Στοχαστικές Διεργασίες

5ο Εξάμηνο – Επιλογής

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π)

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών

Ως προς τη σχέση των τ.μ. που την αποτελούν, μία διεργασία μπορεί να χαρακτηριστεί:

- Διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις (Process with independent increments)
- Διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις (Process with stationary increments)
- (Ισχυρά) στάσιμη (Strongly ή strictly ή απλά stationary process)
- Μαρκοβιανή (Markov process αν $T = [0, +\infty)$ ή Markov Chain αν $T = N$)
- Ασθενώς στάσιμη (Weakly stationary process)
- Γκαουσιανή (Gaussian process)
- Ανανεωτική (Renewal process)
- Διαδικασία διακλάδωσης (Branching process)

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Μία κατηγορία στοχαστικών διεργασιών που θα μελετήσουμε στο πλαίσιο των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι οι **(ισχυρά) στάσιμες** στοχαστικές διεργασίες.

Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη είναι **(ισχυρά) στάσιμη** (stationary ή strict/strictly stationary ή strong/strongly stationary process) όταν για κάθε n και για κάθε $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, και για κάθε $\tau > 0$, τ.ω. $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$, τα διανύσματα

$$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)] \text{ και } [X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)]$$

έχουν την **ίδια κοινή κατανομή πιθανότητας**, δηλαδή

$$\mathbf{F}_{t1,\, t2,\, \dots,\, tn} = \mathbf{F}_{t1 + \tau,\, t2 + \tau,\, \dots,\, tn + \tau}$$

Άμεση συνέπεια: για κάθε t, τ, τα X(t) και X(t + τ) είναι ισόνομα (όχι απαραίτητα ανεξάρτητα).

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Από την ισότητα $F_{t1, t2, \ldots, tn} = F_{t1+\tau, t2+\tau, \ldots, tn+\tau}$, θέτοντας n = 1, έχουμε $F_{t1} = F_{t1+\tau}$, τ > 0, δηλαδή η κατανομή πιθανότητας των $\{X_t\}$, t Є T, δεν εξαρτάται από το δείκτη t, ή

$$F_t(x) = F(x),\ t \in T.$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$m(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,dF(t) = m = \text{σταθερά}$$

και

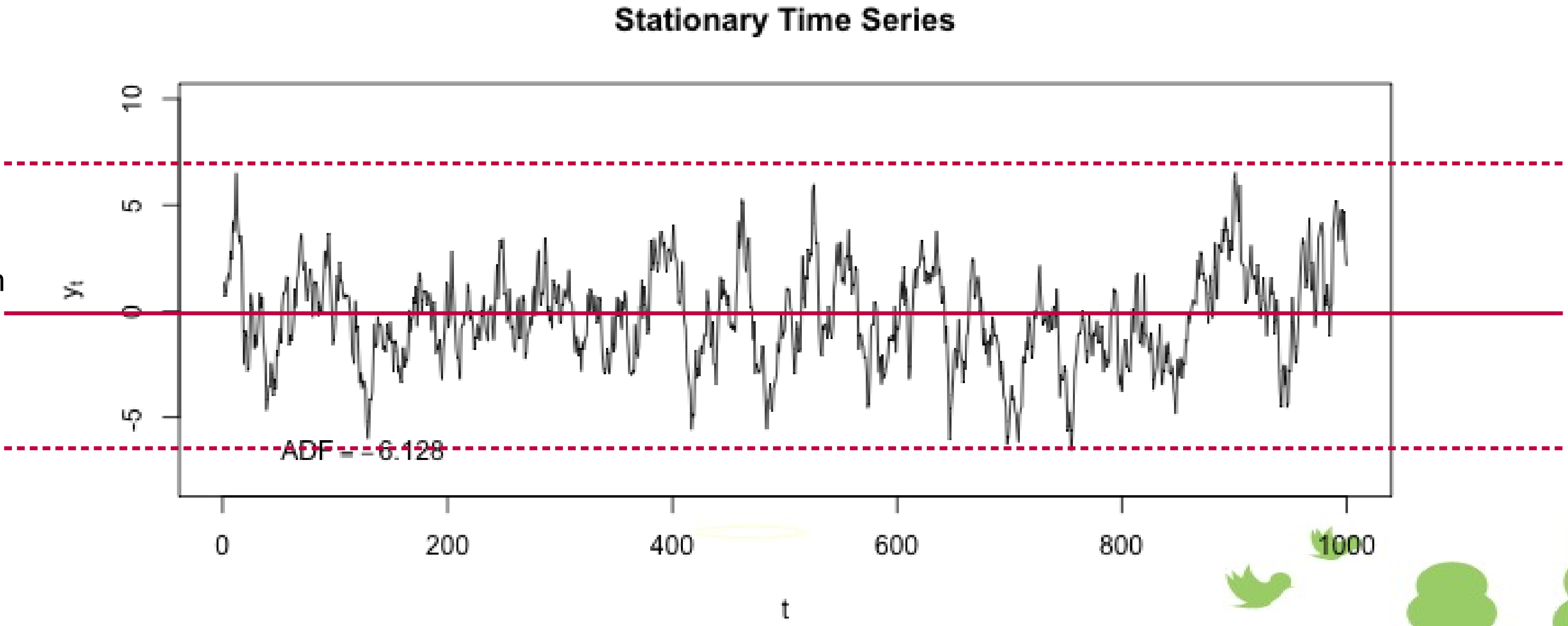
$$Var(X(t)) = E(X(t)^2) - E(X(t))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,dF(t) - m^2 = \text{σταθερά}$$

δηλαδή τόσο η τάση (trend) όσο και η διακύμανση (variance) είναι σταθερές για κάθε $\{X_t\}$, t Є T.

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Η χρονοσειρά που απεικονίζεται είναι μία *εκδοχή των τιμών* που μπορεί να πάρει μία **στάσιμη** στοχαστική διεργασία

