_0(t)P(A_\Delta = 0) + \sum_{k \ge 0}\sum_{i \ge 1} w_k(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+k).$$

Στη συνέχεια, θα γίνει διαίρεση με το Δ και θα λάβουμε όριο καθώς $\Delta \to 0$. Άρα από τους παραπάνω όρους, θα απομείνουν μόνο όσοι *δεν είναι ο(Δ)*.

Καθώς, $P(A_\Delta = k) = o(\Delta)$, και $P(E_\Delta = k) = o(\Delta)$, $k \ge 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$w_0(t+\Delta) = w_0(t)P(A_\Delta = 0) + w_0(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 1) + w_1(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 1) + o(\Delta)$$

ή

$$w_0(t+\Delta) = w_0(t)(1-\lambda\Delta) + w_0(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta) + w_1(t)(1-\lambda\Delta)(\mu\Delta) + o(\Delta). \qquad \textbf{(Εξίσωση 1)}$$

Αντίστοιχα, για $n \ge 1$, υπολογίζουμε:

$$w_n(t+\Delta) = \sum_{i \ge 0} w_n(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i) \qquad \text{(n πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i έφυγαν)}$$

$$+\sum_{i \ge 0} w_{n+1}(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+1) \qquad \text{(n+1 πελάτες στο χρόνο t, i ήρθαν, i+1 έφυγαν)}$$

$$+\sum_{i \ge 0} w_{n-1}(t)P(A_\Delta = i+1)P(E_\Delta = i) \qquad \text{(n-1 πελάτες στο χρόνο t, i+1 ήρθαν, i έφυγαν)}$$

$$+ \ldots$$

$$= \sum_{k \ge 1}\sum_{i \ge 1} w_{n+k}(t)P(A_\Delta = i)P(E_\Delta = i+k) + \sum_{k \ge 1}\sum_{i \ge 1} w_{n-k}(t)P(A_\Delta = i+k)P(E_\Delta = i)$$

Αντίστοιχα, παρατηρούμε πως αν γίνει διαίρεση με το Δ και λάβουμε όριο καθώς $\Delta \to 0$, τότε επιβιώνουν μόνο οι όροι που αφορούν αφίξεις και αναχωρήσεις ≤ 1, όροι *που δεν είναι ο(Δ).* Δηλαδή:

$$w_n(t+\Delta) = w_n(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 0) + w_n(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 1)$$

$$+ w_{n-1}(t)P(A_\Delta = 1)P(E_\Delta = 0) + w_{n+1}(t)P(A_\Delta = 0)P(E_\Delta = 1)$$

$$+ o(\Delta).$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$w_n(t + \Delta) = w_n(t)(1 - \lambda\Delta)(1 - \mu\Delta)$ (n πελάτες στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε, κανένας δεν έφυγε)

$+ w_n(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta)$ (n πελάτες στο χρόνο t, ένας ήρθε, ένας έφυγε)

$+ w_{n-1}(t)(\lambda\Delta)(1 - \mu\Delta)$ (n-1 πελάτες στο χρόνο t, ένας ήρθε, κανένας δεν έφυγε)

$+ w_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta)(\mu\Delta)$ (n+1 πελάτες στο χρόνο t, κανένας δεν ήρθε, ένας έφυγε)

$+ o(\Delta)$. (όλοι οι $o(\Delta)$ όροι) **(Εξίσωση 2)**

Σχόλιο για τη (1): ο όρος $w_0(t)(\lambda\Delta)(\mu\Delta)$ έχει ενσωματωθεί στην $o(\Delta)$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) με κατάλληλη αναδιάταξη, παίρνουμε

$$\frac{w_0(t+\Delta) - w_0(t)}{\Delta} = -\lambda w_0(t) + \mu w_1(t) + o(\Delta)$$

$$\frac{w_n(t+\Delta) - w_n(t)}{\Delta} = -(\lambda + \mu) w_n(t) + \lambda w_{n-1}(t) + \mu w_{n+1}(t) + o(\Delta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις για $\Delta \to 0$ οδηγούν στις διαφορικές εξισώσεις:

$\mathbf{w'_0(t) = -\lambda w_0(t) + \mu w_1(t)}$ και

$\mathbf{w'_n(t) = \lambda w_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) w_n(t) + \mu w_{n+1}(t),\ n \geq 1.}$

