

Στοχαστικές Διεργασίες

Τμήμα ΗΜ/ΜΥ Δ.Π.Θ.

Πρόχειρες Σημειώσεις

Μέρος 0: Εισαγωγικές Έννοιες

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
epdiaman@ee.duth.gr

Έκδοση: 8 Οκτωβρίου 2025

Πίνακας περιεχομένων

1. Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.....	3
2. Στοιχεία Πιθανοτήτων για δύο τυχαίες μεταβλητές.....	3
3. Ισόνομες τ.μ. $\Rightarrow$ Ανεξάρτητες τ.μ.....	7
4. Συναρτήσεις ανεξαρτήτων τ.μ. $\Rightarrow$ Ανεξάρτητες τ.μ.....	8
5. Συνδιακύμανση Τυχαίων Μεταβλητών.....	9
6. Συντελεστής Συσχέτισης Pearson.....	10
7. Κανονική κατανομή.....	10
8. Διμεταβλητή κανονική κατανομή.....	13
8.1. Πολυμεταβλητή κανονική κατανομή.....	14

1. Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y , λέγονται **ισόνομες** όταν $F_X = F_Y$, δηλαδή

$$F_X(k) = F_Y(k) \text{ ή } P(X \leq k) = P(Y \leq k), k \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση όπου οι X, Y είναι διακριτές η ισονομία είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$P(X = k) = P(Y = k), k \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση

Δύο ισόνομες τ.μ. δεν είναι απαραίτητα ίσες.

2. Στοιχεία Πιθανοτήτων για δύο τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός (κοινή σ.μ.π.) - διακριτή περίπτωση

Έστω δύο **διακριτές** τυχαίες μεταβλητές X, Y . Η **κοινή συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας** (joint probability mass function ή joint **pmf**) των X, Y είναι η συνάρτηση $f_{X,Y}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης (μάζας) πιθανότητας

- 1) $0 \leq f_{X,Y}(x, y) \leq 1$
- 2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$ (διακριτή περίπτωση)

Ορισμός (κοινή σ.π.π.) - συνεχής περίπτωση

Έστω δύο **συνεχείς** τυχαίες μεταβλητές X, Y . Η **κοινή συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας** (joint density) των X, Y είναι η τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f_{X,Y}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης (πυκνότητας) πιθανότητας

- $0 \leq f_{X,Y}(x, y) \leq 1$
- $\int \int f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$
- Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι

$$P((X, Y) \in A) = \int \int f_{X,Y}(x, y) dx dy. \text{ π.χ. } P(X \leq \alpha, Y \leq \beta) = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι δυνατόν να ανακτηθεί η **περιθώρια (marginal) συνάρτηση πιθανότητας** των δύο επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y), \quad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) \quad (\text{διακριτή περίπτωση})$$

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y) dx \quad (\text{συνεχής περίπτωση})$$

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας, είναι δυνατόν να οριστεί και η **δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (ή πυκνότητας πιθανότητας) της X δοθέντος του $Y = y$, ως εξής:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y)$$

Σημείωση: $f_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y) = P(X = x, Y = y) / P(Y = y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y)$

Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε ισχύει

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

Πράγματι: $f_{X|Y}(x|y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) / f_Y(y) = f_X(x)$

Ορισμός (κοινή συνάρτηση κατανομής)

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y , με κατανομές F_X, F_Y . Η κοινή συνάρτηση κατανομής (joint cumulative distribution function ή joint cdf) των X, Y είναι η συνάρτηση $F_{X,Y}: R \times R \rightarrow [0, 1]$ που ορίζεται ως εξής: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Ορισμός (κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας)

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y , με συναρτήσεις μάζας πιθανότητας f_X, f_Y . Η κοινή συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας (joint probability mass function ή joint pmf ή joint density) των X, Y είναι η συνάρτηση $f_{X,Y}: R \times R \rightarrow [0, 1]$, που ορίζεται ως εξής:

- Αν οι X, Y είναι διακριτές, τότε

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

- Αν οι X, Y είναι συνεχείς, τότε

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης πιθανότητας

Η κ.σ.π. ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

$$1) 0 \leq f_{X,Y}(x, y) \leq 1$$

$$2) \sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1 \quad (\text{διακριτές TM}) \quad \text{ή} \quad \int_R \int_R f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1 \quad (\text{συνεχείς TM}).$$

Ορισμός

Δύο τ. μ. λέγονται (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \text{ή} \quad F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε ισχύει

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση εμπέδωσης

Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες $U(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$.

