Στοχαστικές Διεργασίες

5ο Εξάμηνο – Επιλογής

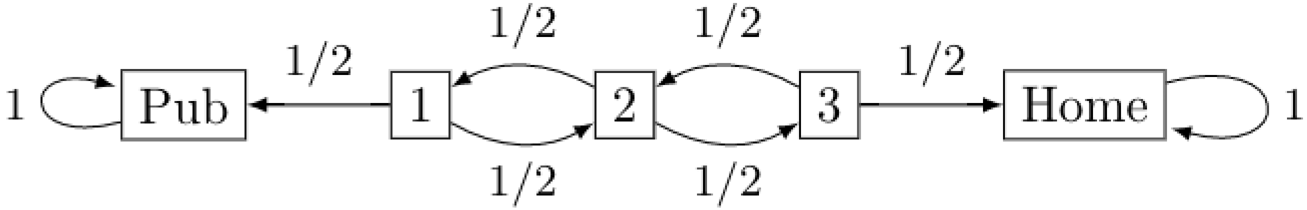
Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π)

Εισαγωγή

Ενδεικτικά Προβλήματα

Στόχος του πρώτου μαθήματος είναι η παρουσίαση ορισμένων ενδεικτικών προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν στη διάρκεια του εξαμήνου και τα οποία θα αποτελέσουν αφορμή για την επέκταση της θεωρίας που ήδη είναι γνωστή από προηγούμενα μαθήματα.

Πρόβλημα 1 – 1$^{\eta}$ εκδοχή



Στο σχήμα περιγράφεται η κίνηση ενός μεθυσμένου μεταξύ της Pub και του σπιτιού του οι οποίες είναι απορροφητικές καταστάσεις καθώς αν βρεθεί στις δύο αυτές θέσεις, δεν μπορεί να φύγει.

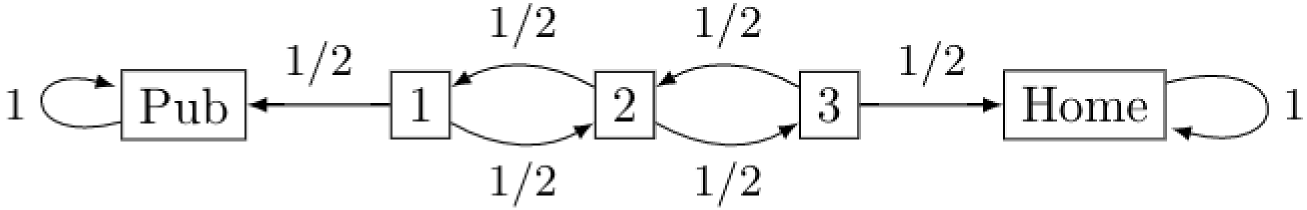
Ξεκινώντας από τη θέση 3:

(α) ποια είναι η πιθανότητα να καταλήξει στο σπίτι του, σε 1, 5 ή 30 βήματα;

(β) ποια είναι η πιθανότητα να καταλήξει τελικά στο σπίτι του;

(γ) ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος βημάτων ώστε να καταλήξει στο σπίτι του;

Πρόβλημα 1 – 1η εκδοχή



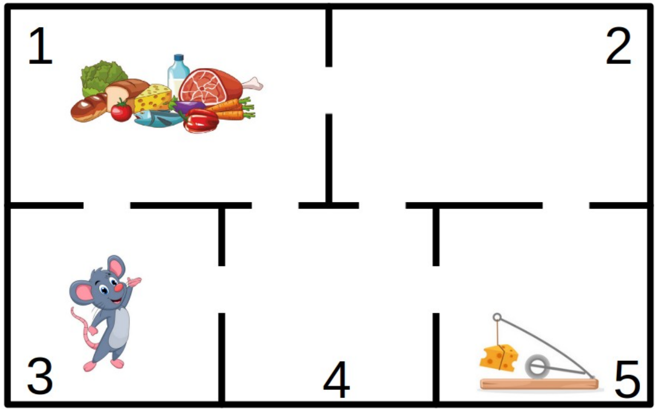
Παρατηρούμε ότι

(α) η επίλυση αυτού του προβλήματος προϋποθέτει ένα είδος συλλογιστικής που θα συμπεριλάβει τις πιθανές εξελίξεις για οποιοδήποτε πλήθος βημάτων.