Παρατηρούμε ότι οι τελευταίες σχέσεις συνοψίζονται στην εξής δ.ε. Kolmogorov

$$\mathbf{W'(t) = W(t)\cdot G,}$$

όπου

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

και $W(t) = [w_n(t)]_{n\in N} = [P(X(t) = n]_{n\in N}$

3.4. Στάσιμη κατανομή της M/M/1 ουράς

Η επίλυσή των Δ.Ε. Kolmogorov είναι δύσκολη, ωστόσο δεν είναι απαραίτητο να βρεθεί η γενική τους λύση. Αν ρ = λ/μ < 1, η διεργασία θα αποκτήσει στάσιμη οριακή συμπεριφορά, δηλαδή τελικά

$$\lim_{t\to\infty} w_n(t) = w_n \quad \text{ανεξάρτητο του t, και} \quad \lim_{t\to\infty} w'_n(t) = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, οι δ.ε. Kolmogorov γίνονται ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$\mu w_1 - \lambda w_0 = 0$ και $\mu w_{n+1} - (\lambda + \mu)w_n + \lambda w_{n-1} = 0$ ή

- $\mathbf{w_1 = \rho w_0}$,
- $\mathbf{w_{n+1} = (\rho + 1)w_n - \rho w_{n-1}}$,

όπου ρ = λ/μ. Ξεκινώντας από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε

- $\mathbf{w_2 = (\rho + 1)w_1 - \rho w_0 = (\rho + 1) \rho w_0 - \rho w_0 = \rho^2 w_0}$
- $\mathbf{w_3 = (\rho + 1)w_2 - \rho w_1 = (\rho + 1)\rho^2 w_0 - \rho^2 w_0 = \rho^3 w_0}$

και γενικότερα, με επαγωγικό συλλογισμό καταλήγουμε στην

$$\mathbf{w_n = \rho^n w_0}$$

Η πιθανότητα w_0, μπορεί να υπολογιστεί από την προφανή σχέση

$$\sum_{n\geq 0} w_n = 1 \;\Leftrightarrow\; w_0 \sum_{n\geq 0} \rho^n = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{w_0}{1-\rho} = 1 \;\Leftrightarrow\; w_0 = 1-\rho \quad \text{και}$$

$$w_n = \rho^n w_0 = \rho^n (1-\rho).$$

Οι εξισώσεις

- $\mathbf{w_0 = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0) = 1 - \rho}$ και
- $\mathbf{w_n = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n) = \rho^n w_0 = \rho^n (1 - \rho)}$

μπορούν να αξιοποιηθούν για να εκφράσουν τις πιθανότητες της στάσιμης κατάστασης της ουράς:

P(αδρανής υπηρεσία) = P(κανένας πελάτης δεν περιμένει να εξυπηρετηθεί)

$= w_0$

$= 1 - \rho$

$= 1 - \lambda / \mu$.

P(υπηρεσία απασχολημένη) = P(υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης)

$= 1 - w_0$

$= \rho = \lambda / \mu$.

P(υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα που είτε περιμένουν είτε εξυπηρετούνται) =

$= w_n$

$= \rho^n(1 - \rho)$.

Επιπλέον, είναι: $P(X(t) \geq n) = \sum_{m \geq n} P(X(t) = m)$, άρα:

$$\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq n) = \sum_{m \geq n} \lim_{t \to \infty} P(X(t) = m)$$

$$= \sum_{m \geq n} w_m$$

$$= \sum_{m \geq n} \rho^m (1 - \rho)$$

$$= (1 - \rho) \sum_{m \geq 0} \rho^{m+n}$$

$$= (1 - \rho)\rho^n \sum_{m \geq 0} \rho^m$$

$$= \rho^n.$$

Άρα, στη στάσιμη κατάσταση ισχύει ότι:

- P(υπάρχουν n ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα) = $\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq n) = \rho^n$.
- P(υπάρχουν λιγότεροι από n πελάτες στο σύστημα) = $\lim_{t \to \infty} P(X(t) < n) = 1 - \rho^n$.

Σημείωση

Οι εξισώσεις $w_{n+1} = (\rho + 1)w_n - \rho w_{n-1}$, $n \geq 1$, είναι εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική τους λύση εξαρτάται από τη διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και περιλαμβάνουν πολυωνυμικούς και τριγωνομετρικούς όρους ανάλογα με το πρόσημό της.