Άσκηση εμπέδωσης

Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$ για τις τυχαίες μεταβλητές του πίνακα.

$P(X = x, Y = y)$		Y			
		0	1	2	3
X	0	1/8	1/8	0	0
	1	0	2/8	2/8	0
	2	0	0	1/8	1/8

Ορισμός (Περιθώρια και δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας)

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι δυνατόν να ανακτηθεί η **περιθώρια (marginal) συνάρτηση πιθανότητας** των δύο επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

- $f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$, $f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y)$ (διακριτή περίπτωση)

- $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$ (συνεχής περίπτωση)

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας, είναι δυνατόν να οριστεί και η **δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (ή πυκνότητας πιθανότητας) της X δοθέντος του $Y = y$, ως εξής:

$$f_{X|Y}(x | y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y)$$

Παρατήρηση

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y , μπορεί να είναι ισόνομες αλλά όχι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα

Σε ένα σάκο υπάρχουν 2 μπάλες, μία με τον αριθμό 0 και μία με τον αριθμό 1. Εκτελούμε πείραμα με δύο επιλογές μπάλας και ορίζουμε να είναι

X : Ο αριθμός της μπάλας στην 1^η επιλογή και

Y : Ο αριθμός της μπάλας στη 2^η επιλογή.

Αν η δειγματοληψία γίνει με επανάθεση τότε $\{XY\} = \Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ και υπολογίζουμε $P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 2/4 = 0,5$.

Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και ανεξάρτητες.

Αν ωστόσο η δειγματοληψία γίνει χωρίς επανάθεση, τότε $\{XY\} = \Omega = \{01, 10\}$ και υπολογίζουμε $P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2 = 0,5$.

Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και εξαρτημένες.

Άσκηση (Ανεξάρτητες και Ισόνομες Τυχαίες Μεταβλητές)

Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές:

Μεταβλητή: $X_n = \{\text{o αριθμός που δείχνει το ζάρι στη } n - \text{oστή ρίψη}\}$

Μεταβλητή: $Z_n = \{\text{το άθροισμα των αριθμών έως και τη } n - \text{oστή ρίψη}\}$

α) Πως εκφράζεται η Z_n συναρτήσει των X_n ;

β) Είναι οι μεταβλητές X_n , $n \in \mathbb{N}$, ανεξάρτητες και ισόνομες;

γ) Είναι οι μεταβλητές Z_n , $n \in \mathbb{N}$, ανεξάρτητες και ισόνομες;

Άσκηση (Διαφορά Τυχαίων Μεταβλητών)

Έστω οι ΤΜ X και Y , που αντιπροσωπεύουν τον αριθμό K και Γ που παίρνουμε όταν ρίχνουμε δύο νομίσματα. Ορίζουμε τη διαφορά των X, Y ως μια νέα ΤΜ Z , ως: $Z = X - Y$.

(α) Βρείτε την κατανομή των X, Y, Z .

(β) Είναι οι X, Y ισόνομες;

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(δ) Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές και τις διακυμάνσεις των X, Y, Z .

(ε) Βρείτε την πιθανότητα να έρθουν περισσότερα K από Γ .

(στ) Βρείτε την μέση διαφορά K και Γ .

Παράδειγμα (συνεχείς μεταβλητές)

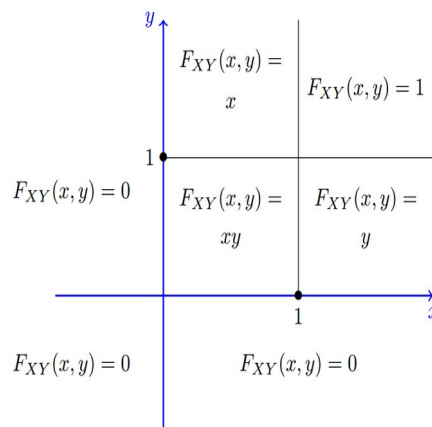
Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες $U(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η $F_{X,Y}$.

