Στοχαστικές Διεργασίες

Τμήμα ΗΜ/ΜΥ Δ.Π.Θ.

Πρόχειρες Σημειώσεις

Μέρος ΙΙ: Διαδικασίες Διακλάδωσης

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
epdiaman@ee.duth.gr

Έκδοση: 14 Νοεμβρίου 2024

Πίνακας περιεχομένων

1. Προκαταρκτικά

1.1. Γεωμετρική κατανομή

Έστω **p η πιθανότητα επιτυχίας** σε μία δοκιμή ενός πειράματος. Ως "**γεωμετρική κατανομή**" περιγράφονται οι εξής δύο διακριτές κατανομές πιθανοτήτων:

Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους X ϵ N* των δοκιμών Bernoulli(p) που απαιτούνται για να επιτευχθεί μία επιτυχία. Η πιθανότητα ότι η n – οστή δοκιμή είναι η πρώτη επιτυχία είναι

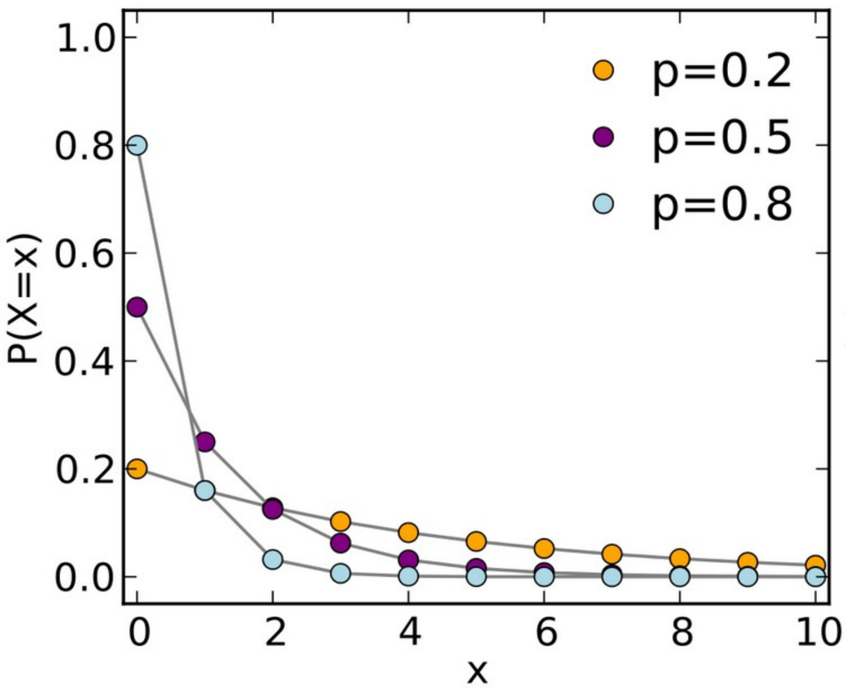
$$\mathbf{P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p}, \ (E(X) = 1/p,\ Var(X) = (1 - p)/p^2)$$

Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους Y = X − 1 (ϵ N) αποτυχιών πριν από την πρώτη επιτυχία. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$\mathbf{P(Y = n) = (1 - p)^{n} \cdot p}, \ (E(Y) = (1 - p)/p,\ Var(Y) = (1 - p)/p^2)$$

Και στις δύο περιπτώσεις γράφουμε **X ~ Geometric(p)** ή **Y ~ Geometric(p)** αντίστοιχα και θα διευκρινίζεται από το πλαίσιο αναφοράς το ακριβές είδος της κατανομής.

Σημείωση
Η προέλευση της ονομασίας είναι φανερή, καθώς και στις δύο περιπτώσεις η ακολουθία των πιθανοτήτων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.



Διάγραμμα 1: Συνάρτηση πιθανότητας μίας τ.μ. X ~ Geometric(p), για p = 0,2, 0,5, 0,8, όπου το X εκφράζει το πλήθος αποτυχιών πριν από την πρώτη επιτυχία για x = 0, 1, .., ,10 αποτυχίες (p: πιθανότητα επιτυχίας) $P(X = n) =(1 - p)^n \cdot p$

1.2. Αναμενόμενη Τιμή Γινομένου ΤΜ

Θεώρημα

Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. τότε

(α) E(X · Y) = E(X) · E(Y).

(β) E(X | Y = y) = E(X)

Απόδειξη

(α) Αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)xydxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(y)xydxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)xdx \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)ydy \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= \sum_{x,y} xy\Pr(X=x, Y=y) \\ &= \sum_x \sum_y xy\Pr(X=x, Y=y) \\ &= \sum_x \sum_y xy\Pr(X=x)\Pr(Y=y) \\ &= \sum_x x\Pr(X=x) \sum_y y\Pr(Y=y) \\ &= \sum_x x\Pr(X=x)\,\mathbf{E}[Y] \\ &= \mathbf{E}[Y] \sum_x x\Pr(X=x) \\ &= \mathbf{E}[Y]\,\mathbf{E}[X] \end{aligned}$$

(β) Υπενθυμίζεται ότι $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ και πως αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$.

- Για διακριτές τ.μ.: $E(X \mid Y = y) = \Sigma_x\, x\, P(X = x \mid Y = y) = \Sigma_x\, xP(X = x) = E(X)$.
- Για συνεχείς τ.μ.: $E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = E(X)$.

Σημείωση

Η αντίστοιχη ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής για το άθροισμα τ.μ. ισχύει χωρίς κάποια προϋπόθεση για τις τ.μ. X, Y. Δηλαδή για κάθε τ.μ. X, Y ισχύει E(X + Y) = E(X) + E(Y).

1.3. Γραφική αναπαράσταση κοινής πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών

Ένα διάγραμμα θερμότητας (heatmap) ή ένα 3D διάγραμμα διασποράς, είναι κατάλληλο για την αναπαράσταση της κοινής συνάρτησης πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών. Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι δύο αυτές περιπτώσεις μαζί με τον αντίστοιχο κώδικα R που τις δημιουργεί.

a) Δύο συνεχείς τ.μ.

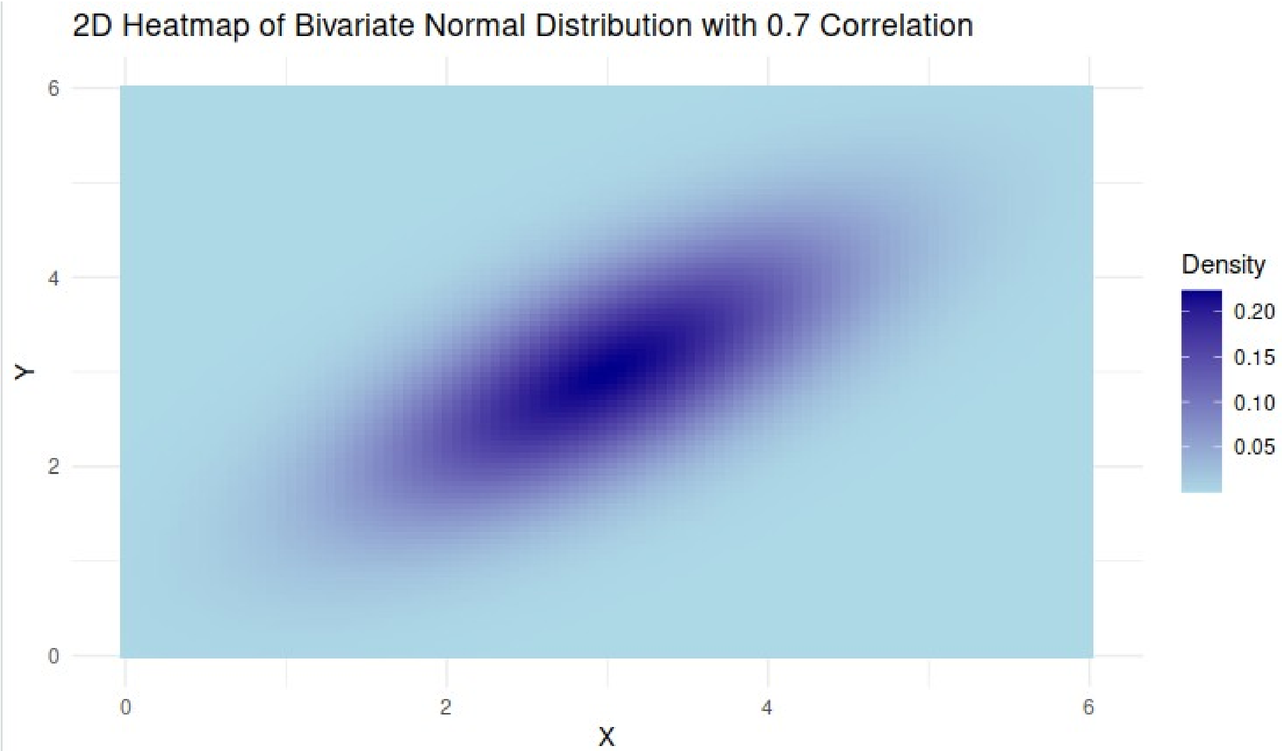
Αν (X, Y) ~ N(μ, Σ), όπου μ = (3, 3) και $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$, τότε η κοινή συνάρτηση πυκνότητας είναι η

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right]$$

ή

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.222\exp\left(-0.98\left[(x-3)^2 - 1.4(x-3)(y-3) + (y-3)^2\right]\right)$$

Η $f_{X,Y}$ αναπαριστάται στο παρακάτω διάγραμμα:

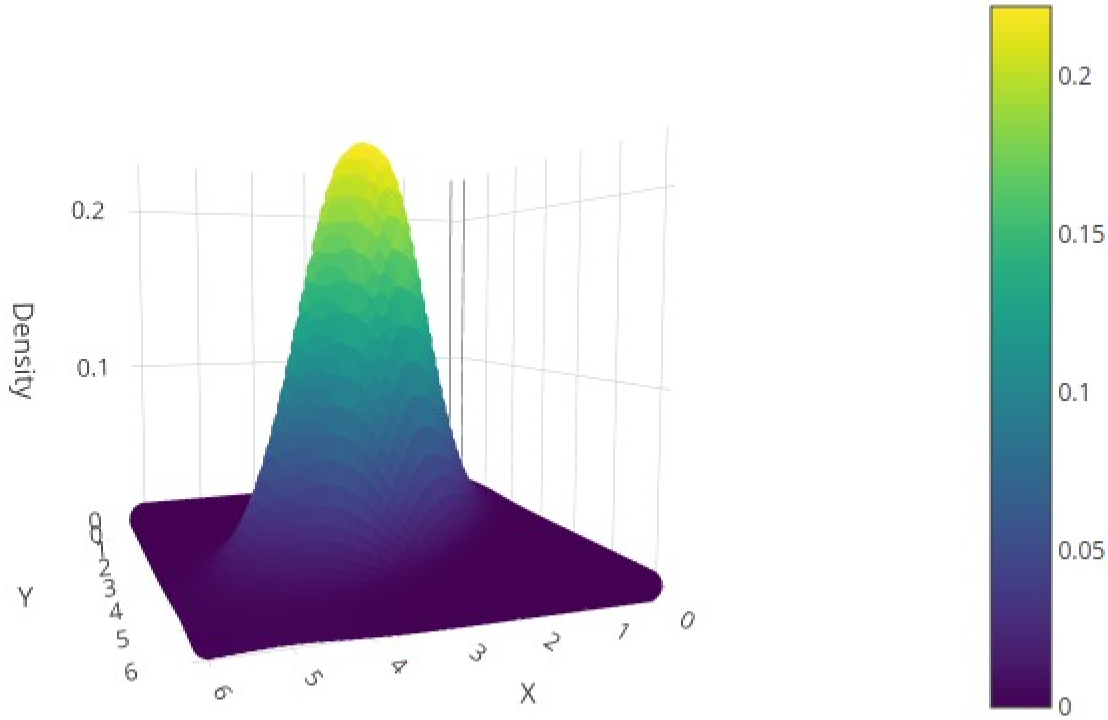


Διάγραμμα 2: Διάγραμμα θερμότητας (heatmap) κοινής πιθανότητας δύο συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Κώδικας R για το 2D Heatmap

```
mu <- c(3, 3)
sigma <- matrix(c(1, 0.7, 0.7, 1), nrow = 2)
x <- seq(0, 6, length.out = 100)
y <- seq(0, 6, length.out = 100)
grid <- expand.grid(X = x, Y = y)
grid_matrix <- as.matrix(grid)
grid$Z <- dmvn(grid_matrix, mu = mu, sigma = sigma)
ggplot(grid, aes(x = X, y = Y, fill = Z)) +
  geom_tile() +
  scale_fill_gradient(low = "lightblue", high = "darkblue", name = "Density") +
  labs(title = "2D Heatmap of Bivariate Normal Distribution with 0.7 Correlation",
      x = "X", y = "Y") +  theme_minimal()
```

Το αντίστοιχο 3D διάγραμμα είναι το εξής:



Διάγραμμα 3: 3Δ διάγραμμα κοινής πιθανότητας δύο συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Κώδικας R για το 3D Scatterplot

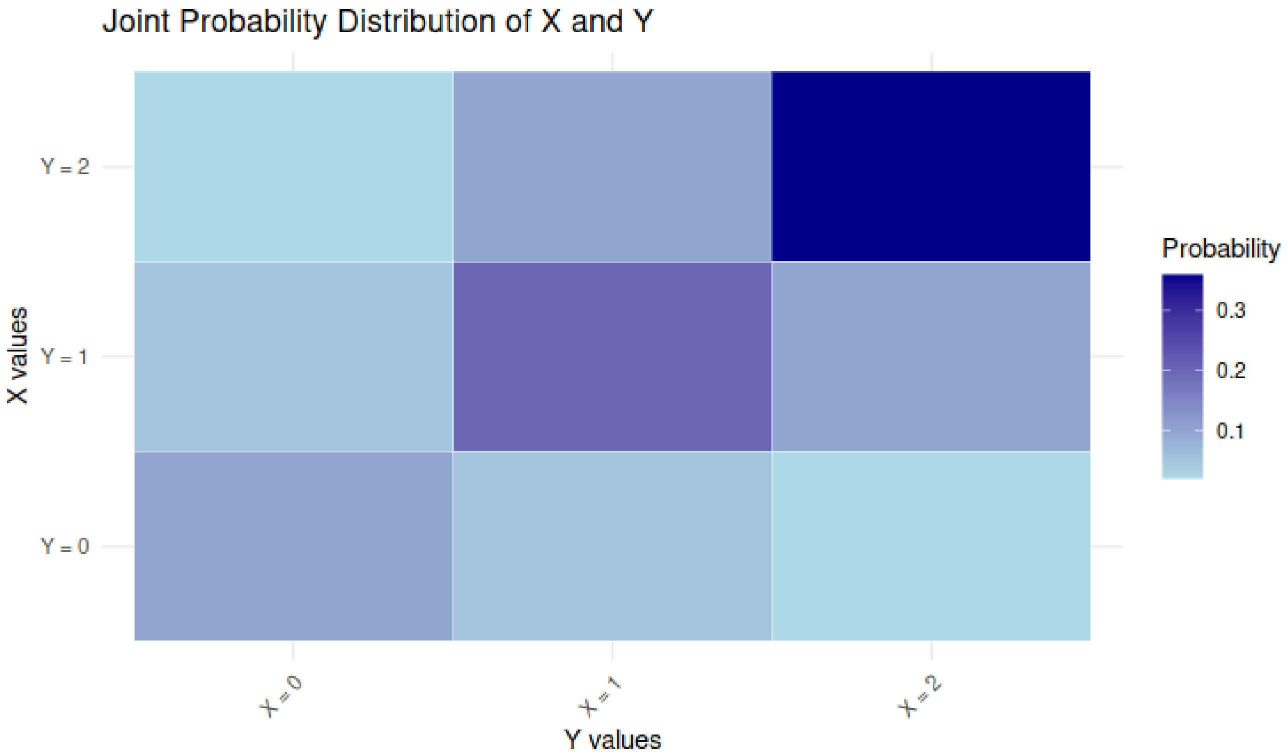
```
mu <- c(3, 3)
sigma <- matrix(c(1, 0.7,  0.7, 1), nrow = 2)
x <- seq(0, 6, length.out = 50)
y <- seq(0, 6, length.out = 50)
grid <- expand.grid(X = x, Y = y)
grid_matrix <- as.matrix(grid)
grid$Z <- dmvn(grid_matrix, mu = mu, sigma = sigma)
plot_ly(x = ~grid$X, y = ~grid$Y, z = ~grid$Z,
        type = "scatter3d", mode = "markers",
        marker = list(size = 10, color = ~grid$Z, colorscale = "Viridis", showscale = TRUE)) %>%
  layout(scene = list(    xaxis = list(title = "X"),    yaxis = list(title = "Y"),    zaxis = list(title = "Density"),
title = "3D Surface Plot of Bivariate Normal Distribution with Positive Correlation"))
```

b) Δύο διακριτές τ.μ.

Έστω Χ και Υ δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

P(X = x, Y = y)	**X = 0**	**X = 1**	**X = 2**
Y = 0	0.1	0.05	0.02
Y = 1	0.05	0.2	0.1
Y = 2	0.02	0.1	0.36

Το παρακάτω διάγραμμα θερμότητας (heatmap) αναπαριστά την κοινή κατανομή πιθανότητας.



Διάγραμμα 4: Διάγραμμα θερμότητας (heatmap) κοινής πιθανότητας δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών

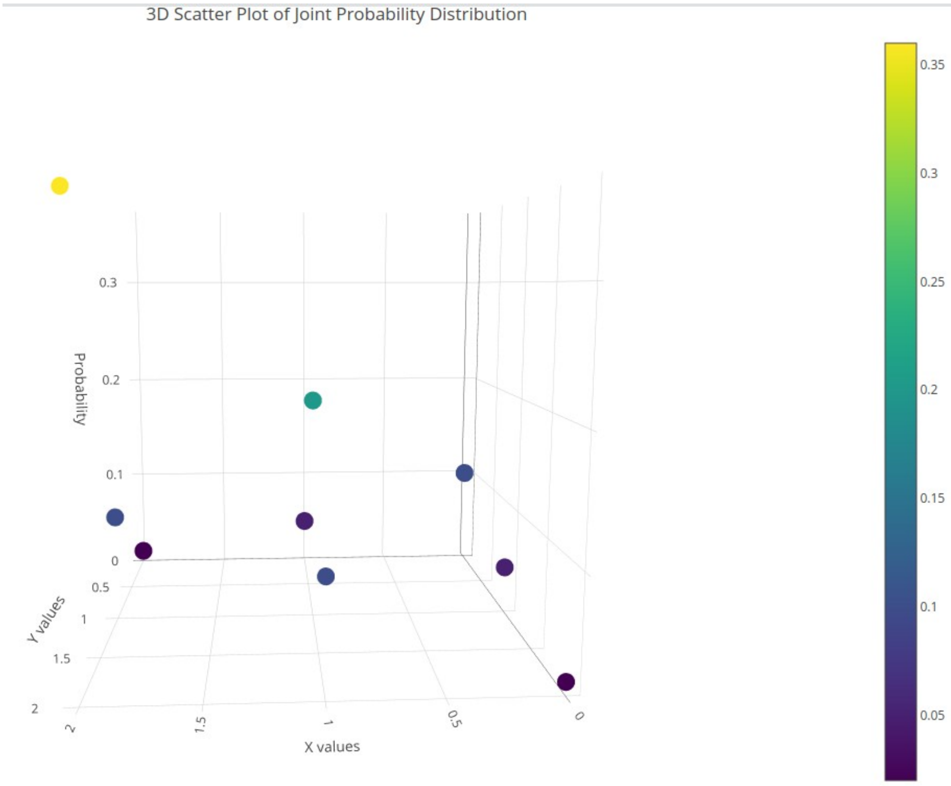
Κώδικας R για το 2D Heatmap

```
prob_table <- matrix(c(0.1, 0.05, 0.02, 0.05, 0.2, 0.1, 0.02, 0.1, 0.36), nrow = 3, byrow = F)
colnames(prob_table) <- c("X = 0", "X = 1", "X = 2")
rownames(prob_table) <- c("Y = 0", "Y = 1", "Y = 2")
prob_df <- melt(prob_table)
ggplot(prob_df, aes(x = Var2, y = Var1, fill = value)) +
  geom_tile(color = "white") +
  scale_fill_gradient(low = "lightblue", high = "darkblue") +
  labs(title = "Joint Probability Distribution of X and Y",
       x = "Y values", y = "X values", fill = "Probability") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1))
```