(β) η προσπάθεια υπολογισμού της ζητούμενης πιθανότητας περιέχει γινόμενα των πιθανοτήτων μετάβασης από σημείο σε σημείο.

Προκύπτει ότι τα ζητούμενα γινόμενα δεν είναι τίποτα άλλο παρά τα στοιχεία ενός πίνακα τον οποίο θα τον ονομάσουμε πίνακα μετάβασης και θα τον μελετήσουμε διεξοδικά.

Πρόβλημα 1 – 2η εκδοχή

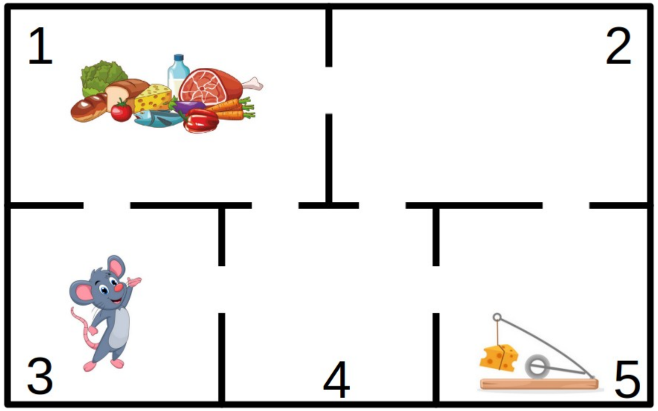


Ένα ποντίκι τοποθετείται στο δωμάτιο 3 και μετακινείται από δωμάτιο σε δωμάτιο τυχαία. Από ένα δωμάτιο, το ποντίκι επιλέγει μια πόρτα σε κάποιο άλλο δωμάτιο με ίσες πιθανότητες.

Αν το ποντίκι φτάσει στο δωμάτιο 1, τότε βρίσκει φαγητό και δεν φεύγει ποτέ από αυτό το δωμάτιο. Αν πάλι φτάσει στο δωμάτιο 5, τότε παγιδεύεται και δεν μπορεί να φύγει από αυτό το δωμάτιο.

Ποια είναι η πιθανότητα το ποντίκι να καταλήξει στο δωμάτιο 5;

Πρόβλημα 1 – 2η εκδοχή

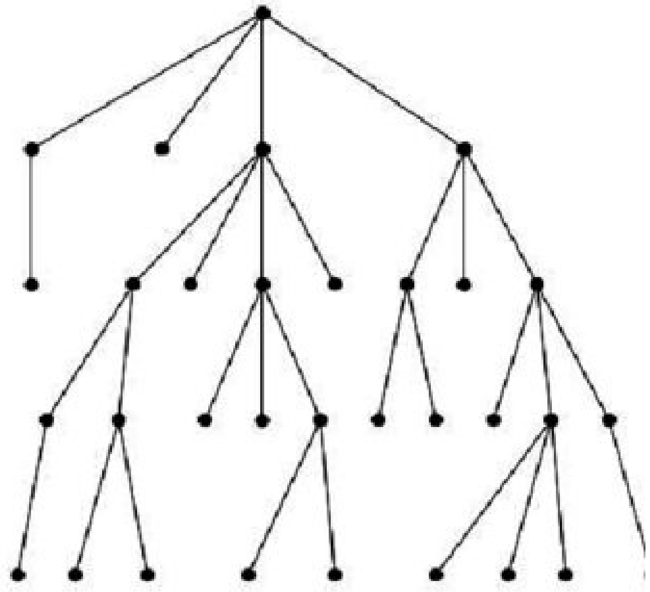


Το Πρόβλημα 2 έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με το Πρόβλημα 1. Απαιτεί μία νέα συλλογιστική που να μπορεί να περιγράψει πλήθος βημάτων έως το άπειρο και κάποιον νέο τρόπο υπολογισμού.

Στη συνέχεια θα δούμε πως τα εργαλεία για την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων είναι ήδη γνωστά και τα έχετε διδαχθεί στη γραμμική άλγεβρα (θεωρία πινάκων) και στις πιθανότητες.

Ειδικότερα, θα δούμε ότι η πραγματοποίηση για το σύνολο των απαραίτητων υπολογισμών είναι εφικτή σε υπολογιστή τόσο με εμπορικά προγράμματα όπως το Matlab όσο και με λογισμικά ανοικτού κώδικα όπως το Octave, η γλώσσα R, ή η γλώσσα Python.