Σταθερή μέση τιμή m

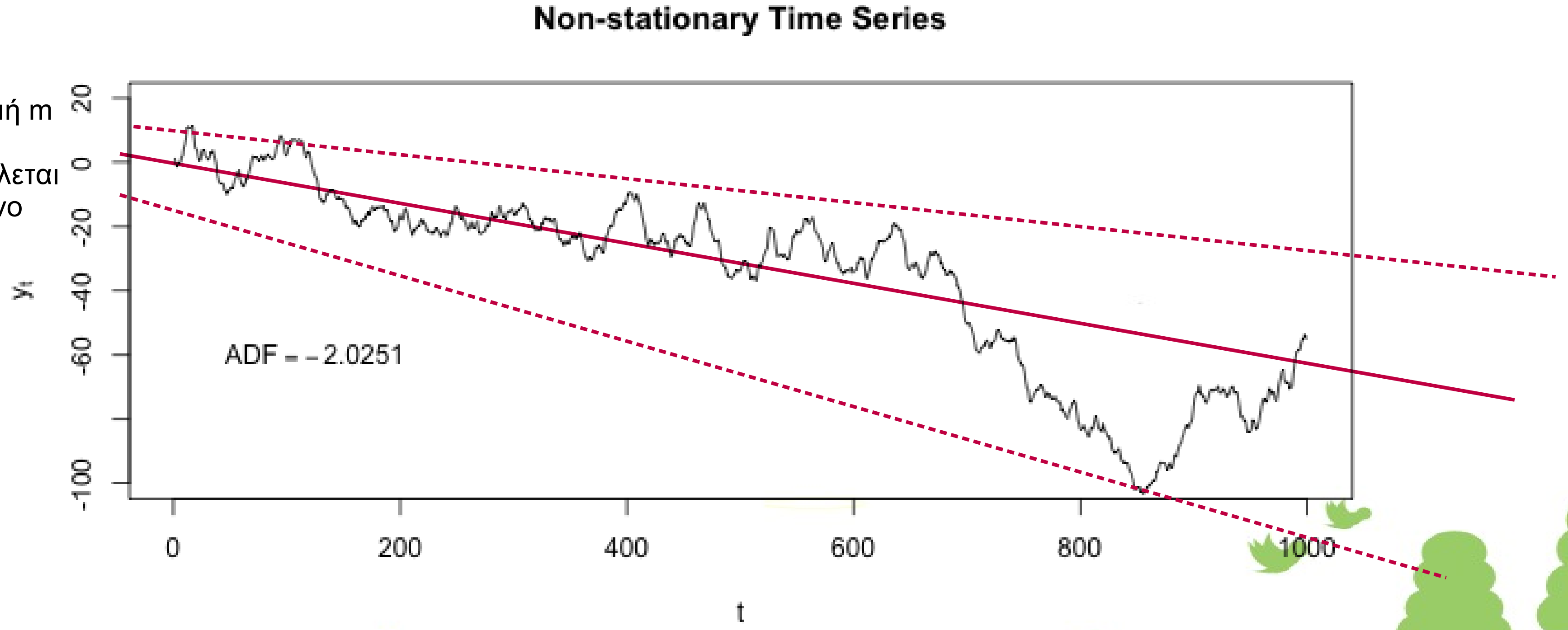


Σταθερή διακύμανση (στην πράξη) σημαίνει πως όλες οι εκδοχές της στάσιμης στοχαστικής διεργασίας αναμένονται να είναι μέσα σε ένα διάστημα που δεν μεταβάλλεται καθώς το t αυξάνει.

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Η χρονοσειρά που απεικονίζεται είναι μία *εκδοχή των τιμών* που μπορεί να πάρει μία **μη στάσιμη** στοχαστική διεργασία

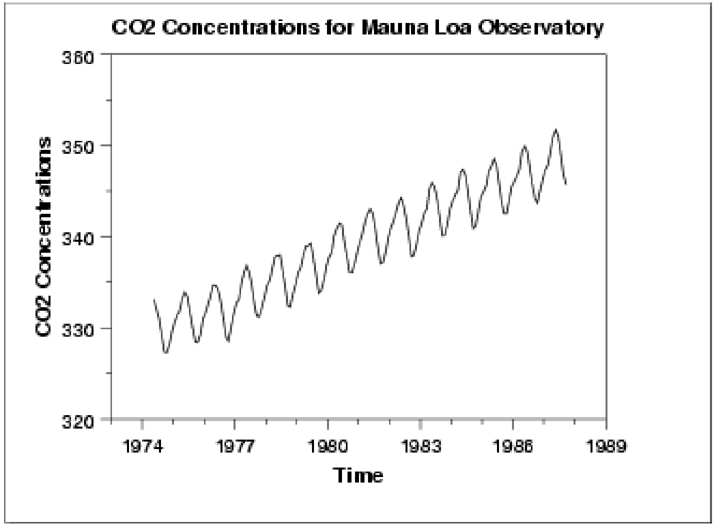
Μέση τιμή m που μεταβάλλεται στο χρόνο

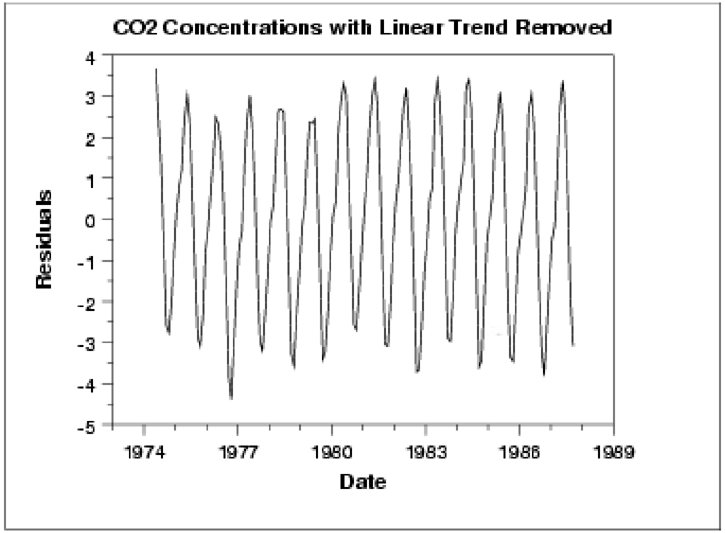


Το εύρος των τιμών αυξάνει γεγονός που υποδεικνύει μη σταθερή διακύμανση της στοχαστικής διεργασίας.

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Η χρονοσειρά που απεικονίζεται είναι μία *εκδοχή των τιμών* που μπορεί να πάρει μία **μη στάσιμη** στοχαστική διεργασία





Η οποία όμως μπορεί *να γίνει στάσιμη* αν αφαιρεθεί η γραμμική τάση της από όλες τις τιμές.

Σημείωση: Η γραμμική τάση υπολογίζεται εύκολα με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression).