Τα ίδια δεδομένα, μπορούν να αναπαρασταθούν και σε ένα 3D διάγραμμα διασποράς με τον παρακάτω κώδικα R:

Κώδικας R για το 3D Scatterplot

```
prob_data <- data.frame(  X = rep(c(0, 1, 2), each = 3),  Y = rep(c(0, 1, 2), times = 3),  Probability = c(0.1, 0.05, 0.02,  0.05, 0.2, 0.1,  0.02, 0.1, 0.36))
plot_ly(data = prob_data, x = ~X, y = ~Y, z = ~Probability,  type = "scatter3d", mode = "markers",
      marker = list(size = 10, color = ~Probability, colorscale = "Viridis", showscale = TRUE)) %>%
  layout(scene = list(xaxis = list(title = "X values"),    yaxis = list(title = "Y values"),    zaxis = list(title = "Probability")),  title = "3D Scatter Plot of Joint Probability Distribution")
```



Διάγραμμα 5: 3Δ διάγραμμα κοινής πιθανότητας δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών

1.4. Σύνθεση αναμενόμενων τιμών

Μία σημαντική πρόταση στην στατιστική είναι ο νόμος των σύνθετων μέσων τιμών. Μία αναλογία που μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση της ιδιότητας αυτής, είναι με το εξής παράδειγμα της πρόβλεψης: Αν X είναι η τ.μ. των πωλήσεων μίας επιχείρησης μία ημέρα και Y ο καιρός που θα κάνει την ημέρα αυτή, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι εξαρτημένες.

Αν, για κάθε πιθανό καιρό y, γνωρίζαμε τις πωλήσεις $Z_y = (X \mid Y = y)$, τότε για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της X, θα μπορούσαμε απλά να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή όλων των τιμών Z_y.

Η παραπάνω παρατήρηση τυποποιείται στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση (Σύνθεση αναμενόμενων τιμών - Law of Iterated Expectation - LIE)

Για κάθε δύο τ.μ. X, Y ισχύει $E(X) = E_Y(E_X(X|Y))$.

Απόδειξη

(α) Συνεχείς τ.μ.

$$
\begin{aligned}
E(E(X\,|\,Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(X\,|\,Y=y) f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x\,|\,y)dx\, f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x\,|\,y) f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= E(X)
\end{aligned}
$$

(β) Διακριτές τ.μ.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}\left[\sum_x x \cdot \mathrm{P}(X=x \mid Y)\right] \\
&= \sum_y \left[\sum_x x \cdot \mathrm{P}(X=x \mid Y=y)\right] \cdot \mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot \mathrm{P}(X=x, Y=y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_x \sum_y x \cdot \mathrm{P}(X=x, Y=y) &= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x x \cdot \mathrm{P}(X=x) \\
&= \mathrm{E}(X).
\end{aligned}
$$

Χρήσιμα σχόλια για τις διαφορές μεταξύ $E_X(X\,|\,Y=y)$ και $E_X(X\,|\,Y)$, είναι διαθέσιμα εδώ:
https://stats.stackexchange.com/questions/118578/what-is-the-difference-between-exy-and-exy-y

Παράδειγμα (Διακριτές Τ.Μ.)

Μια τυχαία διαδικασία εξελίσσεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο, ρίχνουμε ένα ζάρι και έστω Y το αποτέλεσμά του. Στη συνέχεια, ρίχνουμε ένα νόμισμα φτιαγμένο έτσι ώστε η πιθανότητα να έρθει Κορώνα (X = 1), εξαρτάται από την τιμή του Y: $P(X = 1 \,|\, Y = y) = y/6$.

Να υπολογιστεί η E(X).

Λύση

Υπολογίζουμε, $E(Y) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3{,}5$.

Είναι $E_X(X \,|\, Y = y) = 1\cdot P(X = 1 \,|\, Y = y) + 0\cdot P(X = 0 \,|\, Y = y) = y/6$ ή $E_X(X \,|\, Y) = Y/6$.

$E(X) = E_Y(E_X(X \,|\, Y) = E_Y(Y / 6) = E_Y(Y) / 6 = 3{,}5/6 = 0{,}583$.

Παράδειγμα (Συνεχείς Τ.Μ.)

Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε: $Y \sim U(0,2)$ και $X \sim U(0, y)$. Να βρεθεί το E(X).

Λύση

Υπολογίζουμε, $E(Y) = (0 + 2) / 2 = 1$.

Είναι $E_X(X \mid Y = y) = (0 + y) / 2 = y / 2$.

$E(X) = E_Y(E_X(X \mid Y) = E_Y(Y / 2) = E_Y(Y) / 2 = 1/6 = 0,5$.

Ασκήσεις

1. Ένα εργοστάσιο παράγει αντικείμενα με ελαττώματα, όπου ο αριθμός των ελαττωμάτων $X \sim \text{Poisson}(Y)$, όπου $Y \sim U(1,3)$. Να βρεθεί η $E(X)$.

2. Για το χρόνο μελέτης Y ενός φοιτητή γνωρίζουμε ότι $Y \sim U(0, 10)$ ενώ για τη βαθμολογία X στις τελικές εξετάσεις γνωρίζουμε ότι $E(X \mid Y = y) = y + 5$. Να βρεθεί η $E(X)$.

3. Ένας μπασκετμπολίστας όταν σουτάρει δίποντο χωρίς άμυνα, σκοράρει το 80% των προσπαθειών, ενώ όταν σουτάρει με άμυνα πάνω του, σκοράρει το 40% των προσπαθειών. Στον αγώνα που θα γίνει ο παίκτης θα έχει άμυνα πάνω του το 70% των προσπαθειών που θα κάνει. Να βρεθεί το μέσο πλήθος πόντων ανά προσπάθεια.

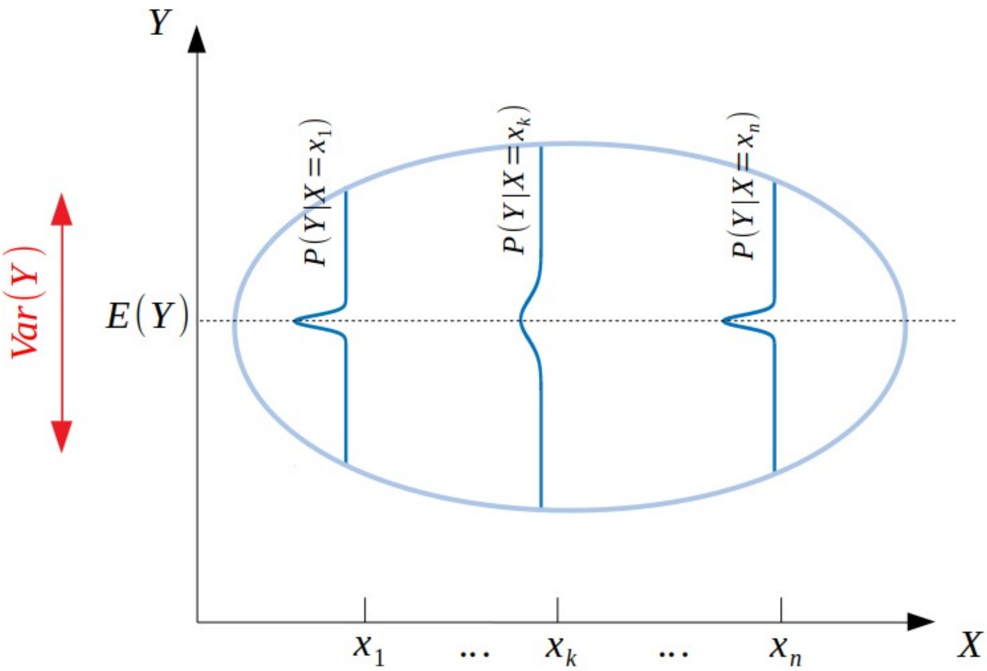
4. Επιλέγουμε έναν ακέραιο X ομοιόμορφα στο διάστημα από 1 έως 425. Στη συνέχεια επιλέγουμε έναν ακέραιο Y ομοιόμορφα στο διάστημα από 1 μέχρι X. Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή του Y.

1.5. Νόμος της Ολικής Διακύμανσης

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Από αυτές ορίζονται οι νέες τυχαίες μεταβλητές:

- $Var_Y(Y \mid X)$: Διακύμανση της Y για δεδομένη τιμή της X.
- $E_Y(Y \mid X)$: Αναμενόμενη τιμή της Y για δεδομένη τιμή της X.

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τότε $Var_X(E_Y(Y \mid X)) = 0$, καθώς $E_Y(Y \mid X) = E_Y(Y)$ και $Var_X(E(Y \mid X)) = Var_X(E(Y)) = 0$ (δεν υπάρχει μεταβλητότητα ως προς X).