Λύση

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες άρα $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

$$\text{Είναι } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y < 0 \\ y, & \text{αν } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{αν } y > 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } y < 0 \\ xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ x, & y > 1, 0 \leq x \leq 1 \\ y, & x > 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & x > 1, y > 1 \end{cases}$$



Άσκηση (διακριτές μεταβλητές).

Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση κατανομής $F_X, Y(x, y)$ που περιγράφεται στον πίνακα που ακολουθεί:

X / Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	0
2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Ισόνομες τ.μ. $\nRightarrow$ Ανεξάρτητες τ.μ.

Παρατήρηση

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y , μπορεί να είναι *ισόνομες* αλλά όχι *ανεξάρτητες*.

Παράδειγμα

Σε ένα σάκο υπάρχουν 2 μπάλες, μία με τον αριθμό 0 και μία με τον αριθμό 1. Εκτελούμε πείραμα με δύο επιλογές μπάλας και ορίζουμε να είναι

X : Ο αριθμός της μπάλας στην 1^η επιλογή και

Y : Ο αριθμός της μπάλας στη 2^η επιλογή.

Αν η δειγματοληψία γίνει **με επανάθεση** τότε $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ και υπολογίζουμε

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 2/4 = 0,5.$$

Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι **ισόνομες και ανεξάρτητες**.

Αν ωστόσο η δειγματοληψία γίνει **χωρίς επανάθεση**, τότε $\Omega = \{01, 10\}$ και υπολογίζουμε

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2 = 0,5.$$

Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι **ισόνομες και εξαρτημένες**.

Δραστηριότητα:

Περιγράψτε ένα πείραμα στο οποίο θα ορίζονται δύο μεταβλητές X, Y , *ανεξάρτητες* αλλά όχι *ισόνομες*.

4. Συναρτήσεις ανεξαρτήτων τ.μ. $\Rightarrow$ Ανεξάρτητες τ.μ.

Δραστηριότητα 1

Έστω X τ.μ. με $f_X(x) = \frac{1}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$ και $f_X(x) = 0$, αλλού. Αν $Y = X^2$, να βρεθεί η f_Y .

Δραστηριότητα 2

Έστω X τ.μ. με σ.π.π. f_X . Αν $Y = \alpha X + \beta$, να βρεθεί η f_Y .

Δραστηριότητα 3

Έστω X τ.μ. με σ.π.π. f_X . Αν $Y = F_X(x)$, να βρεθεί η F_Y .

Δραστηριότητα 4

Έστω X, Y συνεχείς ανεξάρτητες τ.μ. με σ.π.π. f_X, f_Y . Αν $Z = X + Y$, ναδειχθεί ότι

$$F_Z(z) = E_Y(F_X(z - Y)) = E_X(F_Y(z - X))$$

Απόδειξη: <https://statproofbook.github.io/P/cdf-sumind.html>

Θεώρημα

Αποδεικνύεται ότι, αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και g, h συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_m)$ και $Z = h(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ είναι ομοίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:

Guilherme Salome (<https://stats.stackexchange.com/users/25824/guilherme-salome>), Functions of Independent Random Variables, URL (version: 2023-10-17): <https://stats.stackexchange.com/q/173279>

Πόρισμα

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και $1 \leq m \leq n - 1$, τότε τα αθροίσματα

$$Y = \sum_{i=1, \dots, m} X_i \quad \text{και} \quad Z = \sum_{i=m+1, \dots, n} X_i,$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

5. Συνδιακύμανση Τυχαίων Μεταβλητών

Η συνδιακύμανση (covariance) είναι μία στατιστική ποσότητα με την οποία ποσοτικοποιείται το είδος της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών, δηλαδή το είδος της μεταβολής στις τιμές μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής καθώς μία άλλη μεταβάλλεται.