Πρόβλημα 2



Ένας οργανισμός αναπαράγεται και δίνει Y απογόνους με $Y \sim B(4, 0.3)$. Μετά την αναπαραγωγή του πεθαίνει. Κάθε ένας απόγονος ακολουθεί τον ίδιο κανόνα αναπαραγωγής.

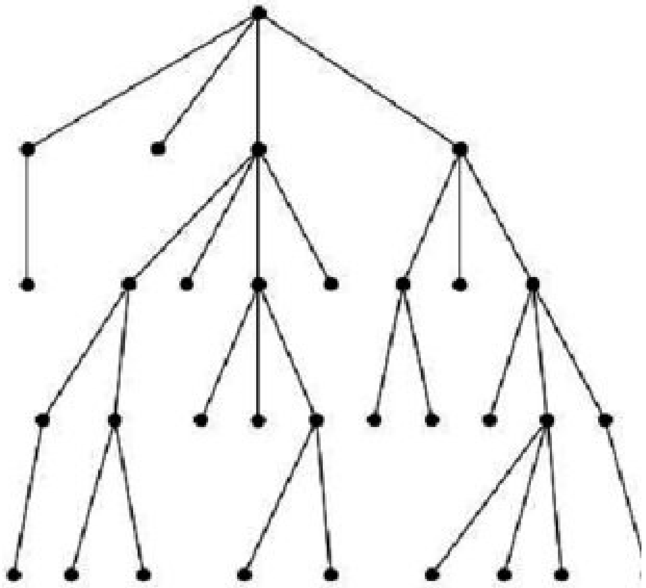
Να βρεθούν

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων στην $9^{η}$ γενιά.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός την $3^{η}$ γενιά.

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

Πρόβλημα 2



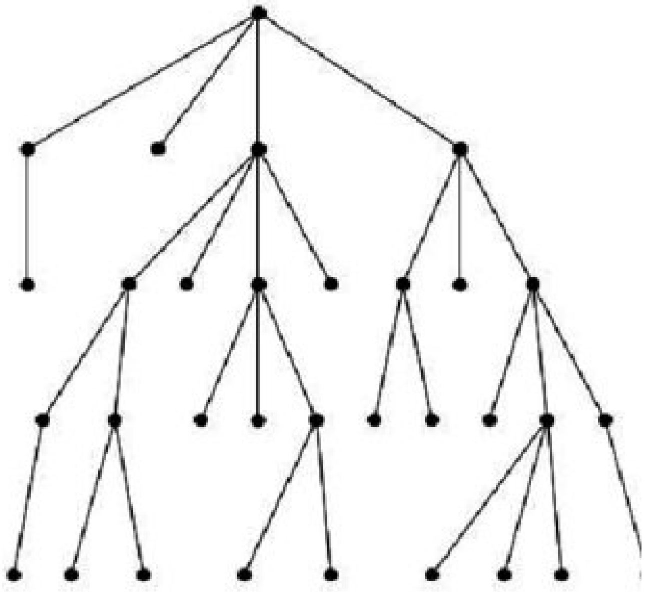
Έστω Z_n οι απόγονοι της γενιάς n. τότε $Z_0 = 1$ και Z_{n-1} είναι ο πληθυσμός της προηγούμενης γενιάς n – 1. Έστω 1, 2, …, Z_{n-1} μία αρίθμηση των ατόμων της n - 1 γενιάς. Κάθε ένα από αυτά τα άτομα ξεκινά μία δική του διαδικασία διακλάδωσης και έστω Y_1, Y_2, …, Y_{zn-1}, οι απόγονοι των ατόμων 1, 2, …, Z_{n-1}αντίστοιχα. Τότε ο πληθυσμός στη γενιά n θα είναι ίσος με το άθροισμα όλων αυτών των απογόνων, δηλαδή

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

Είναι αξιοσημείωτο πως το μέγεθος της n γενιάς είναι ένα **τυχαίου πλήθους Z_{n-1}** άθροισμα, **τυχαίων μεταβλητών Y_i.**

Πρόβλημα 2

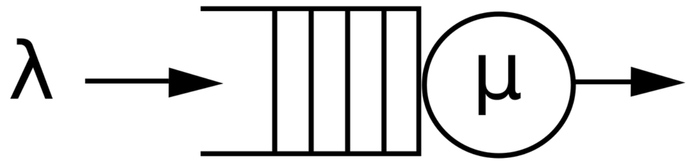
$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$



Για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής Z_n θα αξιοποιήσουμε καλές ιδιότητες της **πιθανογεννήτριας συνάρτησης.**

Με τη βοήθεια αυτής, θα καταλήξουμε σε ορισμένους απλούς τύπους που θα επιλύουν το πρόβλημα.