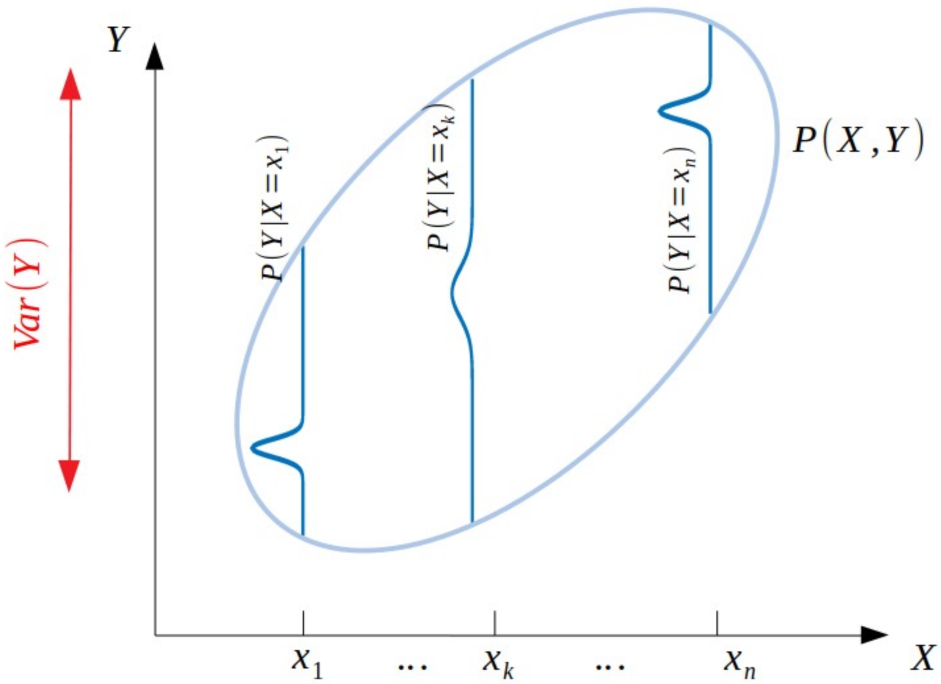


Διάγραμμα 6: Ανεξάρτητες X, Y: $E_Y(Y \mid X) = E_Y(Y)$ και $Var_Y(Y) = E_X(Var_Y(Y|X))$

Αν ωστόσο οι Χ, Υ δεν είναι ανεξάρτητες τότε η $E_Y(Y \mid X = x))$ διαφοροποιείται καθώς το x διατρέχει όλες τις πιθανές τιμές της τ.μ. Χ και το μέγεθος της διαφοροποίησης σχετίζεται με το μέγεθος της εξάρτησης των δύο μεταβλητών. Συνεπώς, η **$Var_X(E_Y(Y \mid X))$** που ποσοτικοποιεί τη μεταβλητότητα της αναμενόμενης θέσης της κατανομής της τιμής της Υ για δεδομένη τιμή της Χ, μπορεί να ερμηνευτεί ως **το μέρος της μεταβλητότητας της τ.μ. Υ <u>που εξηγείται από την τ.μ. Χ</u>**.

Από την άλλη μεριά, υπάρχει και η ανεξάρτητη από τη Χ μεταβλητότητα της Υ που προσδιορίζεται από τη διακύμανση κάθε μίας Υ | Χ = x. Μπορούμε να καταγράψουμε **το μέρος της μεταβλητότητας της τ.μ. Υ <u>που δεν εξηγείται από την τ.μ. Χ</u>.** ως τη μέση τιμή **$E_X(Var_Y(Y \mid X))$.**

Εύλογο είναι να υποθέσουμε ότι η μεταβλητότητα της Υ που εξηγείται από τη Χ μαζί με τη μεταβλητότητα της Υ που δεν εξηγείται από την Χ, πρέπει να είναι ίσες με Var(Y). Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του Νόμου Ολικής Διακύμανσης. **Το θεώρημα είναι γνωστό ως Νόμος ολικής διακύμανσης** ή **Law of total variance** ή **Eve's Law όπως E(xpected value) V(ariance) Law.**



Διάγραμμα 7: Εξαρτημένες Χ, Υ: $E_Y(Y \mid X) \neq E_Y(Y)$ και $Var_X(E(Y \mid X)) \neq 0$

Πηγή Διαγράμματος 6 και Διαγράμματος 7: Ash (https://math.stackexchange.com/users/114080/ash), Law of total variance intuition, URL (version: 2019-10-01): https://math.stackexchange.com/q/3377007

Θεώρημα (Νόμος Ολικής Διακύμανσης)

Για κάθε δύο τ.μ. X, Y, ισχύει

$$\mathbf{Var(Y) = E_X(Var_Y(Y \mid X)) + Var_X(E_Y(Y \mid X))}$$

Απόδειξη

Είναι

$Var(Y) = E(Y^2) – [E(Y)]^2$ (ισοδύναμος ορισμός διακύμανσης)

$\Leftrightarrow E_Y(Y^2) = Var_Y(Y) + [E_Y(Y)]^2$ (αναδιάταξη όρων)

$\Rightarrow E_Y(Y^2 \mid X) = Var_Y(Y \mid X) + [E_Y(Y \mid X)]^2$ (I) (δέσμευση όλων των μεταβλητών ως προς το X).

Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε:

$E(Y^2) = E_X(E_Y(Y^2 \mid X))$ (Σύνθεση αναμενόμενων τιμών)

$= E_X(Var_Y(Y \mid X)) + E_X[E_Y(Y \mid X)]^2$ (Αντικατάσταση το $E_Y(Y^2 \mid X)$)

Τώρα, είναι:

$Var_Y(Y) = E_Y(Y^2) – [E_Y(Y)]^2$ (ορισμός Var(Y))

$= E_X(E_Y(Y^2 \mid X)) – [E_X(E_Y(Y \mid X))]^2$ (Σύνθεση αναμενόμενων τιμών)

$= E_X(Var_Y(Y \mid X) + [E_Y(Y \mid X)]^2) – [E_X(E_Y(Y \mid X))]^2$ (αντικατάσταση $E_Y(Y^2 \mid X)$ από (I))

$= E_X(Var_Y(Y \mid X)) + E_X([E_Y(Y \mid X)]^2) – [E_X(E_Y(Y \mid X))]^2$ (γραμμική E_X)

$= E_X(Var_Y(Y \mid X)) + Var_X(E_Y(Y \mid X))$ (ορισμός $Var(E_Y(Y \mid X))$)

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_total_variance

Σημείωση

Αν θεωρήσουμε την Y ως εξαρτημένη μεταβλητή και τη X ως ανεξάρτητο παράγοντα που ορίζει κατηγορίες ως προς την Y, τότε ο Νόμος Ολικής Διακύμανσης εκφράζει τη βασική αρχή της ανάλυσης διακύμανσης

$$SS_T = SS_B + SS_W$$

Περισσότερες πληροφορίες εδώ: grand_chat (https://math.stackexchange.com/users/215011/grand-chat), Law of total variance intuition, URL (version: 2021-09-10): https://math.stackexchange.com/q/4246382

Παράδειγμα

Ένας αστυνομικός μετρά την ταχύτητα των αυτοκινήτων σε μεγάλο δρόμο με ένα ραντάρ. Η πραγματική ταχύτητα X ενός αυτοκινήτου είναι U(80, 120). Αν x είναι η πραγματική ταχύτητα του αυτοκινήτου, το ραντάρ καταγράφει τιμή Y που ακολουθεί την N(x, x/100). Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της Y.

Λύση

Είναι X ~ U(80, 120), άρα $E(X) = \frac{120+80}{2} = 100$ και $Var(X) = \frac{(120-80)^2}{12} = \frac{400}{3}$.

Επιπλέον, Y ~ N(x, x/100) άρα $E_Y(Y|X) = X$ και $Var_Y(Y|X) = \frac{X}{100}$.

Από Νόμο επαναλαμβανόμενων αναμενόμενων τιμών είναι:

$E(Y) = E_X(E_Y(Y|X)) = E_X(X) = 100$.

Από Νόμο Ολικής Διακύμανσης είναι:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E_X(Var_Y(Y \mid X)) + Var_X(E_Y(Y \mid X)) \\
&= E_X(X / 100) + Var_X(X) \\
&= E_X(X) / 100 + Var_X(X) \\
&= 100/100 + 400/3 \\
&= 134.3.
\end{aligned}
$$

1.6. Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός

Έστω X μία μη αρνητική διακριτή μεταβλητή που λαμβάνει ακέραιες τιμές. Η **πιθανογεννήτρια συνάρτηση (probability-generating function – PGF**) της τ.μ. X ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{G_X(z) = E_X(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)z^k = P(X=0) + P(X=1)z + P(X=2)z^2 + \ldots}$$

Καθώς $0 \le P(X = \kappa) \le 1$, κ ϵ N, η συνάρτηση G_X συγκλίνει πάντα για κάθε $|z| < 1$. Είναι ωστόσο πιθανό να συγκλίνει σε χωρίο μεγαλύτερης ακτίνας, ακόμα και στο σύνολο του μιγαδικού επιπέδου C.

Σημειώσεις

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ στη συνέχεια θα αξιοποιηθεί ως μία πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής. Η πιθανογεννήτρια $G_X(z)$ συνδέεται στενά με τη ροπογεννήτρια M_X με τη σχέση $G_X(e^t) = M_X(t)$ ή ισοδύναμα $G_X(z) = M_X(\log z)$

Παράδειγμα

Αν $X \sim B(n, p)$ τότε $P(X = κ) = (n \text{ ανά } κ)\, p^{κ} (1 – p)^{n – κ}$ και

$G_X(z) = E(z^X) = Σ_{κ = 0, 1, …, n}\, P(X = κ) \cdot z^{κ}$

$= Σ_{κ = 0, 1, …, n}\, (n \text{ ανά } κ)\, p^{κ} (1 – p)^{n – κ} \cdot z^{κ}$

$= Σ_{κ = 0, 1, …, n}\, (n \text{ ανά } κ)\, (zp)^{κ} (1 – p)^{n – κ}$

$= (zp + 1 – p)^{n}$

$= (1 + (z – 1)\, p)^{n}$.

Άρα, $G_X(z) = (1 + (z – 1)\, p)^{n}$ για **κάθε z є C**, ειδικότερα,

$G_X(x) = (1 + (x – 1)\, p)^{n}$, για **κάθε x є R**.

Παράδειγμα

Αν $X \sim \text{Geometric}(p)$ τότε $P(X = κ) = (1 – p)^{κ} \cdot p$, $κ = 0, 1, 2, …$, και

$G_X(z) = E(z^X) = Σ_{κ = 0, 1, …}\, (1 – p)^{κ} \cdot p \cdot z^{κ}$

$= p \cdot Σ_{κ = 0, 1, …}\, [z(1 – p)]^{κ}$

$= p / [1 – z(1 – p)]$

Άρα, $G_X(z) = p / [1 – z(1 – p)]$ **για κάθε $|z(1 – p)| < 1$**, δηλαδή **$|z| < 1 / (1 – p)$**.Σημείωση Άθροισμα γεωμετρικής προόδου $Σ_{κ = 0, 1, …}\, α^{κ} = 1 + α + α^2 + … = 1/(1 – α)$ για $|α| < 1$.

Παράδειγμα

Αν $X \sim \text{Poisson}(λ)$ τότε $P(X = κ) = λ^{κ} \cdot e^{-λ}/ κ!$, $κ = 0, 1, 2, …$, και

$G_X(z) = E(z^X) = Σ_{κ = 0, 1, …}\, P(X = κ) \cdot z^{κ}$

$= Σ_{κ = 0, 1, …}\, λ^{κ} \cdot e^{-λ}/ κ! \cdot z^{κ}$

$= e^{-λ} \cdot Σ_{κ = 0, 1, …}\, (zλ)^{κ}/ κ!$

$= e^{-λ} \cdot e^{zλ}$

$= e^{(z – 1)\, λ}$.