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Από την ισότητα $F_{t1,\, t2,\, \dots,\, tn} = F_{t1 + \tau,\, t2 + \tau,\, \dots,\, tn + \tau}$, θέτοντας $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = t – s$, και $\tau = s$, όπου $s < t$, παίρνουμε

$$F_{0,\, t – s} = F_{s,\, t},$$

δηλαδή η κοινή κατανομή $F_{s,\, t}$ των X_t, X_s, εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά $\delta = t – s$, και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των t, s. Καθώς η $E[X(t)X(s)]$ προσδιορίζεται πλήρως από την $F_{s,\, t}$, συνάγουμε ότι και η συνάρτηση της συνδιακύμανσης

$$C(s, t) = Cov(X(t), X(s)) = E[X(t)X(s)] – m(t)m(s) = E[X(t)X(s)] – m^2,$$

εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά $\delta = t – s$. Ιδιαίτερα, βρίσκουμε ότι

$$C(s, t) = C(s, s + \delta) = C(0, \delta)$$

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Καθώς

$$\rho(t,s) = \frac{\mathrm{Cov}(X(t),X(s))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))}} = \frac{C(t,\, s)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(0))}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X(0))}} = \frac{C(0,\, \delta)}{\mathrm{Var}X(0)},$$

συνάγεται ότι και ο συντελεστής συσχέτισης των X_t, X_s, σε μία στάσιμη στοχαστική διεργασία εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά δ = t – s, και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των t, s.

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Είναι στάσιμη μία στοχαστική διεργασία που αποτελείται από ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ.;

Απάντηση

Ναι, διότι στην περίπτωση αυτή $F_{X_i} = F_{X_j}$ (= F) για κάθε i, j ϵ T (ισονομία) και επιπλέον

$F_{X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tn}} = F_{X_{t1}} \cdot F_{X_{t2}} \cdot \ldots \cdot F_{X_{tn}}$ (= F^n) = $F_{t1 + \tau, t2 + \tau, \ldots, tn + \tau}$ (ανεξαρτησία)

(Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Είναι αξιοσημείωτο ωστόσο πως η υπόθεση της ισονομίας των τ.μ. δεν αρκεί για τη στασιμότητα. Δηλαδή μπορεί μία διεργασία να αποτελείται από ισόνομες (αλλά όχι ανεξάρτητες) τ.μ. χωρίς να είναι στάσιμη.

Παράδειγμα

Η $\{X_n, n \in N\}$, με $X_0 \sim N(0, 1)$ και για κάθε $n \in N$, $X_{4n} = X_{4n+1} = X_0$ και $X_{4n+2} = X_{4n+3} = -X_0$.

Τότε, η $\{X_n, n \in N\}$ αποτελείται από ισόνομες τ.μ. καθώς

$$F_{-X0}(x) = P(-X_0 \leq x) = P(X_0 \geq -x) = 1 - P(X_0 \leq -x) = 1 - (1 - P(X_0 \leq x)) = P(X_0 \leq x) = F_{X0}(x),$$

ενώ φανερά, τα ζεύγη (X_0, X_1) και (X_1, X_2) δεν έχουν ίδια κοινή κατανομή πιθανότητας.

Σημείωση: Αντί της $N(0, 1)$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συμμετρική, μη τετριμμένη κατανομή.

Στάσιμη Διεργασία → Στάσιμες προσαυξήσεις

Αξιοσημείωτο είναι το εξής πόρισμα που αφορά τις στάσιμες διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Αν t_1, $t_2 \in T$, και $\tau > 0$, τ.ω. $t_1 + \tau$, $t_2 + \tau \in T$, τα διανύσματα

$$[X(t_1), X(t_2)] \text{ και } [X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau)]$$

έχουν την ίδια κοινή κατανομή πιθανότητας, συνεπώς το ίδιο ισχύει για τις διαφορές

$$X(t_2) - X(t_1) \text{ και } X(t_2 + \tau) - X(t_1 + \tau).$$

Δηλαδή: **Κάθε στάσιμη διεργασία έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.**

Στάσιμες προσαυξήσεις $\nrightarrow$ Στάσιμη Διεργασία

Έστω η διεργασία $\{Y_n,\ n \in N\}$, όπου

$$Y_n = \{\text{άθροισμα μέχρι και την } n \text{ – ρίψη ενός ζαριού}\}.$$

Δείξτε ότι:

- Η $\{Y_n,\ n \in N\}$ δεν είναι στάσιμη.
- Η $\{Y_n,\ n \in N\}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις.

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Ο Andrey Andreyevich Markov (14 Ιουνίου 1856 - 20 Ιουλίου 1922) ήταν Ρώσος μαθηματικός, γνωστός για το έργο του στις στοχαστικές διαδικασίες. Ένα κύριο θέμα της έρευνάς του έγινε αργότερα γνωστό ως διαδικασίες Markov ή Μαρκοβιανές διεργασίες. Ένας από τους γνωστούς μαθητές του ήταν και ο Chebychev.

Πιο συγκεκριμένα, **διαδικασία Markov** ονομάζεται μία στοχαστική διεργασία που περιγράφει μια ακολουθία πιθανών γεγονότων και για την οποία η πιθανότητα κάθε συμβάντος εξαρτάται μόνο από την κατάσταση που επιτεύχθηκε στο προηγούμενο συμβάν, ιδιότητα που αναφέρεται και "απώλειας μνήμης".

Σχόλιο: Η έννοια της Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι η πιο απλή γενίκευση της έννοιας της ακολουθίας τ.μ. που είναι ισόνομες και ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Μία **Μαρκοβιανή διεργασία** μπορεί να είναι είτε διακριτού είτε συνεχούς χρόνου, ενώ ομοίως δεν υπάρχει περιορισμός στις τιμές που μπορεί να λαμβάνουν οι τυχαίες μεταβλητές X(n).

Αν για μία Μαρκοβιανή διεργασία $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ή $\{X_t, t \geq 0\}$, συμβαίνει επιπλέον οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών που την αποτελούν να είναι διακεκριμένες (π.χ. ακέραιες τιμές) τότε αυτή καλείται μία **Μαρκοβιανή αλυσίδα** ή **αλυσίδα Markov** (Markov chain).

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Πιο συγκεκριμένα: Έστω η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, με χώρο καταστάσεων S.

Ορισμός: Λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, όταν για κάθε $t \in T$ και $s, u > 0$, οι τ.μ. X_{t+s} και X_{t-u} είναι ανεξάρτητες δεδομένου του γεγονότος $\{X_t = x\}$, $x \in S$. Στην περίπτωση αυτή, η διεργασία λέγεται **Μαρκοβιανή διαδικασία**.

Δηλαδή, η διεργασία $\{X_t, t \in T\}$ είναι Μαρκοβιανή αν για κάθε $x_0, x_1, x_2 \in S$, τα ενδεχόμενα $B = \{X_{t+s} = x_2\}$ και $A = \{X_{t-u} = x_1\}$ είναι ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος $\Gamma = \{X_t = x_0\}$ δηλαδή όταν $P(B \mid A \cap \Gamma) = P(B \mid \Gamma)$ ή

$$\mathbf{P(X_{t+s} = x_2 \mid X_t = x_0, X_{t-u} = x_1) = P(X_{t+s} = x_2 \mid X_t = x_0)}$$

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Η σχέση

$$\mathbf{P(X_{t+s} = x_2 \mid X_t = x_0, X_{t-u} = x_1) = P(X_{t+s} = x_2 \mid X_t = x_0),}$$

για οποιαδήποτε x_0, x_1, $x_2 \in S$, ερμηνεύεται με απλά λόγια ως εξής:

Αν γνωρίζουμε το παρόν $\{X_t = x_0\}$, η εκτίμηση της πιθανότητας ενός μελλοντικού γεγονότος $\{X_{t+s} = x_2\}$, $s > 0$, δεν επηρεάζεται από οποιαδήποτε τιμή είχε πάρει η διεργασία στο παρελθόν X_{t-u}, $u > 0$.