3.5. Αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα M/M/1

Στη στάσιμη κατάσταση, συμβολίζουμε με L_S (length of the system) το αναμενόμενο πλήθος πελατών στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση) και L_Q (length of queue) το αναμενόμενο μέγεθος της ουράς. Υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
L_S &= \lim_{t\to\infty} E(X(t)) \\
&= \sum_{n\geq 0} n \lim_{t\to\infty} P(X(t)=n) \\
&= \sum_{n\geq 0} n w_n \\
&= \sum_{n\geq 0} n\rho^n(1-\rho) \\
&= \rho(1-\rho)\sum_{n\geq 0} n\rho^{n-1} \\
&= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Σημείωση

Εναλλακτικά, καθώς $\lim_{t\to\infty} P(X(t)=n) = w_n = \rho^n(1-\rho)$ είναι X(t) ~ Geometric(1 – p), και μπορούμε άμεσα να συνάγουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

3.6. Αναμενόμενο μέγεθος ουράς M/M/1

Με παρόμοιο τρόπο είναι δυνατό να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν στην ουρά να εξυπηρετηθούν κατά τη στάσιμη κατάσταση της ουράς. Καθώς, ο πελάτης που εξυπηρετείται δεν είναι μέρος της ουράς, n πελάτες στο σύστημα σημαίνει ότι το μήκος της ουράς είναι n - 1.

$$
\begin{aligned}
L_Q &= \sum_{n\geq 1} (n-1) \lim_{t\to\infty} P(X(t)=n) \\
&= \sum_{n\geq 1} n w_n - \sum_{n\geq 1} w_n \\
&= L_S - (1-w_0) \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} - (1-(1-\rho)) \\
&= \frac{\rho^2}{1-\rho} \\
&= \rho L_S.
\end{aligned}
$$

3.7. Αναμενόμενο μέγεθος υπαρκτής ουράς M/M/1

Επιπλέον, έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το αναμενόμενο μέγεθος της ουράς (L_{QQ}), δεδομένου πως υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης να περιμένει ($X(t) \geq 2$), ένας δείκτης που αντιπροσωπεύει την ποιότητα εξυπηρέτησης που προσφέρει το σύστημα από το μέρος του πελάτη.

Είναι $P(X(t) \geq 2) = \sum_{n \geq 2} P(X(t) = n)$, άρα

$$\lim_{t \to \infty} P(X(t) \geq 2) = \sum_{n \geq 2} \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n)$$

$$= \sum_{n \geq 2} w_n$$

$$= \sum_{n \geq 2} \rho^n (1 - \rho)$$

$$= \rho^2.$$

και $L_{QQ} = \sum_{n \geq 1} (n-1) \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n \mid X(t) \geq 2)$

$$= \sum_{n \geq 1} (n-1) \lim_{t \to \infty} \frac{P(X(t) = n, X(t) \geq 2)}{P(X(t) \geq 2)}$$

$$= \sum_{n \geq 2} (n-1) \lim_{t \to \infty} \frac{P(X(t) = n)}{P(X(t) \geq 2)}$$

$$= \sum_{n \geq 2} (n-1) \frac{w_n}{\rho^2}$$

$$= \frac{L_Q}{\rho^2}$$

$$= \frac{1}{1 - \rho}.$$

3.8. Μέσος χρόνος παραμονής M/M/1

Συμβολίζουμε με W_S το μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα και με W_Q το μέσο χρόνο παραμονής στην ουρά. Οι ποσότητες αυτές, δίνονται από τους τύπους του Little

$$\mathbf{L_S = \lambda\, W_S} \quad \text{και} \quad \mathbf{L_Q = \lambda\, W_Q}$$

ή

- $\mathbf{W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}}$.
- $\mathbf{W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \rho \frac{L_S}{\lambda} = \frac{L_S}{\mu}}$.

Η απόδειξη αυτών των τύπων έγινε από τον John Little το 1961 ([1]). Αργότερα παρουσιάστηκαν και κάποιες πιο απλοποιημένες αποδείξεις (όπως η [2]).

[1] John D. C. Little, (1961) A Proof for the Queuing Formula: L = λW. Operations Research 9(3):383-387. https://doi.org/10.1287/opre.9.3.383

[2] Shaler Stidham, Jr., (1974) Technical Note—A Last Word on L = λW. Operations Research 22(2):417-421. https://doi.org/10.1287/opre.22.2.417