Άρα, $G_X(z) = e^{(z – 1)\, λ}$ για **κάθε z є C**, ειδικότερα, $G_X(x) = e^{(x – 1)\, λ}$, για **κάθε x є R**.

Η συνάρτηση $G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \dots} P(X = \kappa) \cdot z^\kappa$ στο χωρίο που ορίζεται καλώς, παραγωγίζεται ως εξής:

$$G_X^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) k z^{k-1} = P(X=1) + 2P(X=2)\cdot z + 3P(X=3)\cdot z^2 + \dots$$

$$G_X^{(2)}(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) k(k-1) z^{k-2} = 2\cdot P(X=2) + 3\cdot 2\cdot P(X=3)\cdot z + 4\cdot 3\cdot P(X=4)\cdot z^2 + \dots$$

$$G_X^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{+\infty} P(X=k) k(k-1)(k-2) z^{k-3} = 6\cdot P(X=3) + 24P(X=4)\cdot z + 60P(X=5)\cdot z^2 + \dots$$

…

$$G_X^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}$$

Η ονομασία "πιθανογεννήτρια συνάρτηση" για την $G_X(z)$ δικαιολογείται από τις εξής ιδιότητες:

- $G_X(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) 0^k = P(X=0) + P(X=1)\cdot 0 + P(X=2)\cdot 0^2 + \dots = P(X=0)$
- $G_X^{(1)}(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) k\, 0^{k-1} = P(X=1)$
- $\dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) \dfrac{k!}{(k-n)!} 0^{k-n} = P(X=n)$

Συμπεραίνουμε ότι:

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ, προσδιορίζει πλήρως τη συνάρτηση πιθανότητας $f(n) = P(X = n)$, n = 0, 1, 2, ….

Ιδιαίτερα, αν δύο τ.μ. έχουν την ίδια πιθανογεννήτρια τότε θα έχουν και την ίδια κατανομή πιθανότητας.

Δραστηριότητα

Έστω Χ διακριτή τ.μ. που λαμβάνει τιμές φυσικούς αριθμούς με πιθανογεννήτρια 0συνάρτηση $G_X(z) = z(2 + 3z^2) / 5$. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $P(X = \kappa)$ της Χ, κ = 0, 1, 2, ….

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις τιμές $G^{(n)}_X(0) / n!$ για διάφορές τιμές του n.

Η ονομασία πιθανογεννήτρια αιτιολογείται <u>και</u> από τις παρακάτω ιδιότητες

Αν η $G^{(1)}$ ορίζεται στο z = 1, τότε:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(X=k) = G_X^{(1)}(1)$$

$$E(X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-n+1)) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} P(X=k) = G_X^{(n)}(1)$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\
&= E(X^2) - (EX)^2 \\
&= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= G^{(2)}{}_X(1) + G^{(1)}{}_X(1) - [G^{(1)}{}_X(1)]^2
\end{aligned}$$

Θεώρημα

Η πιθανογεννήτρια ως πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής:

(i) είναι αύξουσα στο διάστημα [0, 1].

(ii) Αν η τ.μ. X παίρνει έστω και μία τιμή μεγαλύτερη του 1, τότε η G_X είναι κυρτή στο διάστημα [0, 1].

Απόδειξη

Πράγματι, για s ε R, είναι $G_X(s) = E_X(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)s^k$, άρα για s ε [0, 1]:

(i) $G_X^{(1)}(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)ks^{k-1} = P(X=1) + 2P(X=2)\cdot s + 3P(X=3)\cdot s^2 + \ldots \ge 0$,

(ii) $G_X^{(2)}(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)k(k-1)s^{k-2} = 2P(X=2) + 6P(X=3)z + 12P(X=4)\cdot z^2 + \ldots \ge 0.$

Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, τότε

$$G_Y(z) = G_{X_1}(z)\cdot G_{X_2}(z)\cdot \ldots \cdot G_{X_n}(z)$$

Απόδειξη

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
G_Y(z) &= E(z^Y) = E(z^{X_1+X_2+\ldots+X_n}) && \text{(ορισμός Y)} \\
&= E(z^{X_1}\cdot z^{X_2}\cdot \ldots \cdot z^{X_n}) && \text{(ιδιότητες εκθετικής)} \\
&= E(z^{X_1})\cdot E(z^{X_2})\cdot \ldots \cdot E(z^{X_n}) && \text{(X_i ανεξάρτητες άρα z^{Xi} ανεξάρτητες)} \\
&= G_{X_1}(z)\cdot G_{X_2}(z)\cdot \ldots \cdot G_{X_n}(z) && \text{(ορισμός PGF)}
\end{aligned}$$

1.7. Άθροισμα τυχαίου πλήθους ισόνομων τυχαίων μεταβλητών

Θεώρημα

Έστω X_1, X_2, …, ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Έστω επίσης N μία ακόμα τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και ανεξάρτητη από τις X_i, i = 1, …,. Αν $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, τότε

(α) $E(S_N) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \mu \cdot E(N)$.

(β) $Var(S_N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N)$.

(γ) Αν G_X η κοινή πιθανογεννήτρια των X_i, i = 1, 2,…,. και G_N η πιθανογεννήτρια της N, τότε $G_{S_N}(z) = G_N(G_X(z)) = G_N \circ G_X(z)$.

Απόδειξη

Αν γνωρίζαμε το πλήθος των X_i τότε θα μπορούσαμε άμεσα να υπολογίσουμε το άθροισμα των επιμέρους αναμενόμενων τιμών καθώς E(X + Y) = E(X) + E(Y). Από τη στιγμή όμως που το πλήθος των X_i είναι συνάρτηση του N, θα “υποκριθούμε” ότι το ξέρουμε, εκφράζοντας το $E(S_N)$ με τη βοήθεια της δεσμευμένης πιθανότητας ως προς τις διάφορες τιμές του N = 0, 1, 2, …

(α) $E(S_N) = E_N(E(S_N \mid N))$

$= E_N(E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \mid N))$

$= E_N(E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N))$

$= E_N(E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_N))$

$= E_N(N \cdot \mu)$

$= \mu \cdot E(N)$.

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) ο τύπος $E_X(X) = E_Y(E_X(X|Y))$ που ισχύει για κάθε δύο τ.μ.,

(β) η ανεξαρτησία των X_1, X_2, … με την N,

(γ) η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής.

(δ) το γεγονός πως όλες οι X_1, X_2, … είναι ισόνομες με αναμενόμενη τιμή μ.

(β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$Var(S_N \mid N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \mid N)$

$= Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_N)$

$= N \cdot Var(X)$

$= N \cdot \sigma^2$.

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) η ανεξαρτησία των X_1, X_2, … με την N,
(β) η ανεξαρτησία των X_1, X_2, … μεταξύ τους και
(γ) το γεγονός πως όλες οι X_1, X_2, … είναι ισόνομες με διακύμανση σ^2.

Επιπλέον, είναι $Var_N(E(S_N \mid N)) = Var_N(E(S_N))$

$= Var_N(N \cdot \mu)$

$= \mu^2 \cdot Var(N)$.

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$ με την N,
(β) η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής και
(γ) το γεγονός πως όλες οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες με διακύμανση σ^2.

Δείξαμε ότι $Var(S_N \mid N) = N \cdot \sigma^2$ και ότι $Var_N(E(S_N \mid N)) = \mu^2 \cdot Var(N)$.

Τώρα, από το νόμο της ολικής διακύμανσης (law of total variance) είναι:

$$Var(S_N) = E_N(Var(S_N \mid N)) + Var_N(E(S_N \mid N))$$
$$= E_N(N \cdot \sigma^2) + \mu^2 \cdot Var(N)$$
$$= \sigma^2 \cdot E_N(N) + \mu^2 \cdot Var(N).$$

(γ) $G_{S_N}(z) = E(z^{S_N})$

$$= E(z^{X_1 + X_2 + \ldots + X_N})$$
$$= E_N(E(z^{X_1 + X_2 + \ldots + X_N} \mid N))$$
$$= E_N(E(z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_N} \mid N))$$
$$= E_N(E(z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_N}))$$
$$= E_N(E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) \cdot \ldots \cdot E(z^{X_N}))$$
$$= E_N(G_X(z)^N)$$
$$= G_N(G_X(z))$$
$$= G_N \circ G_X(z)$$

Σημείωση

Αν η χρήση του Law of Iterated Expectation δεν είναι κατανοητή στο (α), μία αναλυτικότερη προσέγγιση είναι η εξής:

$E(S_N) = \Sigma_x\, x\, P(S_N = x) = \Sigma_x\, x\, \Sigma_n P(S_N = x \mid N = n)P(N = n)$

$= \Sigma_x\, x\, \Sigma_n P(S_n = x)P(N = n) = \Sigma_n \Sigma_x xP(S_n = x)\, P(N = n) = \Sigma_n E(S_n)\, P(N = n)$

$= \Sigma_n \Sigma_{k=1}^{n} E(X_k)\, P(N = n) = \Sigma_n\, n\, \mu\, P(N = n) = \mu\, \Sigma_n\, n\, P(N = n) = \mu\, E(N)$.

2. Εξέλιξη μίας Διαδικασίας Διακλάδωσης

Μια διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$ περιγράφει τη διαδικασία αναπαραγωγής μίας κοινότητας κάτω από τις εξής υποθέσεις:

- Τη χρονική στιγμή 0 υπάρχει μόνο ένα άτομο: $Z_0 = 1$.
- Κάθε άτομο ζει μία χρονική μονάδα, και πεθαίνει αφού αποκτήσει Υ απογόνους όπου η τ.μ. Υ λαμβάνει τιμές 0, 1, 2, …
- Όλα τα άτομα είναι ανεξάρτητα ως προς την αναπαραγωγή τους, δηλαδή αν Y_1 και Y_2 είναι οι απόγονοι των ατόμων Α και Β τότε οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. (είναι και ισόνομες καθώς Y_1, Y_2 ~ Υ). Δηλαδή, κάθε άτομο ξεκινά τη δική του ανεξάρτητη με τις άλλες διαδικασία διακλάδωσης.