Μαρκοβιανές Διεργασίες

Στην περίπτωση όπου η Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού ή συνεχούς χρόνου $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ή $\{X(t), t \geq 0\}$, λαμβάνει αποκλειστικά διακεκριμένες τιμές $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, $(card(S) \leq card(N))$, τότε ονομάζεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα**.

Στην περίπτωση αυτή η **Μαρκοβιανή ιδιότητα** παίρνει μία πιο προσιτή μορφή και γράφεται:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n),\ x_1, \ldots, x_n \in S,$$

(περίπτωση διακριτού χρόνου),

$$\text{ή } P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, \ldots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n),\ ,\ x_1, \ldots, x_n \in S,$$

...για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \geq 0$, με $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ (περίπτωση συνεχούς χρόνου).

Ανεξάρτητες προσαυξήσεις → Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Αποδεικνύεται ότι:

Κάθε διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μία Μαρκοβιανή διεργασία.

Αυτός είναι και ένας τρόπος για να δειχθεί έμμεσα πως μία διεργασία είναι Μαρκοβιανή!

Παράδειγμα

Αν X_i, i = 1, 2, … είναι i.i.d. και $Y_n = X_1 + X_2 + … + X_n$, τότε η

$\{Y_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις άρα είναι Μαρκοβιανή.

Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\not\to$ Ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή **μία Μαρκοβιανή διεργασία δεν έχει απαραίτητα ανεξάρτητες προσαυξήσεις.**

Αντιπαραδείγματα

α) Η AR(1) διεργασία $X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$.

β) Μεροληπτικός τυχαίος περίπατος στο $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$. $X_t = \{$θέση τη στιγμή $t \geq 0\}$

Εάν η διεργασία βρίσκεται στην κατάσταση k (για $1 \leq k \leq N-1$), μετακινείται σε:

- $k+1$ με πιθανότητα p_k, όπου το p_k είναι συνάρτηση της θέσης k.
- $k-1$ με πιθανότητα $q_k = 1-p_k$.

γ) Η διεργασία Ornstein–Uhlenbeck

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Μαρκοβιανές αλυσίδες

Μαρκοβιανές Διεργασίες			
		Χώρος καταστάσεων	
		Διακριτός	Συνεχής
Παραμετρικός χώρος	Διακριτός	$\{X_n, n \in N\}$ και $S = \{x_0, x_1, \dots\}$	$\{X_n, n \in N\}$ και $S \subseteq R$
	Συνεχής	$\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$ και $S = \{x_0, x_1, \dots\}$	$\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$ και $S \subseteq R$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Αν $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, για οποιεσδήποτε τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 στο δειγματοχώρο των τ.μ. της διεργασίας, έχουμε:

$$P(X_3 = x_3 \mid X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_3 = x_3 \mid X_2 = x_2),$$

$$P(X_4 = x_4 \mid X_3 = x_3, X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_4 = x_4 \mid X_3 = x_3), \text{ κλπ.}$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$, έχουμε ότι για κάθε τρεις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, με $t_1 < t_2 < t_3$, είναι

$$P(X(t_3) = x_3 \mid X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1) = P(X(t_3) = x_3 \mid X(t_2) = x_2), \text{ κλπ.}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Παράδειγμα 1 (Αλυσίδα διακριτού χρόνου)

Αν X_i είναι η τ.μ. που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της i ρίψης ενός ζαριού, i = 1, 2, …, και

$$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n,$$

τότε η στοχαστική διεργασία $\{Z_n$, n = 1, 2, … } είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, καθώς:

- Οι Z_n, n = 1, 2, …, λαμβάνουν διακεκριμένες τιμές στους φυσικούς αριθμούς.
- Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ είναι

$$P(Z_{n+1} = x_{n+1} \mid Z_n = x_n, \ldots, Z_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} - x_n) = P(Z_{n+1} = x_{n+1} \mid Z_n = x_n).$$

Ερώτηση: Πως αποδεικνύεται η παραπάνω διπλή ισότητα;

Υπόδειξη: Τι μπορείτε να συνάγετε για τις τιμές των μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από τις ισότητες $Z_n = x_n, \ldots, Z_1 = x_1$;

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Παράδειγμα 2 (Αλυσίδα διακριτού χρόνου)

Έστω X_n, n = 1, 2, … μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με κατανομή B(1, ½) (δηλαδή $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = ½$, για κάθε n = 1, 2, …). Αν

$$Y_n = (X_n + X_{n-1}) / 2,$$

ο κινούμενος μέσος όρος της $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ τότε η $\{Y_n, n = 2, 3, \dots\}$, *δεν* είναι μία διεργασία Markov. Πράγματι, οι πιθανές τιμές της Y_n είναι οι 0, ½, 1 και για κάθε n = 2, 3, …, υπολογίζουμε (πως;) ότι

$$P(Y_n = 0) = 1/4,\ P(Y_n = 1/2) = 1/2,\ P(Y_n = 1) = 1/4,$$

και περαιτέρω για n ≥ 3, υπολογίζουμε (πως;):

$$P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = 1/2) = 1/4 \neq P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = 1/2,\ Y_{n-2} = 0) = 1/2,$$

συνεπώς *δεν τηρείται* η Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Ένας χρήσιμος τύπος για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες

Από τη θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι $P(B \mid A) = P(B \cap A) / P(A)$ ή ισοδύναμα, ότι $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Με αναδρομικό συλλογισμό, βρίσκουμε πως για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ισχύει

$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$,

$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = P(A_2 \cap A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)$,

… και γενικότερα

$$\mathbf{P(A_n \cap A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_{n-1} \cap \ldots \cap A_2 \cap A_1)}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Ένας χρήσιμος τύπος για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες

Σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$, η σχέση

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_{n-1} \cap \ldots \cap A_2 \cap A_1),$$

σε συνδυασμό με την Μαρκοβιανή ιδιότητα οδηγεί στην:

$$\mathbf{P(X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots ,X(t_{n+1}) = x_{n+1}) =}$$

$$\mathbf{= P(X(t_1) = x_1) \cdot P(X(t_2) = x_2 \mid X(t_1) = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \cdot P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n)}$$

...για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ ($\in \mathbb{N}$ ή $[0, +\infty)$) με $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$.