Οι δύο τύποι αν και έχουν μη τετριμμένη απόδειξη, είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτοί διαισθητικά. Πράγματι, στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (W_S) ο μέσος αριθμός νεοεισερχομένων είναι $\lambda \cdot W_S$, (λ ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου). Έτσι, όταν ένας πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα, βλέπει (κατά μέσο όρο) $\lambda \cdot W_S$, πελάτες να έχουν απομείνει σε αυτό. Επειδή στη στάσιμη τελική κατάσταση ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι L_S, πρέπει να είναι $L_S = \lambda \cdot W_S$. Αντίστοιχα αιτιολογείται η σχέση $L_Q = \lambda \cdot W_Q$ ($\lambda \cdot W_Q$ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων κατά τη διάρκεια του χρόνου που έμεινε στην ουρά άρα το μέσο πλήθος ατόμων που παραμένει στην ουρά όταν ένας πελάτης πηγαίνει να εξυπηρετηθεί, δηλαδή L_Q). Από τους τύπους του Little παίρνουμε επιπλέον:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{W_Q}{\rho}$$

και

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = W_S \cdot \rho,$$

δηλαδή

$$\mathbf{W_S = \frac{W_Q}{\rho}}$$

και

$$\mathbf{W_Q = W_S \cdot \rho.}$$

3.9. Συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα M/M/1

Καθώς, ο συνολικός χρόνος παραμονής αποτελείται από τον χρόνο στην ουρά (που μπορεί να είναι μηδέν) και τον χρόνο της εξυπηρέτησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{W_S = W_Q + \frac{1}{\mu}.}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με λ και αξιοποιώντας τους τύπους του Little, παίρνουμε επιπλέον:

$$\mathbf{L_S = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = L_Q + \rho = L_Q + L_{SERV},}$$

όπου $L_{SERV} = \rho$ είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης

3.10. Κατανομή χρόνου παραμονής M/M/1

Για έναν πελάτη είναι σημαντικό να γνωρίζει την πιθανότητα, ότι ο χρόνος που θα παραμείνει στο σύστημα (ή στην ουρά) θα είναι μεγαλύτερος από μια ορισμένη τιμή. Μαζί με το μήκος της ουράς, το μέγεθος αυτής της πιθανότητας αποτελεί ένα δείκτη που περιγράφει την ποιότητα των προσφερόμενων υπηρεσιών από την πλευρά του χρήστη. Χωρίς απόδειξη δίνεται ότι

- **Χρόνος παραμονής στο σύστημα ~ Exp(1/W_S)**
- **Χρόνος παραμονής στην ουρά ~ Exp(1/W_Q)**

ή ισοδύναμα

- **P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = e^{-t/W_S}**
- **P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = e^{-t/W_Q}**

Από τους παραπάνω, επιπλέον, έχουμε:

P(παραμονής στο σύστημα περισσότερο από t_1 και λιγότερο από t_2) =

= P(περισσότερο από t_1) – P(περισσότερο από t_2)

3.11. Διακύμανση χαρακτηριστικών ουράς M/M/1

Αποδεικνύεται ότι οι διακυμάνσεις των τεσσάρων χαρακτηριστικών είναι οι παρακάτω:

- $\mathrm{Var}(L_S) = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- $\mathrm{Var}(L_Q) = \rho^2 \dfrac{1+\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2}$

- $\operatorname{Var}(W_S) = \dfrac{1}{\mu^2(1-\rho)^2}$
- $\operatorname{Var}(W_Q) = \dfrac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}$

3.12. Συγκεντρωτικό Τυπολόγιο

Πιθανότητες σχετικές με την κατάσταση της ουράς

- $P(X(t) = 0) = w_0 = 1 - \rho$
- $P(X(t) = n) = w_n = \rho^n w_0 = \rho^n (1 - \rho)$
- $P(X(t) \geq n) = \rho^n$
- P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = $e^{-t / WS}$
- P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = $e^{-t / WQ}$

Πλήθος ατόμων στο σύστημα ή / και την ουρά

- $L_S = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}.$
- $L_Q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \rho L_S.$
- $L_{QQ} = \dfrac{L_Q}{\rho^2} = \dfrac{1}{1-\rho}.$
- $L_S = L_Q + \dfrac{\lambda}{\mu} = L_Q + \rho = L_Q + L_{SERV}.$

Χρόνος παραμονής στο σύστημα ή αναμονής στην ουρά

- $W_S = \dfrac{L_S}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu-\lambda}.$
- $W_Q = \dfrac{L_Q}{\lambda} = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda} = W_S \cdot \rho,$
- $W_S = W_Q + \dfrac{1}{\mu}.$

Πρακτικός κανόνας

Για να είναι λειτουργική μία ουρά, πρέπει

$$\boldsymbol{\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 0{,}8}\,.$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα αεροδρόμιο, ένας αεροδιάδρομος εξυπηρετεί αποκλειστικά τα αεροπλάνα που προσγειώνονται. Αυτά, μπορούν να θεωρηθούν μία ουρά. Ο ρυθμός με τον οποίο εξυπηρετούνται από το προσωπικό εδάφους είναι μ = 27 αεροπλάνα / ώρα, ενώ ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν στο αεροδρόμιο είναι 20 αφίξεις / ώρα.