Έστω Z_n το μέγεθος της n-οστής γενιάς, δηλαδή Z_n είναι ο αριθμός των ατόμων που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

Σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τη διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$:

- Ποια είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της Z_n;
- Ποια είναι η κατανομή της Z_n;
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει εξαλειφθεί στη γενιά n; ($P(Z_n= 0) =$;).
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί; ($P(\lim_{n \to \infty} Z_n= 0) =$;).
- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις τελικής εξάλειψης του πληθυσμού;

Αν Z_n ο πληθυσμός γενιάς n, τότε Z_{n-1} είναι ο πληθυσμός της προηγούμενης γενιάς n – 1. Έστω 1, 2, …, Z_{n-1} μία αρίθμηση των ατόμων της γενιάς n – 1. Κάθε ένα από αυτά τα άτομα ξεκινά μία δική του διαδικασία διακλάδωσης και έστω $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{Zn-1}$, οι απόγονοι των ατόμων 1, 2, …, Z_{n-1} αντίστοιχα. Τότε ο πληθυσμός στη γενιά n θα είναι ίσος με το άθροισμα όλων αυτών των απογόνων, δηλαδή

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

Είναι αξιοσημείωτο πως το μέγεθος της n γενεάς είναι ένα **τυχαίου πλήθους Z_{n-1}** άθροισμα, **τυχαίων μεταβλητών Y_i.**

2.1. Υπολογισμός $E(Z_n)$ και $Var(Z_n)$

Θεώρημα

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$. Έστω Y η κατανομή του πλήθους των απογόνων, $E(Y) = \mu$ και $Var(Y) = \sigma^2$. Τότε

- $E(Z_n) = \mu^n$.
- $Var(Z_n) = \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ και $Var(Z_n) = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} \cdot \dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$, αν $\mu \neq 1$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Έστω επίσης N μία ακόμα τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και ανεξάρτητη από τις X_i, $i = 1, \ldots$,.

Αν $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, τότε

(α) $E(S_N) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \mu \cdot E(N)$

(β) $Var(S_N) = \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N)$.

Για $Z_0 = 1$, $Z_1 = Y$, $Z_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{Z_{n-1}}$, και $N = Z_{n-1}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
E(Z_n) &= E(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{Z_{n-1}}) \\
&= \mu \cdot E(Z_{n-1}) \\
&= \mu \cdot \mu \cdot E(Z_{n-2}) = \ldots \\
&= \mu \cdot \mu \cdot \ldots \cdot \mu \cdot E(Z_0) = \mu^n.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, αν συμβολίζουμε $V_n = Var(Z_n)$, τότε

$V_0 = Var(Z_0) = 0$,

$V_1 = Var(Z_1) = Var(Y) = \sigma^2$

...

$$
\begin{aligned}
V_n &= Var(Z_n) \\
&= Var(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{Z_{n-1}}) \\
&= \sigma^2 \cdot E(Z_{n-1}) + \mu^2 \cdot Var(Z_{n-1}) \\
&= \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Από τη σχέση $V_n = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}$ με αναδρομικό συλλογισμό παίρνουμε:

$V_1 = \sigma^2$

$V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^1 + \mu^2 \cdot \sigma^2 = \mu \cdot \sigma^2(1 + \mu)$

$V_3 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^2 \cdot V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^3 \cdot \sigma^2(1 + \mu) = \mu^2 \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2)$

…

$V_n = \mu^{n-1} \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ ή $\sigma^2 \cdot \mu^{n-1} (1 - \mu^n) / (1 - \mu)$, αν $\mu \neq 1$.

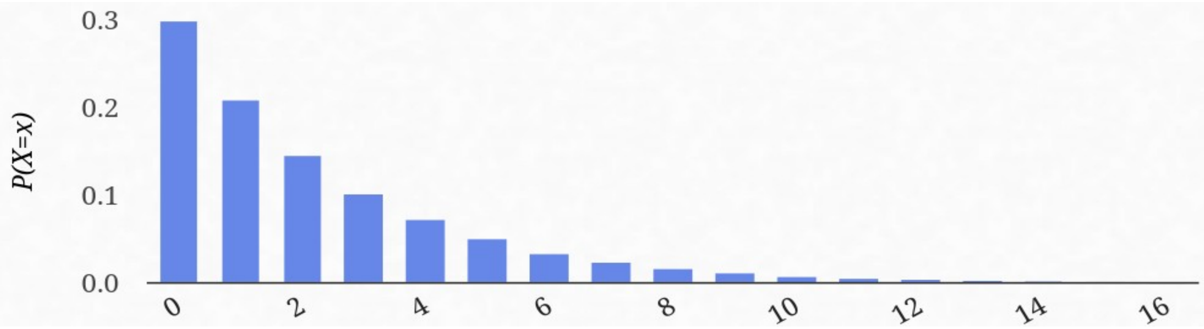
Παράδειγμα 1

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim$ Geometric(0,3).

Τότε $P(Y = k) = (1 - 0{,}3)^k 0{,}3 = 0{,}7^k \cdot 0{,}3$, $k \geq 0$ και ενδεικτικά $P(Y = 0) = 0{,}3$, $P(Y = 1) = 0{,}21$.

Επιπλέον:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}7 / 0{,}3 = 2{,}33$ απόγονοι ανά άτομο και
- $\sigma^2 = Var(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}7 / 0{,}3^2 = 7{,}78$ ή $\sigma = 2{,}8$ άτομα.



Διάγραμμα 8: Κατανομή πλήθους απογόνων Y ~ Geometric(0,3)

Στη $10^η$ γενιά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 2{,}33^{10} = 4.715{,}8 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot \mu^9 (1 - \mu^{10}) / (1 - \mu) = 7{,}78 \cdot 2{,}33^9 (1 - 2{,}33^{10}) / (1 - 2{,}33) = 5{,}72 \cdot 10^7.$$

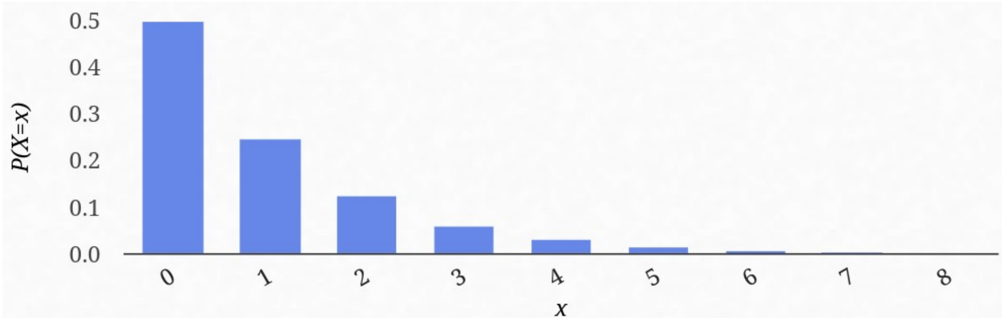
Τυπική απόκλιση:

$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (5{,}72 \cdot 10^7)^{1/2} = 7.563{,}1 \text{ άτομα.}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και Y ~ Geometric(0,5). Τότε:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}5 / 0{,}5 = 1$ απόγονος ανά άτομο και
- $\sigma^2 = Var(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}5 / 0{,}5^2 = 2$ ή $\sigma = 1{,}4$ άτομα.



Διάγραμμα 9: Κατανομή πλήθους απογόνων Y ~ Geometric(0,5)

Στη $10^{η}$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 1^{10} = 1 \text{ απόγονος}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20.$$

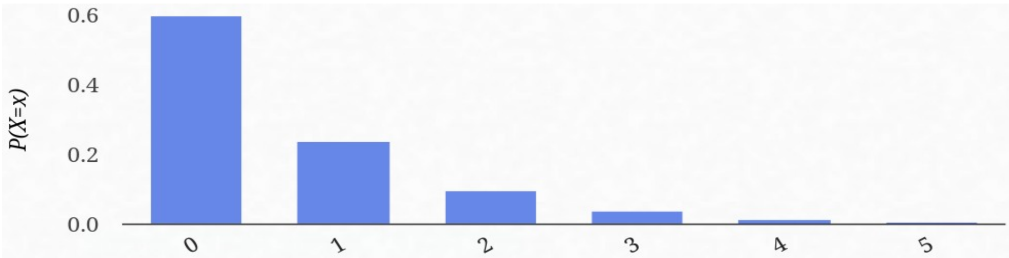
Τυπική απόκλιση:

$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (20)^{1/2} = 4{,}5 \text{ άτομα.}$$

Παράδειγμα 3

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και Y ~ Geometric(0,6). Τότε:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}4 / 0{,}6 = 0{,}67$ απόγονοι ανά άτομο και
- $\sigma^2 = Var(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}4 / 0{,}6^2 = 1{,}11$ ή $\sigma = 1{,}05$ άτομα.



Διάγραμμα 10: Κατανομή πλήθους απογόνων Y ~ Geometric(0,6)

Στη $10^{η}$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 0{,}67^{10} = 0{,}017 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = σ^2 \cdot μ^9 (1 – μ^{10}) / (1 – μ) = 1{,}11 \cdot 0{,}67^9 (1 – 0{,}67^{10}) / (1 – 0{,}67) = 1{,}03.$$

Τυπική απόκλιση:

$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (1{,}03)^{1/2} = 1{,}02 \text{ άτομα.}$$

Δραστηριότητα

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, …\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Τότε, κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = (2 \text{ ανά } 0)\ 0{,}25^0(1 – 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = (2 \text{ ανά } 1)\ 0{,}25^1(1 – 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = (2 \text{ ανά } 2)\ 0{,}25^2(1 – 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Επιπλέον, γνωρίζουμε από τη θεωρία πως το μέσο πλήθος απογόνων για κάθε άτομο θα είναι $E(Y) = n \cdot p = 2 \cdot ¼ = ½$ με διακύμανση $Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 – p) = 2 \cdot ¼ \cdot ¾ = 3/8$.

Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και τυπική απόκλιση του πλήθους στην 5η γενιά.