Ο υπολογισμός της έχει νόημα για ζεύγη μεταβλητών που ορίζονται στο ίδιο πείραμα, άρα οι τιμές τους προσδιορίζονται μαζί με την εξέλιξη του πειράματος.

Ορισμός

Αν X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές τότε η **συνδιακύμανση** ορίζεται ως

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Παράδειγμα

Από ένα πείραμα ορίστηκαν δύο τυχαίες μεταβλητές, X, Y με τιμές $X = 1, 2, 3$ και $Y = 1, 2$. Η κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας παρουσιάζεται στον πίνακα. Να βρεθεί η συνδιακύμανση των X, Y .

Λύση

Υπολογίζουμε,

$$E(X) = \sum_x x \cdot f_X(x) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 2,$$

$$E(Y) = \sum_y y \cdot f_Y(y) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) = 1 \cdot 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0,3 = \\ &= 0,25 + 0,1 + 0,4 + 0,8 + 0 + 1,8 = 3,35 \end{aligned}$$

$$\text{Υπολογίζουμε } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3,35 - 3,2 = 0,15.$$

$f_{X,Y}(x, y)$		$f_X(x)$			Σύνολο
		1	2	3	
$f_Y(y)$	1	0,25	0,2	0	0,4
	2	0,05	0,2	0,3	0,6
Σύνολο		0,3	0,4	0,3	1

6. Συντελεστής Συσχέτισης Pearson

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson είναι το κατάλληλο στατιστικό για την ανίχνευση της γραμμικής σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών, για συνεχείς ή αριθμητικές διακριτές μεταβλητές

$$\rho_{X,Y} = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Ισοδύναμα:

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}$$

Αν δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε $\text{cov}(X, Y) = 0$ και $\rho_{X,Y} = 0$ επίσης. Το αντίθετο δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί δύο μεταβλητές να είναι γραμμικά ασυσχέτιστες ($\rho_{X,Y} = 0$) και να είναι εξαρτημένες.

Παράδειγμα

Έστω, $X = -1, 0, 1$ με $f_X(-1) = f_X(0) = f_X(1) = 1/3$ και $Y = 1$, αν $X = 0$ και $Y = 0$, αν $X = -1, 1$. Τότε προφανώς οι X, Y είναι εξαρτημένες αλλά $\rho_{X,Y} = 0$ (γιατί;)

7. Κανονική κατανομή

Λήμμα

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και θετική, που ικανοποιεί την συνθήκη

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = e^{kx}$.

Απόδειξη

1^ο βήμα: Για $y = 0$, $f(x) = f(x)f(0)$, ή $f(0) = 1$ (αφού f θετική).

2^ο βήμα: $f(2) = f(1+1) = f(1)^2$, $f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) = f(1)^3$

Γενικά: $f(n) = f(1)^n$ (επαγωγή)

3^ο βήμα: $f(n-n) = f(n)f(-n) \leftrightarrow 1 = f(n)f(-n) \leftrightarrow f(-n) = 1/f(n) = f(1)^{-n}$

4^ο βήμα: $f(1) = f(1/q + \dots + 1/q) = f(1/q)^q \leftrightarrow f(1/q) = f(1)^{1/q}$

5^ο βήμα: $f(p/q) = f(1/q + \dots + 1/q) = f(1/q)^p = f(1)^{p/q}$

6^ο βήμα: Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$ + συνέχεια της $f \rightarrow$ επέκταση στο $\mathbb{R}$.

7^ο βήμα: Συμπεραίνουμε $f(x) = f(1)^x = e^{x \ln f(1)} = e^{kx}$, για $k = \ln f(1)$

Πόρισμα

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και θετική, που ικανοποιεί την συνθήκη

$$\lambda f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = \lambda e^{kx}$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x)/\lambda$ ή $f(x) = \lambda\varphi(x)$.

$$\lambda f(x+y) = f(x)f(y) \leftrightarrow \lambda[\lambda\varphi(x+y)] = [\lambda\varphi(x)][\lambda\varphi(y)]$$

$$\leftrightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$\leftrightarrow \varphi(x) = e^{kx}$$

$$\leftrightarrow f(x) = \lambda e^{kx}.$$

Θεώρημα

Έστω X, Y i.i.d. συνεχείς τ.μ. με σ.π.π. $f_X = f_Y = f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Αν ισχύει:

- η κοινή σ.π.π. $f_{X,Y}$ είναι κυκλικά συμμετρική συνάρτηση γύρω από τη μέση τιμή μ (η τιμή $f(x, y)$ εξαρτάται μόνο από την ευκλείδεια απόσταση του (x, y) από την αρχή).

- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- f συμμετρική ως προς τη μέση τιμή μ , $f(\mu - x) = f(\mu + x)$.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

$$\text{Τότε, } f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας θεωρούμε $\mu = 0$.

$$\text{Είναι } X, Y \text{ ανεξάρτητες άρα } f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = f(x)f(y) \quad (1)$$

$$\text{Επιπλέον, } f_{X,Y} \text{ κυκλικά συμμετρική γύρω από τη μέση τιμή: } f_{X,Y}(x, y) = g(x^2 + y^2) \quad (2)$$

$$\text{Σημείωση: Αν } \mu \neq 0, \text{ θα είναι } f_{X,Y}(x, y) = g((x - \mu)^2 + (y - \mu)^2)$$

$$\text{Από (1) και (2) } f(x)f(y) = g(x^2 + y^2) \quad (3)$$

$$\text{Για } y = 0, \text{ η (3) } \rightarrow f(x) = \lambda g(x^2).$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ η (3) } \rightarrow f(y) = \lambda g(y^2). \quad (\lambda = g(0)^{0.5}).$$

Η (3) γράφεται $g(x^2)g(y^2) = 1/\lambda^2 g(x^2 + y^2)$ από όπου συμπεραίνουμε (Πόρισμα Λήμματος) ότι $g(x^2) = 1/\lambda^2 \exp(-k x^2)$ και

$$f(x) = \lambda g(x^2) = \frac{1}{\lambda} e^{-kx^2}. \text{ Βρήκαμε } f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-kx^2}.$$

Η f είναι συνάρτηση κατανομής, άρα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{k}} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Τώρα είναι

$$f(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2}.$$

Όμως, η f είναι συνάρτηση κατανομής, άρα

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και βρίσκουμε $\sigma^2 = 1/(2k)$ ή $k = 1/(2\sigma^2)$.

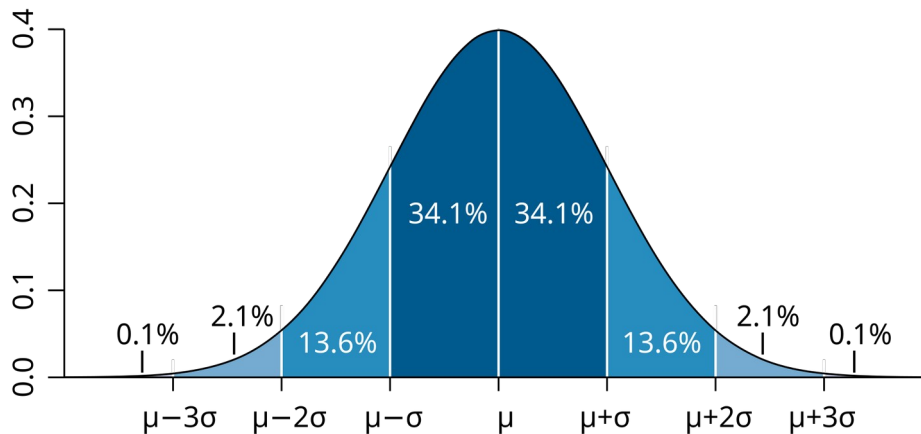
Αντικαθιστούμε:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Ορισμός

Έστω X συνεχής τ.μ. Λέμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή όταν

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



Σημείωση

Σχετικά με την προέλευση του τύπου, πολλές χρήσιμες πληροφορίες είναι διαθέσιμες εδώ:

<https://math.stackexchange.com/questions/384893/how-was-the-normal-distribution-derived>

<https://web.archive.org/web/20171118080241/http://courses.ncssm.edu:80/math/Talks/PDFS/normal.pdf>

8. Διμεταβλητή κανονική κατανομή

Ορισμός

Έστω X, Y δύο συνεχείς τ.μ. Λέμε ότι οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή όταν η μεταβλητή $aX + bY$ είναι κανονική για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή, τότε φανερά:

- η X έχει κανονική κατανομή.
- η Y έχει κανονική κατανομή.