Πρόβλημα 3



Σε ένα πρατήριο καυσίμων οι αφίξεις των αυτοκινήτων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και γνωρίζουμε ότι ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 1 αυτοκίνητο κάθε 3 λεπτά. Στο ίδιο πρατήριο, το προσωπικό ανεφοδιάζει με καύσιμα 1 αυτοκίνητο κάθε 2 λεπτά.

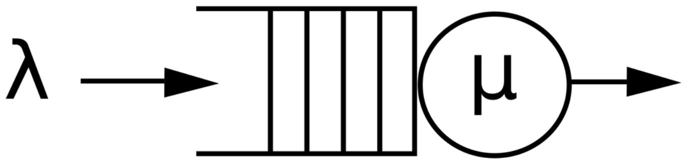
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα αυτοκίνητο στο πρατήριο;

(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος αυτοκινήτων που περιμένουν να ανεφοδιαστούν;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω αυτοκίνητα στην ουρά για να ανεφοδιαστούν;

(δ) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος ρυθμός ανεφοδιασμού των αυτοκινήτων από το προσωπικό ώστε ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής στην ουρά να μην ξεπερνάει τα 20 δευτερόλεπτα;

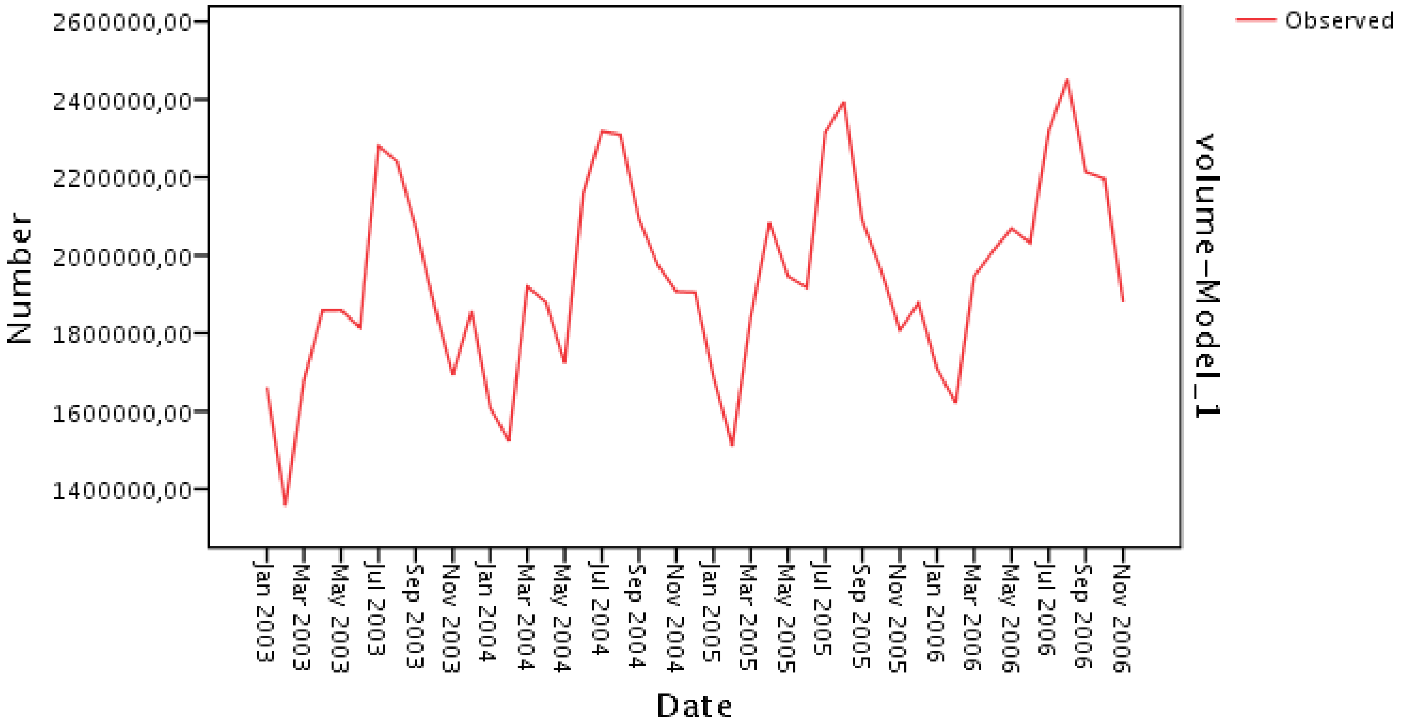
Πρόβλημα 3



Η ανεξαρτησία των αφίξεων υποδεικνύει κατανομή Poisson.

Ξεκινώντας από τη θεωρία της κατανομής Poisson, θα περιγράψουμε τη μέθοδο ανάλυσης του προβλήματος αναμονής και θα δώσουμε απαντήσεις στα ζητούμενα ερωτήματα.

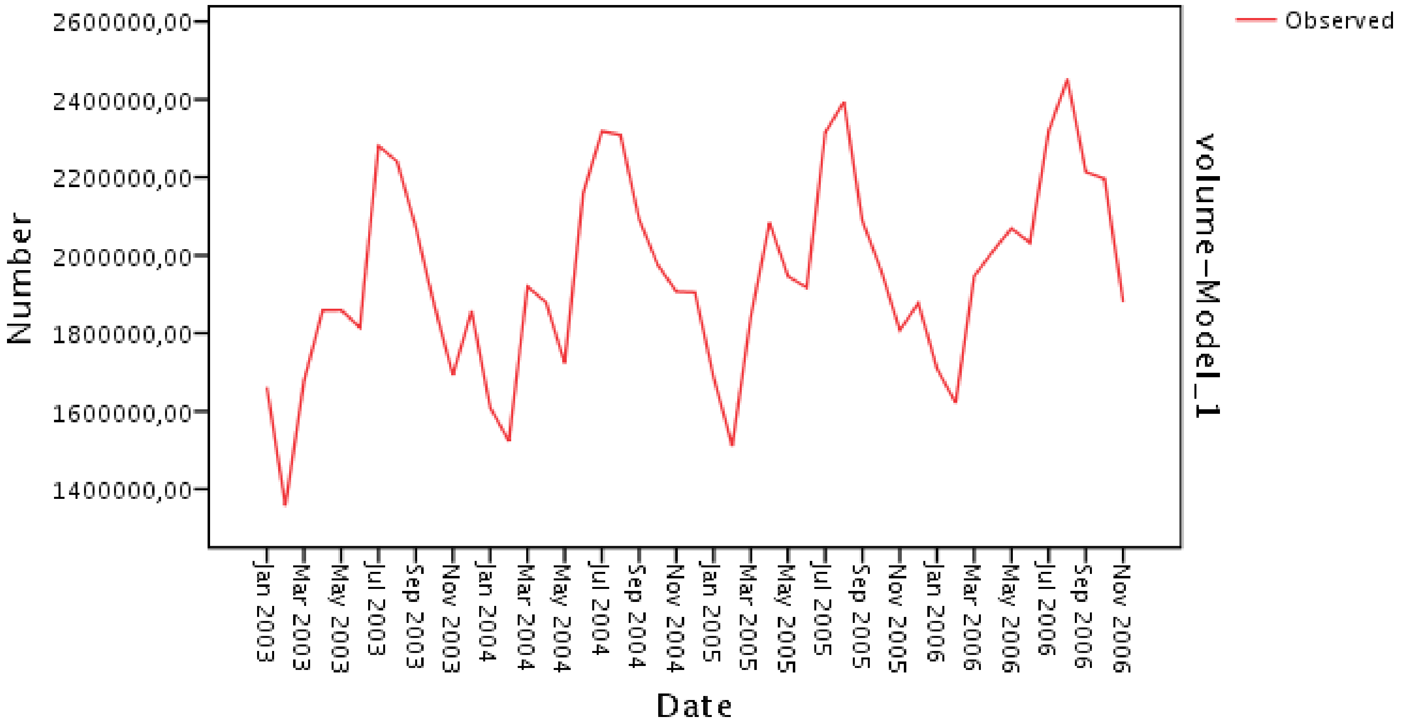
Πρόβλημα 4



Στο διάγραμμα αναπαριστάται η χρονοσειρά με τιμές τον όγκο απορριμμάτων του Δήμου Κατερίνης τα έτη 2003 έως 2006.