2.2. Πιθανογεννήτρια συνάρτηση του πληθυσμού της n-οστής γενιάς

Έστω, Z_{n-1} ο πληθυσμός της γενιάς n – 1 και $Y_1, Y_2, …, Y_{zn-1}$, οι απόγονοι αυτών των ατόμων. Παρατηρούμε ότι:

- Οι $Y_1, Y_2, …, Y_{zn-1}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και κοινή πιθανογεννήτρια συνάρτηση G_Y.
- Z_{n-1} είναι μία τ.μ. ανεξάρτητη από τις $Y_1, Y_2, …, Y_{zn-1}$.
- Αν $Z_n = Y_1 + Y_2 + …+ Y_{zn-1}$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της S_N είναι η

$$G_{Z_n}(z) = G_{Z_{n-1}}(G_Y(z)) = G_{Z_{n-1}} \circ G_Y(z),$$

όπου $G_Y(z) = E(z^Y)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Y.

Συμβολίζουμε $G(z) = G_1(z)$ και $G_n(z) = G_{zn}(z)$, $n \geq 1$. Καθώς $Z_1 = Y$, είναι

$$G_Y(z) = G_{Z1}(z) = G_1(z) = G(z)$$

και η σχέση

$$G_{Zn}(z) = G_{Zn-1}(G_Y(z)) = G_{Zn-1} \text{ o } G_Y(z),$$

γράφεται

$$\mathbf{G_n(z) = G_{n-1}(G(z)) = G_{n-1} \text{ o } G(z).}$$

Από την τελευταία σχέση, βρίσκουμε σχετικά με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις της κατανομής των απογόνων:

Απόγονοι $1^{ης}$ γενιάς: $G_1(z) = G(z)$

Απόγονοι $2^{ης}$ γενιάς: $G_2(z) = G(G(z)) = G \circ G(z)$

…

Απόγονοι $n^{ης}$ γενιάς: $G_n(z) = G(G(...G(z)…)) = G \circ G \circ … \circ G(z)$ (n φορές)

Συνοψίζοντας:

Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το πλήθος απογόνων κάθε ενός ατόμου, οποιαδήποτε χρονική στιγμή και $G(z) = E(z^Y) = \Sigma_{\kappa \in N} P(Y = \kappa) z^\kappa$, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Y. Αν $G_n(z)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n, τότε

$$G_n(z) = G(G(...G(z)…)) = G \circ G \circ … \circ G(z) \text{ (n φορές)}$$

Ο εντοπισμός της πιθανογεννήτριας συνάρτησης G_n που εκφράζει το πλήθος απογόνων Z_n της n γενιάς είναι γενικά μία δύσκολη διαδικασία.

Για παράδειγμα αν Y ~ Poisson(λ) τότε $G(y) = e^{(y-1)\lambda}$, $y \in N$ και

$$G_2(y) = G(G(y)) = e^{(G(y)-1)\lambda} = e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}$$
$$G_3(y) = G_2(G(y)) = e^{(e^{(G(y)-1)\lambda}-1)\lambda} = e^{(e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}-1)\lambda}$$

Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που είναι εφικτές, όπως η περίπτωση όπου η Y ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή, δηλαδή, $P(Y = n) = (1 - p)^n \cdot p = q^n \cdot p$. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι:

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) = \begin{cases} \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns}, & \text{αν } p = q = 0{,}5. \\ \dfrac{(\mu^n - 1) - \mu(\mu^{n-1} - 1)s}{(\mu^{n+1} - 1) - \mu(\mu^n - 1)s}, & \text{αν } p \neq q, \text{ όπου } \mu = \dfrac{q}{p}. \end{cases}$$

2.3. Πιθανότητα γ τελικής εξάλειψης του πληθυσμού

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαδικασιών διακλάδωσης είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας τελικής εξαφάνισης ενός πληθυσμού, δηλαδή της πιθανότητας $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0)$.

Για παράδειγμα:

- Ποια είναι η πιθανότητα μια αποικία καρκινικών κυττάρων να εξαφανιστεί προτού αναπτυχθεί σε βάρος του περιβάλλοντα ιστού;
- Ποια είναι η πιθανότητα να εξαφανιστεί μια μολυσματική ασθένεια πριν γίνει επιδημική;
- Ποια είναι η πιθανότητα στο μέλλον να χαθεί το οικογενειακό επίθετο;

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\mathbf{E_n = \{Z_n = 0\} = \{\text{ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην } n - \text{οστή γενιά}\}}$$

$$\mathbf{= \{\text{δεν υπάρχουν απόγονοι στην } n - \text{οστή γενιά}\}}$$

Την πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός στη n γενιά, τη συμβολίζουμε

$$\mathbf{\gamma_n = P(E_n)}$$

Αν εξαφανιστεί ο πληθυσμός τη n – οστή γενιά θα παραμείνει εξαφανισμένος και στην n + 1 γενιά. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq}$$

Για κάθε διαδικασίας διακλάδωσης που εξελίσσεται, ένα σημαντικό ερώτημα αφορά την πιθανότητα ο πληθυσμός να εξαφανιστεί σε κάποια γενιά $n \geq 1$. Καθώς $E_n \subseteq E_{n+1}$ είναι:

$$\begin{aligned}
\gamma &= P(\text{ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί}) \\
&= P(\cup_{n \in N} E_n) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \gamma_n
\end{aligned}$$

Μεταξύ των

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= P(E_n) \\
&= P(Z_n = 0) \\
&= P(\text{ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην } n - \text{οστή γενιά}),\ n \geq 0,
\end{aligned}$$

υπάρχει μία πολύ χρήσιμη σχέση.

Θεώρημα

Για κάθε $n \geq 1$, είναι

$$\boldsymbol{\gamma_n = G(\gamma_{n-1})}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G$ (n φορές) είναι η πιθανογεννήτρια της Z_n, άρα

$$\gamma_n = P(Z_n = 0) = G_n(0) \text{ και } \gamma_{n-1} = P(Z_{n-1} = 0) = G_{n-1}(0).$$

Όμως, $G_n(z) = G(G_{n-1}(z))$, άρα $G_n(0) = G(G_{n-1}(0))$ ή ισοδύναμα $\gamma_n = G(\gamma_{n-1})$.

Θεώρημα

Αν γ είναι η πιθανότητα τελικής εξαφάνισης του πληθυσμού, τότε η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $G(s) = s$, όπου $G(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με την οποία εκφράζεται το πλήθος των απογόνων ενός ατόμου.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $G(\gamma) = \gamma$ και αν $G(s) = s$, με $s \in [0, 1]$, τότε $s \geq \gamma$ (η περίπτωση ρίζας $s > 1$ δεν μας απασχολεί καθώς προφανώς τότε θα είναι $\gamma < s$). Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\gamma_n \\ &= \lim_{n\to\infty}G(\gamma_{n-1}) \\ &= G(\lim_{n\to\infty}\gamma_{n-1}) \\ &= G(\lim_{n\to\infty}\gamma_n) \\ &= G(\gamma),\end{aligned}$$

συνεπώς, η γ είναι λύση της εξίσωσης $G(s) = s$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε πως η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της $G(s) = s$.

Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή 0 είναι $Z_0 = 1$, άρα $\gamma_0 = P(E_0) = 0$. Έστω τώρα $s \in [0, 1]$, λύση της $G(s) = s$. Καθώς, η συνάρτηση G είναι αύξουσα στο [0, 1] και $\gamma_0 = 0$, είναι

$$\gamma_0 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_0) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_1 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_1) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_2 \leq s \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \gamma_n \leq s, \text{ για κάθε } n \in N.$$

Καθώς, $\gamma_n \leq s$, για κάθε $n \in N$, είναι και $\lim_{n\to\infty}\gamma_n \leq s$ δηλαδή $\gamma \leq s$. Αποδείχθηκε πως η πιθανότητα τελικής εξάλειψης γ είναι η μικρότερη δυνατή ρίζα της εξίσωσης $G(\gamma) = \gamma$.

Παράδειγμα 3

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim B(2, ¼)$ άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = $ (2 ανά 0) $0{,}25^0(1 – 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = $ (2 ανά 1) $0{,}25^1(1 – 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = $ (2 ανά 2) $0{,}25^2(1 – 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Περαιτέρω, αν $Y \sim B(n, p)$ γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = (1 + (z – 1) p)^n$.

Για $n = 2$ και $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = (1 + (s – 1) / 4)^2 = (¾ + ¼ s)^2$. Λύνουμε την εξίσωση

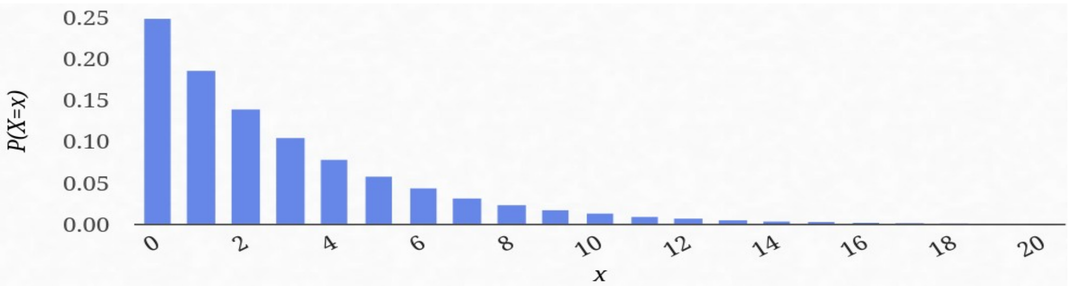
$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼ s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1$ ή $s = 9$. Άρα, $\gamma = 1$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim B(2, ¼)$ είναι βέβαιο πως θα εξαφανιστεί.

Παράδειγμα 4

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim$ Geometric(¼). Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim$ Geometric(¼) άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1, 2,… απογόνους.



Διάγραμμα 11: Κατανομή πλήθους απογόνων Y ~ Geometric(0,25)

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = p / [1 – z(1 – p)]$. Για $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = 1 / (4 – 3s)$. Λύνουμε την εξίσωση

$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼ s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1/3$ ή $s = 1$. Άρα, $\gamma = 1/3$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim$ Geometric(¼) έχει πιθανότητα 33,3% τελικά να εξαλειφθεί.

2.4. Η πιθανότητα τελικής εξάλειψης εξαρτάται από το μέσο πλήθος απογόνων μ.

Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα μακροπρόθεσμης επιβίωσης εξαρτάται από το μέσο αριθμό απογόνων ανά άτομο.