Ερώτηση: Πως εφαρμόζεται η Μαρκοβιανή ιδιότητα και προκύπτει η τελευταία ισότητα;

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Ένας ακόμα χρήσιμος τύπος για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες

Περαιτέρω, αξιοποιώντας τον τύπο $P(B \cap A \mid \Gamma) = P(B \mid A \cap \Gamma) \cdot P(A \mid \Gamma)$, παίρνουμε:

$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots ,X_n = i_n \mid X_0 = i_0)$

$= P(X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots , X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)$

$= \dots$

$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots , X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1, X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)$

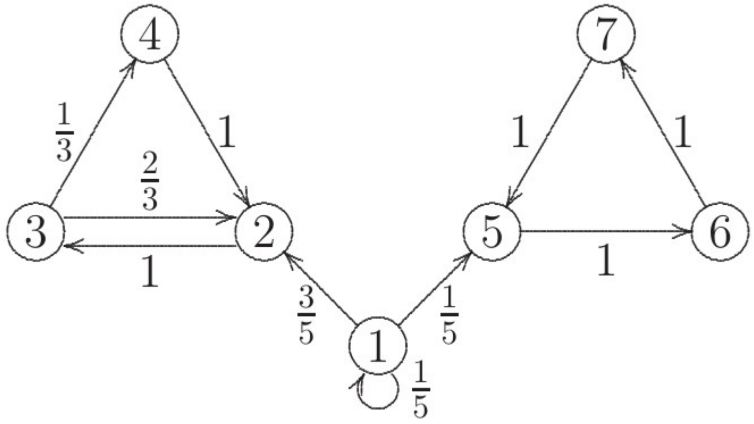
$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)$, δηλαδή

$$\mathbf{P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots ,X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)}$$

Σημείωση: Ο τύπος $P(B \cap A \mid \Gamma) = P(B \mid A \cap \Gamma) \cdot P(A \mid \Gamma)$, προκύπτει από τον $P(B \cap A) = P(B \mid A) \cdot P(A)$ με την επισήμανση πως οποιοδήποτε αποτέλεσμα πιθανότητας που ισχύει για την άνευ όρων πιθανότητα παραμένει αληθές εάν όλα εξαρτώνται από κάποιο γεγονός.

Παράδειγμα

Ένας ψύλλος μπαίνει στο δίκτυο του σχήματος και πηδά μεταξύ των θέσεων 1, 2, …, 7 επιλέγοντας κάθε μετάβαση με τις πιθανότητες που αναφέρονται στα αντίστοιχα μονοπάτια. Αν γνωρίζουμε πως ο ψύλλος βρίσκεται στην θέση 1, ποια είναι η πιθανότητα ο ψύλλος να διαγράψει την τροχιά



$$1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 4;$$

Απάντηση

Έστω X_n, $n \geq 0$, η τ.μ. που δείχνει τη θέση του ψύλλου τη χρονική στιγμή n. Οι πιθανές τιμές των X_n είναι οι $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Γνωρίζουμε ότι $X_0 = 1$. Το σύνολο $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διεργασία και πιο συγκεκριμένα, μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, άρα:

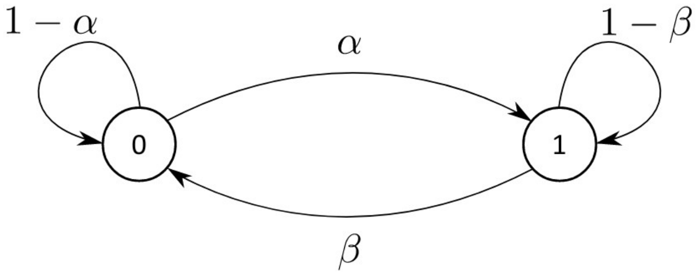
$P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4 \mid X_0 = 1) =$

$= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 3 \mid X_1 = 2) \cdot P(X_3 = 2 \mid X_2 = 3) \cdot P(X_4 = 3 \mid X_3 = 2) \cdot P(X_5 = 4 \mid X_4 = 3)$

$= 3/5 \cdot 1 \cdot 2/3 \cdot 1 \cdot 1/3 = 6 / 45 \approx 13{,}3\%$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 0\}$ που περιγράφει ένα κωδικοποιημένο δυαδικό σήμα: Όταν στη n – οστή θέση έχουμε 0, τότε η πιθανότητα στην επόμενη θέση να έχουμε 0 είναι 1 - α και η πιθανότητα να έχουμε 1 είναι α. Ομοίως όταν στη n – οστή θέση έχουμε 1, τότε η πιθανότητα να έχουμε 1 στην επόμενη θέση είναι 1 - β και 0 είναι β.



Σε όρους πιθανοτήτων:

$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0) = \alpha$, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) = 1 - \alpha$, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1) = \beta$, $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) = 1 - \beta$.

Ερωτήσεις:

1. Είναι η $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα;

2. Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1 στα 3 επόμενα βήματα;

3. Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0 ή 1 με ίδια πιθανότητα, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1 στα 3 επόμενα βήματα;

Παράδειγμα

Σε όρους πιθανοτήτων:

$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0) = \alpha$, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) = 1 - \alpha$, $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1) = \beta$, $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) = 1 - \beta$.

Απαντήσεις:

1. Η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα καθώς (εξ ορισμού) όλες οι πιθανές εξελίξεις ορίζονται μόνο από την κατάσταση του προηγούμενου βήματος.

2. $P(X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 \mid X_1 = 0)$

$$= P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \cdot P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) \cdot P(X_4 = 1 \mid X_3 = 1) = \alpha\,(1 - \beta)^2.$$

3. $P(X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1)$

$$= P(X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 \mid X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1)$$

$$= \ldots = (1 - \beta)^2 \cdot (1 + \alpha - \beta) / 2.$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Φανερά, για να γνωρίζουμε την κοινή κατανομή των τ.μ. μία Μαρκοβιανής αλυσίδας, αρκεί να γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης από το n – οστό βήμα στο n + 1 βήμα για όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρουν οι τ.μ. που την αποτελούν.

Αν $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑΔΧ) που λαμβάνει ακέραιες τιμές, S το διακεκριμένο σύνολο τιμών και $i, j \in S$, τότε συμβολίζουμε

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)}$$

Οι πιθανότητες $p^{(n)}_{ij}$ ονομάζονται **πιθανότητες μετάβασης βήματος n** (n-step transition probabilities).

Σημείωση: Προσέξτε ότι οι δείκτες i, j τοποθετούνται με ανάποδη σειρά στη δεσμευμένη πιθανότητα!