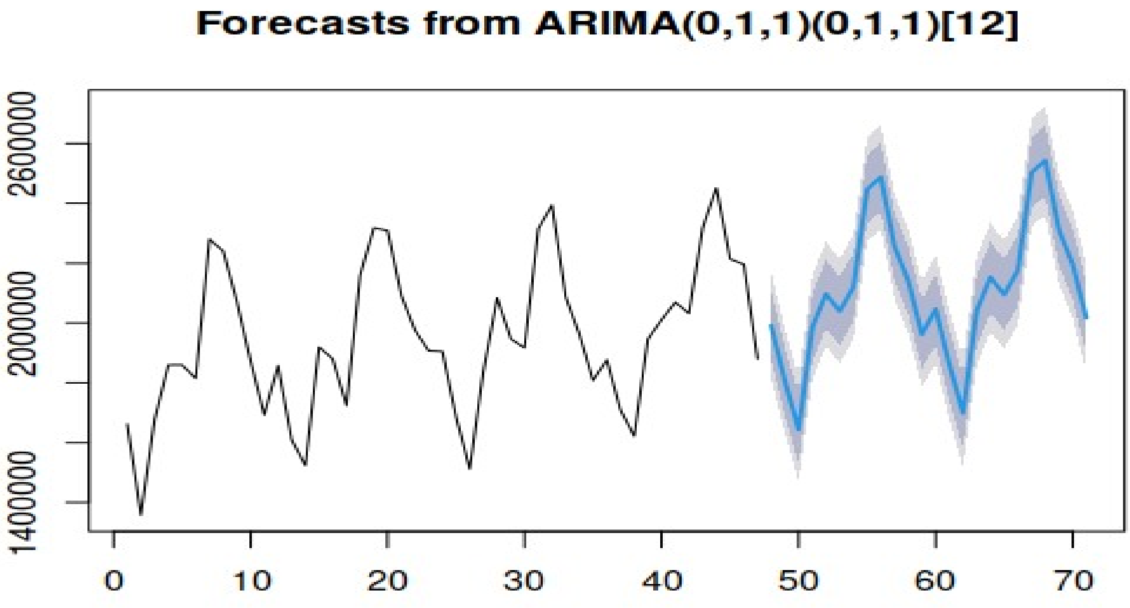
Να βρεθεί μοντέλο πρόβλεψης για τους επόμενους των παρατηρήσεων μήνες.

Πρόβλημα 4



Με αφορμή προβλήματα όπως αυτό θα περιγράψουμε τη θεωρία των χρονοσειρών. Θα ξεκινήσουμε από απλές χρονοσειρές χωρίς περιοδικότητα ή τάση και θα επεκταθούμε έως παραδείγματα όπως αυτό του όγκου απορριμάτων της πόλης της Κατερίνης.

Πρόβλημα 4



Τελικός στόχος θα είναι η δυνατότητα εκτίμησης

(α) της μελλοντικής τιμής της χρονοσειράς

(β) του αναμενόμενου σφάλματος που συνοδεύει την εκτίμηση αυτή.

Διαδικασία Αξιολόγησης

Στη διάρκεια του εξαμήνου θα δοθούν 3 εργασίες για το σπίτι. Η εκφώνηση θα αναρτάται στο eclass και οι λύσεις θα δίνονται κατά τη διάρκεια του μαθήματος μετά από 2 εβδομάδες.

Στο σύνολό τους οι 3 εργασίες θα ενισχύσουν το βαθμό των εξετάσεων με 3 μονάδες.

Στη διάρκεια του εξαμήνου θα καλύψουμε μεγάλο όγκο ύλης. Ωστόσο, δεν θα είναι το σύνολό τους εξετάσιμο στις εξετάσεις του Φεβρουαρίου. Στην τελευταία διάλεξη θα δοθεί η ύλη για τις εξετάσεις.