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{27 - 20} = \frac{1}{7} \text{ ώρες} = 8{,}6 \text{ min}.$$

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$$L_S = \lambda W_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{27 - 20} = 2{,}9 \text{ αεροπλάνα}.$$

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$$W_Q = W_S - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{27 - 20} - \frac{1}{27} = 6{,}4 \text{ min}.$$

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20^2}{27(27 - 20)} = 2{,}1 \text{ αεροπλάνα}.$$

Παράδειγμα 2

Στο ίδιο αεροδρόμιο, κατά την περίοδο του καλοκαιριού, ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν στο αεροδρόμιο αυξάνεται σε 25 αφίξεις / ώρα και μεταβάλλονται οι χρόνοι αναμονής και το μέγεθος της ουράς.

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{27 - 25} = \frac{1}{2} \text{ ώρες} = 30 \text{ min}.$$

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$$L_S = \lambda W_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{25}{27 - 25} = 12{,}5 \text{ αεροπλάνα}.$$

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$$W_Q = W_S - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{27 - 25} - \frac{1}{27} = 27{,}8 \text{ min}$$

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{25^2}{27(27 - 25)} = 11{,}6 \text{ αεροπλάνα}.$$

Παράδειγμα 3

Στην περίπτωση κακών καιρικών συνθηκών, ο ρυθμός εξυπηρέτησης πέφτει και γίνεται μ = 22 αεροσκάφη ανά ώρα. Τότε:

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{22 - 20} = \frac{1}{2} \text{ ώρες} = 30 \text{ min}.$$

Αναμενόμενο πλήθος αεροπλάνων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)

$$L_S = \lambda W_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{22 - 20} = 10 \text{ αεροπλάνα}.$$

Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά

$$W_Q = W_S - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{22 - 20} - \frac{1}{22} = 27{,}3 \text{ min}$$

Αναμενόμενο μήκος ουράς

$$L_Q = \lambda W_Q = \rho L_S = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20^2}{22(22 - 20)} = 9{,}1 \text{ αεροπλάνα}.$$

Παράδειγμα 4

Σε ένα δίκτυο υπολογιστών μια σύνδεση έχει ρυθμό μετάδοσης C bit/s. Τα μηνύματα φτάνουν σε έναν server ακολουθώντας κατανομή Poisson με ρυθμό λ μηνυμάτων ανά δευτερόλεπτο. Υποθέτουμε ότι τα μηνύματα έχουν εκθετικά κατανεμημένο μήκος με μέσο όρο 1/μ bit και τοποθετούνται στην ουρά με τρόπο FIFO εάν ο σύνδεσμος είναι κατειλημμένος.

Για δεδομένο λ και μ, να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο C έτσι ώστε ο μέσος χρόνος συστήματος (χρόνος εξυπηρέτησης + χρόνος αναμονής) να είναι μικρότερος από έναν δεδομένο χρόνο T_0.

Λύση

Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ουρά M/M/1, όπου:

- Οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με ρυθμό λ (μηνύματα/δευτερόλεπτο).
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης C/μ (μηνύματα / δευτερόλεπτο), όπου το μήκος κάθε μηνύματος είναι εκθετικά κατανεμημένο με μέσο 1/μ bit.

Είναι ρ = λ / [C/μ] = λμ/C. Πρέπει ρ < 1 ή ισοδύναμα C > λμ.

Πρέπει $W_S = \dfrac{1}{C/\mu - \lambda} < T_0$ από όπου παίρνουμε $C > \mu\left(\lambda + \dfrac{1}{T_0}\right)$.