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Στη γενική περίπτωση μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας, οι πιθανότητες

$$p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$$

εξαρτώνται από την επιλογή του m. Στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε μόνο με στάσιμες Μαρκοβιανές αλυσίδες, οι οποίες ονομάζονται και **ομογενείς** Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Δηλαδή, στη συνέχεια, δεχόμαστε ότι για κάθε m = 1, 2, …, είναι

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i).}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Φανερά, η συμπεριφορά μίας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας προσδιορίζεται πλήρως από τις πιθανότητες μετάβασης βήματος 1,

$$p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Σημείωση: Ισοδύναμα, λόγω της ομοιογένειας $p_{ij} = P(X_{m+1} = j \mid X_m = i)$, για κάθε $m \in N$.

Για κάθε $i, j \in S$ είναι $p_{ij} \geq 0$ και $\Sigma_{j \in K}\, p_{ij} = 1$. Ο πίνακας

$$P = [p_{ij}],\ i, j \in S,$$

ονομάζεται **Στοχαστικός Πίνακας (Stochastic Matrix)**. Αντίστοιχα ορίζεται ο πίνακας μετάβασης n – βημάτων

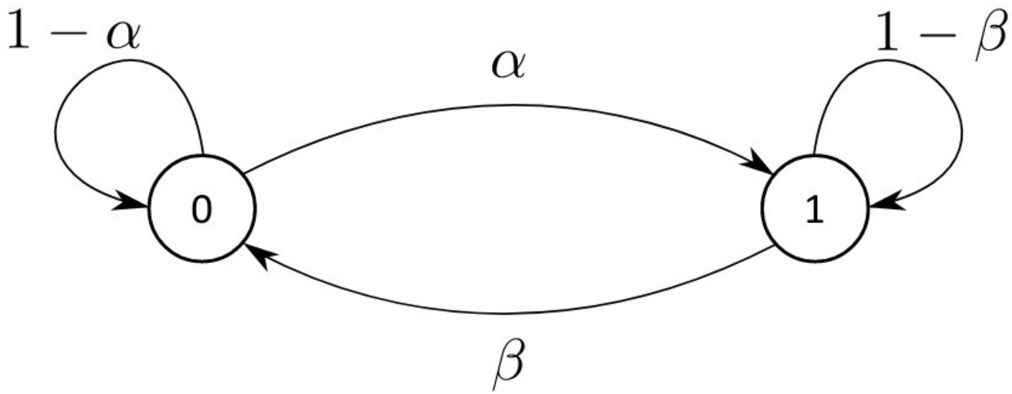
$$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}],\ i, j \in S.$$

Σημείωση: Η διάσταση του πίνακα P είναι |S| x |S|, όπου |S| συμβολίζει το πλήθος των στοιχείων του S. Συνεπώς, μπορεί να έχει άπειρες γραμμές και στήλες.

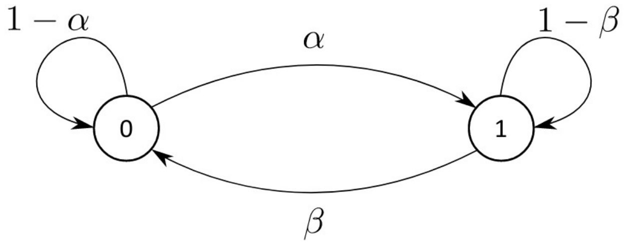
Παράδειγμα

Θεωρούμε τη στοχαστική ανέλιξη $\{X(n), n \geq 0\}$ που περιγράφει ένα κωδικοποιημένο δυαδικό σήμα:

Όταν στη n – οστή θέση έχουμε 0, τότε η πιθανότητα στην επόμενη θέση να έχουμε 0 είναι 1 - α και η πιθανότητα να έχουμε 1 είναι α. Ομοίως όταν στη n – οστή θέση έχουμε 1, τότε η πιθανότητα να έχουμε 1 στην επόμενη θέση είναι 1 - β και 0 είναι β.



Μαρκοβιανές Αλυσίδες



Ο χώρος καταστάσεων των X(n), $n \geq 0$, είναι ο S = {0, 1} και επιπλέον είναι

$$p_{00} = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = 1 - \alpha, \quad p_{01} = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = \alpha$$

$$p_{10} = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = \beta, \quad p_{11} = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = 1 - \beta.$$

Ο Στοχαστικός Πίνακας της ανέλιξης είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

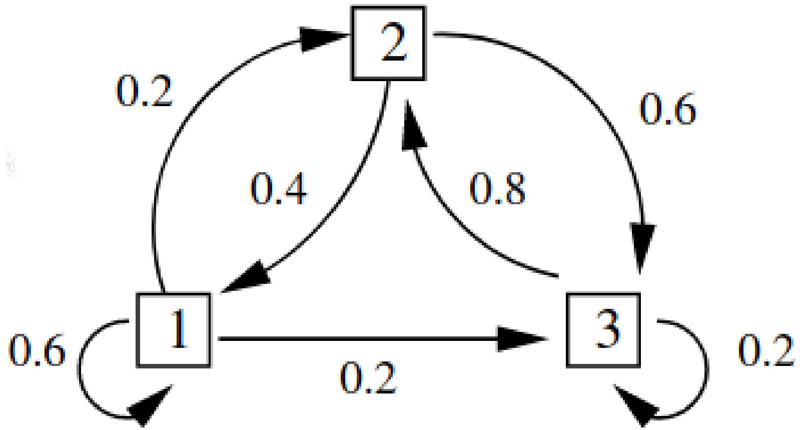
Παράδειγμα

Αν X_i ϵ {0, 1}, $X_i \sim B(1, p)$, $i \geq 0$, και $W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, τότε η $\{W_n, n \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Καθώς, σε κάθε βήμα η W_n αυξάνει κατά 1 με πιθανότητα p και μένει στάσιμη με πιθανότητα 1 – p, συνάγουμε ότι $p_{0,0} = 1 - p$, $p_{0,1} = p$, $p_{1,1} = 1 - p$, $p_{1,2} = p$ και γενικότερα $p_{i,i} = 1 - p$, $p_{i,i+1} = p$, $i \geq 0$, ενώ όλοι οι άλλοι συνδυασμοί δεικτών έχουν πιθανότητα 0. Συνεπώς, ο στοχαστικός πίνακας που της αντιστοιχεί είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

