Στοχαστικές Διεργασίες – Θέματα Εξετάσεων

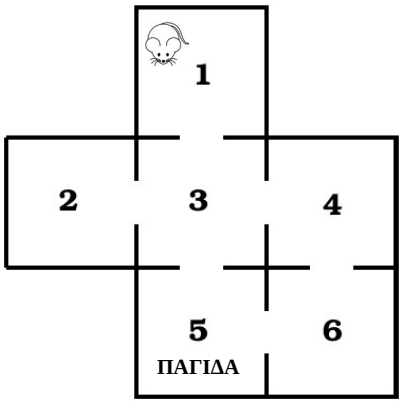
Θέμα 1

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις $S = \{0, 1\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει).

Βαθμολογία: 2,5μ

Θέμα 2

Ένα ποντίκι βρίσκεται στο δωμάτιο 1 του σπιτιού του σχήματος και θα κινηθεί με τυχαίο τρόπο στα υπόλοιπα δωμάτια του σπιτιού. Αν το ποντίκι επισκεφθεί το δωμάτιο 5 τότε θα πέσει στην παγίδα και θα μείνει για πάντα εκεί.



Έστω X_n ο αριθμός του δωματίου που βρίσκεται το ποντίκι μετά από n βήματα ($X_0 = 1$).

(α) Να βρείτε την πιθανότητα το ποντίκι να πέσει στην παγίδα ύστερα από 2 αλλαγές δωματίου.

(β) Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας.

(γ) Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης P της αλυσίδας$\{X_n, n \geq 0\}$.

(δ) Να γράψετε τον πίνακα μετάβασης P στην κανονική του μορφή.

Βαθμολογία: (α) 0,5μ, (β) 0,7μ, (γ) 0,5μ, (δ) 0,8μ.

Θέμα 3

Σε ένα ιατρείο οι αφίξεις των ασθενών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και συμβαίνουν με ρυθμό λ αφίξεις ανά ώρα. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μην αφιχθεί κάποιος ασθενής σε μία ώρα είναι $e^{-2} \approx 0{,}135$.

(α) Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα χρονικά διαστήματα: (12:00, 14:00], (14:00, 14:30] και (14:30, 15:00].

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη μετά τις 12:00 να καθυστερήσει περισσότερο από μισή ώρα.

Βαθμολογία: (α) 0,8μ, (β) 1μ, (γ) (γ) 0,7μ.

Θέμα 4

Σε ένα ιατρείο οι αφίξεις των ασθενών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και συμβαίνουν με ρυθμό 2 ασθενείς ανά ώρα. Ο ιατρός εξετάζει τους ασθενείς με ρυθμό 1 ασθενή κάθε 20 λεπτά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας ασθενής στο ιατρείο;

(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών που περιμένουν να εξεταστούν;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω ασθενείς στην ουρά για να εξεταστούν;

Βαθμολογία: (α) 0,8μ, (β) 0,8μ, (γ) 0,9μ

Τυπολόγιο

Αν X ~ Poisson(λ) τότε $P(X = \kappa) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Αν X ~ Exp(λ) τότε $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$.

Αν X(t) = {ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μίας ουράς M/M/1 τη στιγμή t}, και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, τότε:

$P(X(t) = 0) = g_0 = 1 - \rho$,

$P(X(t) = n) = g_n = \rho^n g_0 = \rho^n (1 - \rho)$,

$P(X(t) \ge n) = \rho^n$

$L_S = \rho / (1 - \rho) = \lambda / (\mu - \lambda)$,

$L_Q = \rho L_S$,

$L_{QQ} = L_Q / \rho^2$

$L_S = L_Q + \lambda/\mu = L_Q + \rho$,

$W_S = L_S / \lambda = 1 / (\mu - \lambda)$,

$W_Q = L_Q / \lambda = \rho L_S / \lambda = L_S / \mu$

P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = e^{-t / W_S}

P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = e^{-t / W_Q}

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και έχουν νόημα μόνο στην περίπτωση της ευστάθειας.

Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων της εξέτασης

Θέμα 1

Είναι $\pi = \pi \cdot P$ ή $[\pi_0, \pi_1] = [1/3\ \pi_0 + 1/4\ \pi_1,\ 2/3\ \pi_0 + 3/4\ \pi_1]$. Επιπλέον, $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

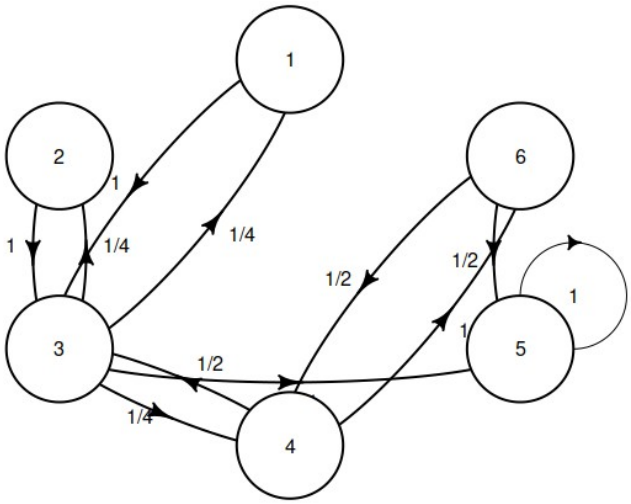
Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $[\pi_0, \pi_1] = [3/11, 8/11]$.

Θέμα 2

(α) Η μοναδική περίπτωση για το ποντίκι να πάει σε 2 βήματα από το δωμάτιο 1 στο δωμάτιο 5 είναι να ακολουθήσει τη διαδρομή 1 → 3 → 5. Υπολογίζουμε

$$P(X_2 = 5 \mid X_0 = 1) = p_{1,3} \cdot p_{3,5} = 1 \cdot 1/4 = ¼ = 0.25 = 25\%.$$

(β) Ενδεικτικό διάγραμμα καταστάσεων:



(γ) Πίνακας μετάβασης $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(δ) Αναδιάταξη καταστάσεων από {1, 2, 3, 4, 5, 6} σε {1, 2, 3, 4, 6, 5}:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θέμα 3

Η προσέλευση των ασθενών στο ιατρείο περιγράφεται από μία διεργασία Poisson με ρυθμό λ.
Αν N(t) = {πλήθος ασθενών στο διάστημα (0, t]}, τότε N(t) ~ Poisson(λt).

(α) N(1) ~ Poisson(λ) και P(N(1) = 0) = $e^{-\lambda}$ ή $e^{-2} = e^{-\lambda}$ ή λ = 2.

(β) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, το πλήθος των αφίξεων στα διαστήματα (12:00, 14:00], (14:00, 14:30] και (14:30, 15:00]. Το χρονικό διάστημα (12:00, 14:00] καλύπτει δύο ώρες άρα

$$Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda t) = \text{Poisson}(4).$$

Ανάλογα, βρίσκουμε Y_2 ~ Poisson(1), Y_3 ~ Poisson(1). Επιπλέον, τα διαστήματα δεν είναι επικαλυπτόμενα, άρα οι Y_1, Y_2, Y_3, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίζουμε:

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1) = P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1) \cdot P(Y_3 = 1) = 4 \cdot e^{-4} \cdot (e^{-1})^2 \approx 0{,}01 = 1\%.$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός, τότε X_1 ~ Exp(λ) = Exp(2). Είναι:

$$P(X_1 > 0{,}5) = e^{-1} = 0{,}368 = 36{,}8\%$$

Θέμα 4

Ο ιατρός φροντίζει τους ασθενείς με ρυθμό 1 ασθενή κάθε 20 λεπτά, άρα μ = 3 ασθενείς / ώρα.

Είναι ρ = λ / μ = 1 / 3.

(α) P(X(t) = 0) = g_0 = 1 – ρ = 2/3 = 0,667 = 66,7%.

(β) $L_Q = \rho^2 / (1 - \rho)$ = 1/9 / (1 – 1/3) = 1 / 6 = 0,167 ασθενείς.

(γ) $P(X(t) \geq 3) = \rho^3 = (1/3)^3$ = 1 / 27 = 0,037 = 3,7%.

Παρατηρήσεις

Θέμα 2

Κώδικας R που παράγει το διάγραμμα καταστάσεων

```
library('heemod')
library('diagram')
states <- c("1", "2", "3", "4", "5", "6")
mat_dim <- define_transition(
  state_names = states,
  0, 0, 1, 0, 0, 0,
  0, 0, 1, 0, 0, 0,
  1/4, 1/4, 0, 1/4, 1/4, 0,
  0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2,
  0, 0, 0, 0, 1, 0,
  0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0);
curves <- matrix(nrow = 6, ncol = 6)
plot(mat_dim)
```