Παράδειγμα 5

Σε ένα πρατήριο καυσίμων υπάρχουν και τρία πλυντήρια αυτοκινήτων, τα οποίο εξυπηρετούν με διαφορετικούς ρυθμούς. Αν λ είναι ο ρυθμός άφιξης αυτοκινήτων ανά ώρα, και μ ο ρυθμός εξυπηρέτησης να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	λ	μ	ρ	L_S	L_Q	W_S	W_Q	w_0
Πλυντήριο Α	0,1 I.X./min	0,5 I.X./min						
Πλυντήριο Β	0,1 I.X./min	0,11 I.X./min						
Πλυντήριο Γ	0,1 I.X./min	0,1 I.X./min						

Λύση

	λ	μ	ρ	L_S	L_Q	W_S	W_Q	w_0
Πλυντήριο Α	0,1 I.X./min	0,5 I.X./min	0,1 / 0,5 = 0,2	0,1 / (0,5 – 0,1) = 0,25	0,12/(1 – 0,2) = 0,05	0,25/0,1 = 2,5 min	2,5 · 0,2 = 0,5 min	1 – 0,2 = 0,8 = 80%
Πλυντήριο Β	0,10 I.X./min	0,11 I.X./min	0,1 / 0,11 = 0,909	0,1 / (0,11 – 0,1) = 10	9,1	100 min	90,9 min	0,09 = 9%
Πλυντήριο Γ	0,1 I.X./min	0,1 I.X./min	0,1 / 0,1 = 1	0,1 / (0,1 – 0,1) = +∞ (ασταθής ουρά)	+∞	+∞	+∞	0 = 0%

Άσκηση 1

Σε ένα ιατρείο επειγόντων περιστατικών, γνωρίζουμε ότι καταφτάνει 1 ασθενής κάθε 30 λεπτά, ενώ ο ιατρός εξυπηρετεί 1 ασθενή κάθε 20 λεπτά.

(α) Είναι το σύστημα εξυπηρέτησης ευσταθές;

Στην περίπτωση της ευστάθειας:

(β) ποια είναι η πιθανότητα ο ιατρός να μην έχει ασθενείς;

(γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών στο ιατρείο των επειγόντων;

(δ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών που περιμένουν;

(ε) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο χώρο του ιατρείου;

(στ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά μέχρι την εξέταση από τον ιατρό;

(ζ) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω ασθενείς να εξεταστούν;

(η) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος ασθενής να περιμένει να δει τον ιατρό περισσότερο από 30 λεπτά;

Άσκηση 2

Σε ένα σύστημα αναμονής, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα X(t) κυμαίνεται μεταξύ 0 και 4 και οι αντίστοιχες πιθανότητες $w_n = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n)$ στη στάσιμη κατάσταση είναι

$$w_0 = 1/16, \quad w_1 = 4/16, \quad w_2 = 6/16, \quad w_3 = 4/16, \quad w_4 = 1/16,$$

(α) Προσδιορίστε τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στο σύστημα (L_S).

(β) Προσδιορίστε τον αναμενόμενο αριθμό πελατών στην ουρά (L_Q).

(γ) Δεδομένου ότι ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 2 πελάτες ανά ώρα, προσδιορίστε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής στο σύστημα W_S, και τον αναμενόμενο χρόνος αναμονής στην ουρά, W_Q.

(δ) Προσδιορίσετε τον αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης.

Άσκηση 3

Οι εργασίες που εκτελούνται σε ένα συγκεκριμένο μηχάνημα φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό των 2 εργασίες / ώρα. Όταν το μηχάνημα χαλάει χρειάζεται μία ώρα για να επισκευαστεί. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός των νέων εργασιών που θα έρθουν κατά τη διάρκεια αυτής της ώρας να είναι

(α) 0, (β) 2, (γ) 5 ή περισσότερες;

Άσκηση 4

Ο χρόνος που απαιτείται από έναν μηχανικό για την επισκευή ενός μηχανήματος διαρκεί 4 ώρες κατά μέσο όρο και έχει εκθετική κατανομή. Ωστόσο, ένα ειδικό εργαλείο θα μείωνε το μέσο όρο σε 2 ώρες. Εάν ο μηχανικός επισκευάσει ένα μηχάνημα σε λιγότερο από δύο ώρες πληρώνεται 100€. Διαφορετικά, πληρώνεται 80€.

Προσδιορίστε την αναμενόμενη αύξηση της αμοιβής του μηχανικού εάν χρησιμοποιήσει το ειδικό εργαλείο.

Άσκηση 5

Μία μεταφορική εταιρεία παραλαμβάνει πολύ μεγάλα δέματα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό 2 ανά ημέρα. Ο χρόνος διεκπεραίωσης και αποστολής στον τελικό παραλήπτη έχει εκθετική κατανομή με μέσο όρο 1/4 ημέρας.

Αν υπάρχει ήδη ένα δέμα που επεξεργάζεται, η εταιρεία έχει χώρο για να αποθηκεύσει με ασφάλεια 3 μεγάλα πακέτα, ενώ όσα περισσεύουν τοποθετούνται σε μία λιγότερο ασφαλή τοποθεσία.

Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου για το οποίο θα επαρκεί ο ασφαλής αποθηκευτικός χώρος για να καλύψει όλες τις ανάγκες της εταιρίας.

Άσκηση 6

Ένα πρατήριο καυσίμων έχει μία αντλία βενζίνης. Τα αυτοκίνητα φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 15 Ι.Χ. ανά ώρα. Όμως, αν η αντλία χρησιμοποιείται ήδη, αυτοί οι δυνητικοί πελάτες μπορεί να διστάζουν και να πηγαίνουν στο επόμενο πρατήριο. Ειδικότερα, αν υπάρχουν ήδη n αυτοκίνητα στο πρατήριο, η πιθανότητα αυτό ένας δυνητικός πελάτης που φθάνει θα αλλάξει γνώμη και θα φύγει είναι n/3 για n = 1, . . . , 3.

Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός αυτοκινήτου έχει εκθετική κατανομή με μέσο όρο 4 λεπτά.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας (πG = O).

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των αυτοκινήτων στο σταθμό.

(δ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος Ι.Χ. στο πρατήριο.

(ε) Βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής (συμπεριλαμβανομένου του σέρβις) για τα αυτοκίνητα που εξυπηρετούνται (νόμος του Little).

Άσκηση 7

Ένα μικρό παντοπωλείο έχει δύο υπαλλήλους, έναν στο ταμείο και έναν γενικών καθηκόντων. Οι πελάτες φτάνουν στο παντοπωλείο τυχαία με μέσο ρυθμό 30 ανά ώρα. Όταν υπάρχει μόνο ένας πελάτης στο ταμείο, τότε αυτός εξυπηρετείται μόνο από τον ταμία, με αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης 1,5 λεπτό. Όταν όμως υπάρχουν περισσότεροι από ένας πελάτες που περιμένουν στο ταμείο, ο δεύτερος υπάλληλος γενικών καθηκόντων, αφήνει τη δουλειά του και βοηθάει τον ταμία να εξυπηρετήσει πιο γρήγορα τον πελάτη, μειώνοντας τον αναμενόμενο χρόνο που απαιτείται για την επεξεργασία ενός πελάτη στο 1 λεπτό.

Και στις δύο περιπτώσεις, η κατανομή χρόνου υπηρεσίας είναι εκθετική.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας.

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των πελατών στο ταμείο.

(γ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος ατόμων L στο ταμείο για αυτό το σύστημα. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να προσδιορίσετε τα L_Q, W_S και W_Q .

Άσκηση 8

Ένα πρατήριο καυσίμων έχει μία αντλία βενζίνης. Τα αυτοκίνητα φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 15 Ι.Χ. ανά ώρα. Όμως, αν η αντλία χρησιμοποιείται ήδη, αυτοί οι δυνητικοί πελάτες μπορεί να διστάζουν και να πηγαίνουν στο επόμενο πρατήριο. Ειδικότερα, αν υπάρχουν ήδη n αυτοκίνητα στο πρατήριο, η πιθανότητα αυτό ένας δυνητικός πελάτης που φθάνει θα αλλάξει γνώμη και θα φύγει είναι n/3 για n = 1, . . . , 3.

Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός αυτοκινήτου έχει εκθετική κατανομή με μέσο όρο 4 λεπτά.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας (πG = O).

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των αυτοκινήτων στο σταθμό.

(δ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος Ι.Χ. στο πρατήριο.

(ε) Βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής (συμπεριλαμβανομένου του σέρβις) για τα αυτοκίνητα που εξυπηρετούνται (νόμος του Little).

Άσκηση 9

Ένα μικρό παντοπωλείο έχει δύο υπαλλήλους, έναν στο ταμείο και έναν γενικών καθηκόντων. Οι πελάτες φτάνουν στο παντοπωλείο τυχαία με μέσο ρυθμό 30 ανά ώρα. Όταν υπάρχει μόνο ένας πελάτης στο ταμείο, τότε αυτός εξυπηρετείται μόνο από τον ταμία, με αναμενόμενο χρόνο εξυπηρέτησης 1,5 λεπτό. Όταν όμως υπάρχουν περισσότεροι από ένας πελάτες που περιμένουν στο ταμείο, ο δεύτερος υπάλληλος γενικών καθηκόντων, αφήνει τη δουλειά του και βοηθάει τον ταμία να εξυπηρετήσει πιο γρήγορα τον πελάτη, μειώνοντας τον αναμενόμενο χρόνο που απαιτείται για την επεξεργασία ενός πελάτη στο 1 λεπτό.