Άσκηση

Έστω $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(0, 4)$, ανεξάρτητες τ.μ. με διμεταβλητή κανονική κατανομή.

Να βρεθεί η $P(2X + Y < 3)$

Έστω X, Y δύο συνεχείς τ.μ, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, και $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_{yy}^2 \end{pmatrix}$ ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων.

Αποδεικνύεται ότι οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή όταν

$$f_{X,Y}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \mu)\right)$$

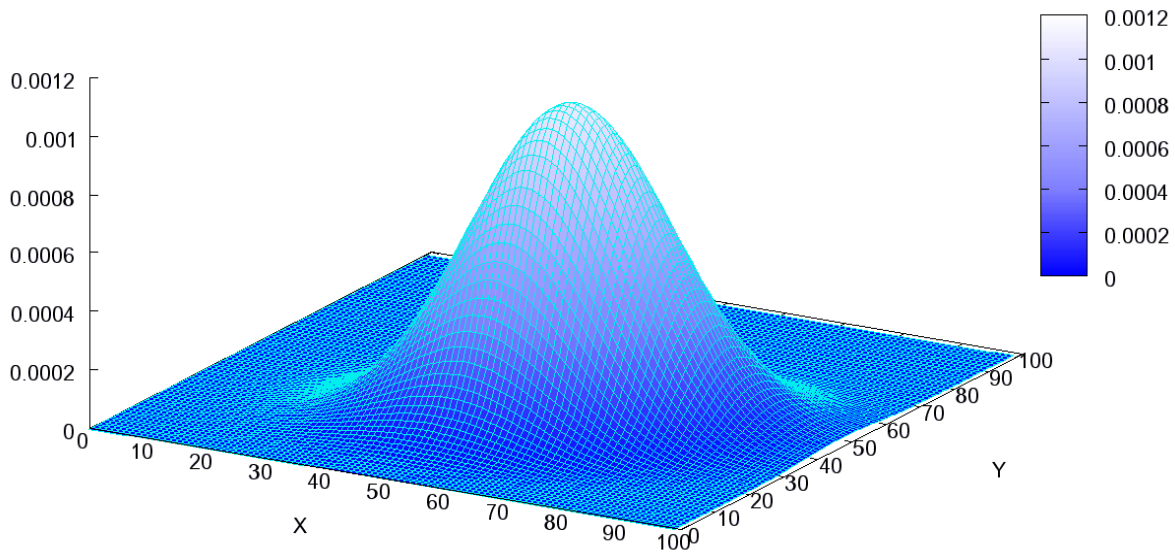
ή

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho_{xy}^2)} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

Γράφουμε $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$

Σημείωση

Μία εξαιρετική περιγραφή της απόστασης Mahalanobis που χρησιμοποιείται στη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή είναι διαθέσιμη εδώ: <https://stats.stackexchange.com/a/62147/27608>



8.1. Πολυμεταβλητή κανονική κατανομή

Ορισμός

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ συνεχείς τ.μ. και Σ ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων.

Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ έχουν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή όταν

$$f_{X,Y}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \mu)\right)$$

Οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός τους ακολουθεί κανονική κατανομή.

Απόδειξη: <https://math.stackexchange.com/a/2994943/664787>

Αν X, Y ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή τότε ισχύει:

$$\rho(X, Y) = 0 \text{ (ασυσχέτιστες)} \rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

Πράγματι, αν $\rho(X, Y) = 0$, τότε ο πίνακας Σ είναι διαγώνιος και $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Περισσότερα εδώ: <https://math.stackexchange.com/a/803370/664787>

Αντίστροφα, αν οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ ακολουθούν μονομεταβλητή κανονική κατανομή τότε ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή μόνο όταν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.