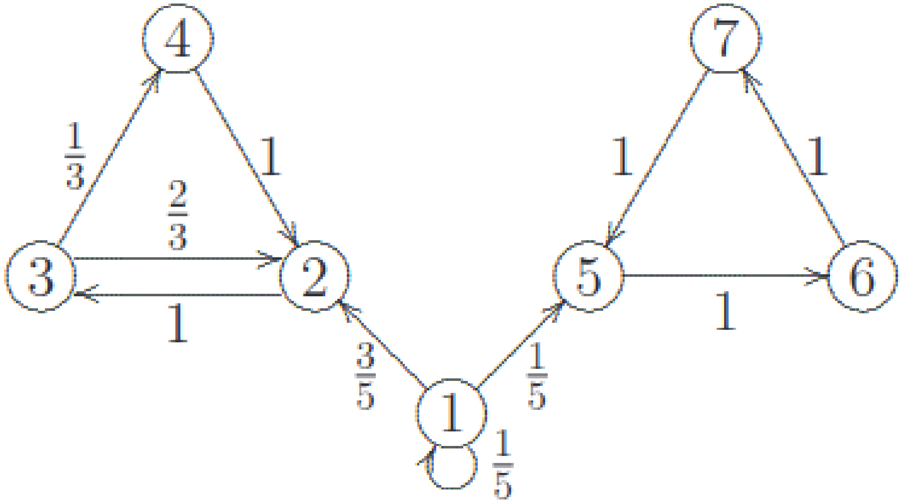
Δραστηριότητα 1



Ομαδική Δραστηριότητα 1

Ένας ψύλλος πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, 3 του σχήματος με τις πιθανότητες που αναφέρονται σε αυτό. Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει τη θέση του ψύλλου, να βρείτε τον στοχαστικό πίνακα που της αντιστοιχεί.

Δραστηριότητα 2



Ομαδική Δραστηριότητα 2

Ο ψύλλος μετακόμισε σε μεγαλύτερο σπίτι και τώρα πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, …, 7 του σχήματος. Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει τη θέση του ψύλλου, βρείτε τον στοχαστικό πίνακα που της αντιστοιχεί.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Με τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij}, i, j Є S, είναι δυνατόν να εκφραστούν με συντομότερο τρόπο ισότητες που αφορούν πιθανότητες.

Ενδεικτικά, ο τύπος

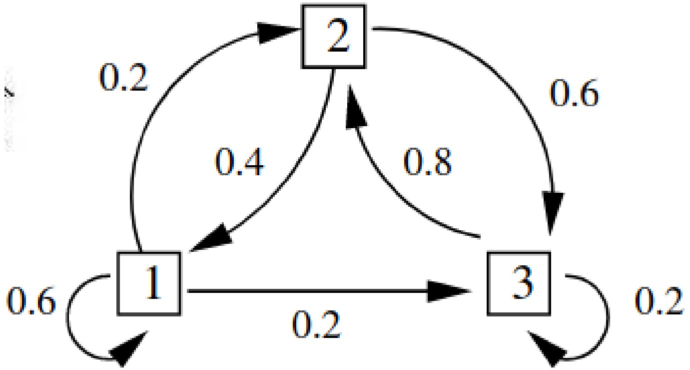
$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots ,X_{n+1} = x_{n+1}) =$

$$= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

Μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots ,X_{n+1} = x_{n+1}) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{x1,x2} \cdot p_{x2, x3} \cdot \dots \cdot p_{xn-1, xn}} \ .$$

Εφαρμογή



Ένας ψύλλος εισάγεται με τυχαίο τρόπο στο δίκτυο του σχήματος. Μετά πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, 3 σύμφωνα με τις πιθανότητες που αναφέρονται σε αυτό. Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη του τροχιά να είναι η

$$3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3;$$

Απάντηση:

$P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3)$

$= P(X_1 = 3) \cdot p_{3,2} \cdot p_{2,1} \cdot p_{1,2} \cdot p_{2,3} = 1 / 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}0128 = 1{,}28\%.$

Ομαδική Δραστηριότητα

Η οικογενειακή κατάσταση για ένα οποιοδήποτε έτος της ενήλικης ζωής προσεγγίζεται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, όπου οι τ.μ. λαμβάνουν τις τιμές 1 (Ελεύθερος), 2 (Συγκατοίκηση) και 3 (Έγγαμος/η). Ο πίνακας μετάβασης από έτος σε έτος είναι ο επόμενος:

$$P = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.35 & 0.05 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.85 \end{pmatrix}$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας όπου θα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα, ένας έγγαμος ενήλικος να πάρει διαζύγιο μία χρονιά και την επόμενη να ξαναπαντρευτεί.

(γ) Γνωρίζοντας ότι ένας ενήλικος είναι ελεύθερος, υπολογίστε την πιθανότητα να παραμείνει ελεύθερος για δύο ακόμα χρόνια.

(δ) Αν στην ηλικία των 18 οι πιθανότητες των τριών ενδεχομένων είναι 1: 0,95, 2: 0,04, 3: 0,01, να βρεθεί η κατανομή πιθανοτήτων μετά από 1 έτος, στην ηλικία των 19.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Δύο σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τις ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι τα εξής:

1. Αν γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων της διεργασίας ($p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$) τότε ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης βήματος 2 ($p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$);

2. Αν γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας της X_0 (δηλαδή όλες τις πιθανότητες της μορφής $P(X_0 = i)$, $i \in S$), τότε ποια είναι η κατανομή πιθανότητας της X_n, $n > 1$;

Εξίσωση Chapman-Kolmogorov

Στις Μαρκοβιανές αλυσίδες ισχύει μία ιδιαίτερη σχέση: Αν

$$P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}],$$

όπου $p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in S$, είναι ο πίνακας μετάβασης 2 – βημάτων, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\mathbf{P^{(2)} = P^2.}$$

Εξίσωση Chapman-Kolmogorov

Απόδειξη: Για κάθε $m \in N$:

$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j \mid X_0 = i) = \sum_{\kappa \in K} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i)$

$= \sum_{\kappa \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i)$

$= \sum_{\kappa \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i)$

$= \sum_{\kappa \in S} p_{kj} \cdot p_{ik}$

$= \sum_{\kappa \in S} p_{ik} \cdot p_{kj}$

$= (P^2)_{ij}$ (το στοιχείο (i, j) του P^2),

δηλαδή $P^{(2)} = P^2$. Γενικότερα, όμοια αποδεικνύεται ότι $P^{(n)} = P^n$, ($P^0 = I$).

Εξίσωση Chapman-Kolmogorov

Η γενική σχέση η οποία ισχύει μεταξύ πιθανοτήτων μετάβασης είναι η εξής:

$$\mathbf{p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{\kappa \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}},$$

η οποία είναι γνωστή ως **εξίσωση Chapman-Kolmogorov.**

Συνεπώς, όταν δίνεται ο πίνακας $P = [p_{ij}]$, $i, j \in S$, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα για οποιαδήποτε μελλοντική εξέλιξη μίας ομογενούς αλυσίδας Markov.