Και στις δύο περιπτώσεις, η κατανομή χρόνου υπηρεσίας είναι εκθετική.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων εφοδιασμένο με τους ρυθμούς μετάβασης για αυτό το σύστημα αναμονής.

(β) Αναπτύξτε τις εξισώσεις της κατάστασης ισορροπίας.

(γ) Λύστε αυτές τις εξισώσεις για να βρείτε την κατανομή πιθανοτήτων σε σταθερή κατάσταση του αριθμού των πελατών στο ταμείο.

(γ) Βρείτε το αναμενόμενο πλήθος ατόμων L στο ταμείο για αυτό το σύστημα. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να προσδιορίσετε τα L_Q, W_S και W_Q .

Παράρτημα: Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή

Ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών X = (X_1, X_2, …, X_n) με αντίστοιχο διάνυσμα αναμενόμενων τιμών μ = (E(X_1), E(X_2), …, E(X_n)) και πίνακα συνδιακυμάνσεων Σ λέμε ότι ακολουθεί την **πολυμεταβλητή κανονική κατανομή** και γράφουμε

X ~ N(μ, Σ)

αν η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος X είναι η

$$p(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right)$$

Φανερά, κάθε μία από τις τ.μ. X_1, X_2, …, X_n οφείλει να ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Διεργασία Gauss (Gaussian process)

Μία Γκαουσιανή διεργασία ή διεργασία Gauss είναι μια στοχαστική διεργασία για την οποία, κάθε πεπερασμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών από αυτήν ακολουθεί πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, ή ισοδύναμα, όταν κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός τους είναι κανονικά κατανεμημένος.

Η διεργασία Gauss μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής σε άπειρες διαστάσεις.

Παράδειγμα

Αν X_1, X_2 ~ N(0, 1) τότε η διεργασία {X(t), t ≥ 0} με

$$X(t) = \cos(\alpha t)\cdot X_1 + \sin(\alpha t)\cdot X_2$$

είναι διεργασία Gauss.

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Αν {X(t), t є N} είναι ασθενώς στάσιμη και διεργασία Gauss τότε θα είναι και ισχυρά στάσιμη.

Απόδειξη

Πράγματι, έστω {X(t), t є N} ασθενώς στάσιμη διεργασία. Για 0≤ $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και h > 0, Θεωρούμε τα διανύσματα μεταβλητών

$$X_1 = (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \text{ και } X_2 = (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_n + h))$$

Αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα μεταβλητών X_1 και X_2 είναι ισόνομα.

Πράγματι, καθώς η {X(t), t є N} είναι ασθενώς στάσιμη θα είναι E(X(t)) = σταθερό, συνεπώς τα διανύσματα μεταβλητών X_1, X_2 έχουν το ίδιο διάνυσμα αναμενόμενων τιμών μ. Επιπλέον, καθώς

$$Cov(X(t_i), X(t_j)) = Cov(X(t_i + h), X(t_j + h)), i, j = 1, 2, \dots, n,$$

προκύπτει ότι τα διανύσματα μεταβλητών X_1, X_2 έχουν τον ίδιο πίνακα συνδιακύμανσης Σ. Καθώς, το διάνυσμα μ και ο πίνακας Σ, προσδιορίζουν πλήρως την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής γίνεται κατανοητό ότι τα διανύσματα μεταβλητών X_1, X_2 έχουν την ίδια κατανομή.

Καθώς, η επιλογή τους ήταν τυχαία, συνάγεται ότι η {X(t), t є N} είναι ισχυρώς στάσιμη

Επιπλέον, ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Αν η {X(t), t є N} είναι ισχυρώς στάσιμη και διεργασία Gauss τότε θα είναι και ασθενώς στάσιμη.

Απόδειξη

Η {X(t), t є N} είναι διεργασία Gauss, άρα X(t) ~ $N(\mu_t, \sigma_t^2)$ για κάποια μ_t є R, σ_t є R^+.

Ειδικότερα, θα είναι $E(X^2(t)) < +\infty$ άρα θα είναι και ασθενώς στάσιμη διεργασία.

Συμπέρασμα

Στα πλαίσια των διεργασιών Gauss, οι έννοιες της ισχυρής και της ασθενούς στασιμότητας είναι ισοδύναμες.

Πίνακας Διαγραμμάτων