Κατανομή Πιθανότητας

Ο πίνακας μετάβασης μας επιτρέπει να υπολογίσουμε εύκολα την κατανομή πιθανότητας οποιασδήποτε τ.μ. συμμετέχει σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα. Πράγματι, έστω $\{X_n,\ n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Αν $\pi_i = P(X_0 = i)$, τότε η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X_0, μπορεί να αναπαρασταθεί ως το διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_0 = N) \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$. Γράφουμε και

$$X_0 \sim \pi^T.$$

Κατανομή Πιθανότητας

Αξιοποιώντας τον πίνακα **π** που περιγράφει την κατανομή της X_0, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας της X_1. Πράγματι, για κάθε j = 1, 2, …, N, είναι

$$P(X_1 = j) = \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j, X_0 = i)$$

$$= \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i)$$

$$= \sum_{i = 1, \ldots, N} p_{ij} \cdot \pi_i$$

$$= \sum_{i = 1, \ldots, N} \pi_i \cdot p_{ij}$$

$$= (\pi^T P)_j,$$

δηλαδή $\mathbf{X_1 \sim \pi^T P}$, όπου P ο στοχαστικός πίνακας της αλυσίδας.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{X_2 \sim \pi^T P^2}$ και γενικότερα ότι $\mathbf{X_n \sim \pi^T P^n}$, n = 1, 2, … , N.

Εφαρμογή 1

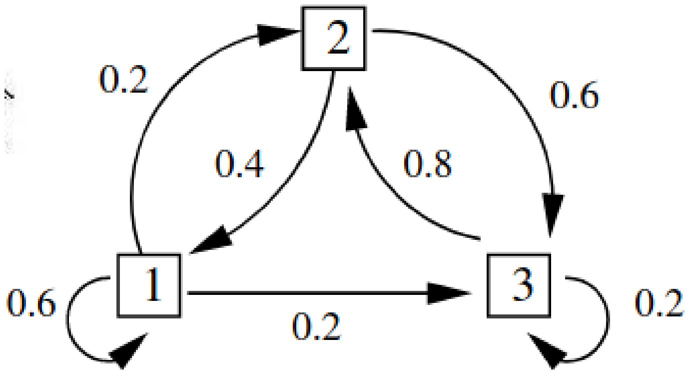
Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1\}$ και στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης
(i) $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$, (ii) $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1)$, (iii) $P(X_3 = 0 \mid X_0 = 0)$.

Απαντήσεις: $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = 2/3$, $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = 5/12$, $P(X_3 = 0 \mid X_0 = 0) = 23/54$.

Εφαρμογή 2



Ένας ψύλλος βρίσκεται στο δίκτυο του σχήματος και πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, 3 σύμφωνα με τις πιθανότητες που αναφέρονται σε αυτό. Έστω X_n, η θέση του (1, 2 ή 3) τη χρονική στιγμή n.

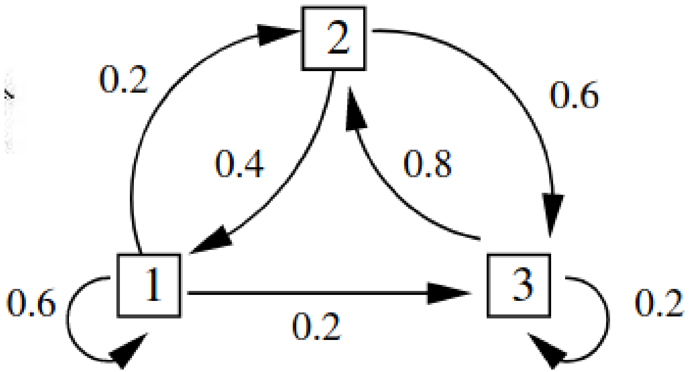
(α) Καταγράψτε τον στοχαστικό πίνακα που περιγράφει την Μαρκοβιανή αλυσίδα.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.

(γ) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος εισάγεται με ίση πιθανότητα σε μία από τις θέσεις του δικτύου, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_1.

(δ) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος τοποθετείται στην θέση 1, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_2.

Εφαρμογή 2



Απάντηση

(α)

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(β) $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = (P^2)_{13} = 0{,}28$.

(γ) $\pi = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ και $X_1 \sim \pi^T P = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$.

(δ) $\pi = (1,\ 0,\ 0)$ και $X_2 \sim \pi^T P^2 = (0{,}44,\ 0{,}28,\ 0{,}28)$.

Εφαρμογή 3

Ένα σύστημα τηλεπικοινωνιών χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 και 1. Κάθε ψηφίο που μεταφέρεται πρέπει να περάσει μέσα από πολλές φάσεις, σε κάθε μία από τις οποίες υπάρχει πιθανότητα p, ότι το ψηφίο που εισέρχεται θα μείνει αμετάβλητο στην έξοδο. Έστω ότι X_n συμβολίζει το ψηφίο που εγκαταλείπει την νιοστή φάση του συστήματος. Η ακολουθία $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ αποτελεί τότε μία ομογενή αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \qquad \text{όπου } q=1-p$$

(α) Να δείξετε ότι

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix}$$

(β) Για p = 2 / 3, να βρείτε την πιθανότητα για ένα ψηφίο που εισέρχεται στο σύστημα σαν 1 να μεταβιβασθεί σωστά μετά από 3 φάσεις.

(γ) Αν $P(X_0 = 1) = a$ και $P(X_0 = 0) = b$, να βρείτε την πιθανότητα ότι ένα ψηφίο που μεταβιβάζεται από το σύστημα σαν μονάδα, στην πραγματικότητα εισήλθε στο σύστημα σαν μονάδα.

Εφαρμογή 3

(α) Υπολογίζουμε

$$P^{(2)} = P.P = \begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^2 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^2 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^2 \end{bmatrix}$$

και προχωρούμε με μαθηματική επαγωγή.

(β) $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}^{(3)} = 14 / 27$.

(γ) $P(X_0 = 1 \mid X_n = 1)$

$= P(X_0 = 1, X_n = 1) / P(X_n = 1) = P(X_n = 1, X_0 = 1) / P(X_n = 1) = P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) / P(X_n = 1)$.

Αντικαθιστώντας $P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}^{(n)} = ½ + ½ (p - q)^n$, $P(X_0 = 1) = α$ και

$P(X_n = 1) = P(X_n = 1, X_0 = 0) + P(X_n = 1, X_0 = 1)$

$= P(X_n = 1 \mid X_0 = 0) P(X_0 = 0) + P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) P(X_0 = 1)$

$= p_{01}^{(n)} b + p_{11}^{(n)} a = (½ – ½ (p – q)^n) b + (½ + ½ (p – q)^n) a$, βρίσκουμε

$P(X_0 = 1 \mid X_n = 1) = ….$