Στη συνέχεια για τη τ.μ. Y υποθέτουμε ότι:
(α) Δεν είναι σταθερή: $P(Y = k) < 1$, $k \in N$.
Αν το πλήθος απογόνων Y είναι σταθερό και μεγαλύτερο του 0, τότε προφανώς $\gamma = 0$.

(β) Παίρνει την τιμή 0 με θετική πιθανότητα: $P(Y = 0) > 0$.
Αν $P(Y = 0) = 0$, τότε $G(0) = 0$ και η μικρότερη ρίζα είναι προφανώς το 0, δηλαδή $\gamma = 0$.

(γ) Παίρνει έστω και μία τιμή ≥ 2, ή $P(Y = 0) + P(Y = 1) < 1$,
Με τον τρόπο αυτό είναι βέβαιο πως η συνάρτηση G(s) είναι κυρτή. Επιπλέον, αν $P(Y = 0) + P(Y = 1) = 1$, τότε η μοναδική λύση της $G(s) = s$ είναι η $s = P(Y = 0) / [1 – P(Y = 1)]$.

(δ) Είναι $(G'(1) =)E(Y) = \mu < +\infty$.
Αν $\mu = +\infty$, τότε η απόδειξη της περίπτωσης $\mu > 1$, (με κατάλληλες προσαρμογές) οδηγεί ομοίως στο συμπέρασμα $\gamma < 1$.

Θεώρημα

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης και Y η (μη σταθερή) τ.μ. του πλήθους των απογόνων κάθε ατόμου. Έστω $\mu = E(Y)$ το μέσο πλήθος απογόνων και γ η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\mu > 1$ (supercritical case), τότε $\gamma < 1$.
Η εξάλειψη δεν είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu > 1$.

(ii) Αν $\mu < 1$ (subcritical case), τότε $\gamma = 1$.
Η εξάλειψη είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu < 1$.

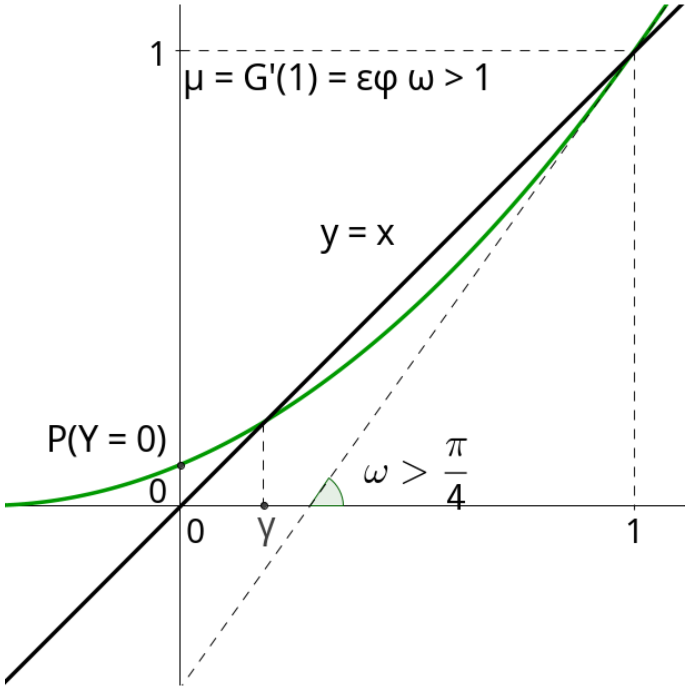
(iii) Αν $\mu = 1$ (critical case), τότε $\gamma = 1$.
Η εξάλειψη είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu = 1$.

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα αξιοποιήσουμε τις εξής ιδιότητες της πιθανογεννήτριας συνάρτησης που έχουμε αποδείξει σε προηγούμενες παραγράφους:

- $G(1) = 1$
- $G(0) = P(X = 0)$
- $G^{(n)}(0) / n! = P(X = n)$
- $E(X) = G'(1)$
- G κυρτή στο [0, 1]
- Η γ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της $G(s) = s$ στο [0, 1]

(i) Περίπτωση $\mu > 1$.



Διάγραμμα 12: Διαδικασία Διακλάδωσης - supercritical case

Είναι $G(0) = P(Y = 0) > 0$, άρα το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $G(s) = s$ ή ισοδύναμα $\gamma > 0$. Έστω τώρα $s \in (0, 1]$. Από το θεώρημα Taylor, γνωρίζουμε πως για s κοντά στο 1, υπάρχει συνάρτηση h, με $\lim_{s\to 1} h(s) = 0$, τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
G(s) &= G(1) + G'(1)(s-1) + h(s)(s-1) \\
&= 1 + \mu(s-1) + h(s)(s-1) \\
&= \mu s + 1 - \mu + h(s)(s-1) \qquad (\mu = 1 + \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0). \\
&= (1+\varepsilon)s + 1 - (1+\varepsilon) + h(s)(s-1) \\
&= s - (\varepsilon - h(s))(1-s).
\end{aligned}
$$

Καθώς $\lim_{s\to 1} h(s) = 0$, υπάρχει δ κοντά στο 1, τέτοιο ώστε, για κάθε $\delta < s < 1$, να είναι

$$|h(s)| < \varepsilon \rightarrow \varepsilon - h(s) > 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - h(s))(1-s) > 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $s_1 \in (\delta, 1]$ είναι $G(s_1) = s_1 - (\varepsilon - h(s_1))(1 - s_1) < s_1$.

Καθώς $G(0) > 0$ και $G(s_1) < s_1$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (ή από το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $f(s) = G(s) - s$) προκύπτει ότι υπάρχει $s_0 \in (0, s_1)$ τέτοιο ώστε $G(s_0) = s_0 < 1$ ή ισοδύναμα πως $\gamma < 1$.

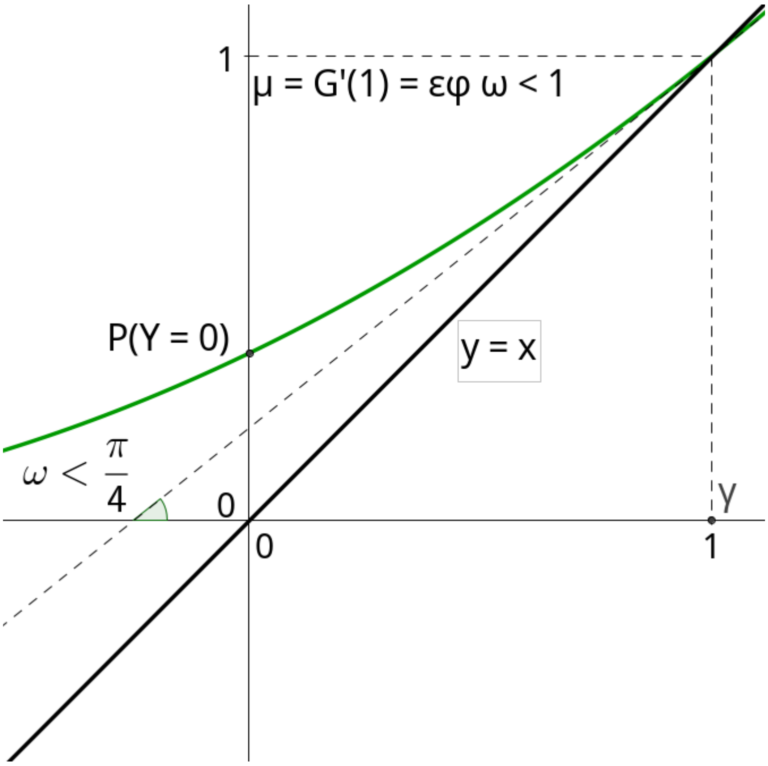
(ii) και (iii) Περίπτωση $\mu \le 1$.

Είναι $G(0) = P(Y = 0) > 0$, άρα το 0 δεν είναι μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $G(s) = s$, ή ισοδύναμα πως $\gamma > 0$. Θα αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι $\gamma = 1$.

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $s_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $G(s_0) = s_0$. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[s_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(s_0, 1)$, άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα υπάρχει κάποιο $c \in (s_0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$G'(c) = \frac{G(1) - G(s_0)}{1 - s_0} = 1. \quad ,$$

Όμως, G κυρτή και $s_0 < c < 1 \rightarrow G'(s_0) < G'(c) < G'(1) = \mu \leq 1$, άτοπο.



Διάγραμμα 13: Διαδικασία Διακλάδωσης - subcritical case

Παράδειγμα 5

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(3, p)$. Να βρείτε το μέγιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

Λύση

Είναι $\mu = E(X) = n \cdot p = 3p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $\mu \leq 1$ ή $p \leq 1/3$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/3$ είναι η μέγιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

Παράδειγμα 6

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim$ Geometric(p). Να βρείτε το ελάχιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

Λύση

Είναι $\mu = E(X) = (1 - p)/p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $(1 - p)/p \leq 1$ ή $p \geq 1/2$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/2$ είναι η ελάχιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

2.5. Χρόνος εξάλειψης στη γενιά n

Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>έως τη</u> γενιά n

Ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$y_n = P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί μέχρι τη n γενιά}) = P(Z_n = 0),$$

γίνεται με χρήση της πιθανογεννήτριας:

$$y_n = P(Z_n = 0) = G_n(0).$$

Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>ακριβώς στη</u> γενιά n

Υπολογισμός της πιθανότητας

$$P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί ακριβώς τη n γενιά}) = P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0).$$

Είναι $\{Z_n = 0, Z_{n-1} > 0\} \cup \{Z_n = 0, Z_{n-1} = 0\} = \{Z_n = 0\}$ και

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) + P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_n = 0).$$

Όμως $P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_{n-1} = 0)$ (γιατί;) άρα

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) = P(Z_n = 0) - P(Z_{n-1} = 0) = y_n – y_{n-1} = G_n(0) – G_{n-1}(0).$$

Παράδειγμα 7

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, …\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης. Για την τ.μ. Y γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3.

Να βρεθούν

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του πλήθους στην $9^η$ γενιά.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός την $3^η$ γενιά.

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

(δ) Αν υποθέσουμε ότι 5 ανεξάρτητα αντίγραφα αυτής της διαδικασίας διακλάδωσης εξελίσσονται ταυτόχρονα (δηλαδή $Z_0 = 5$), να υπολογιστεί η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

Λύση

(α) Υπολογίζουμε

$\mu = E(Y) = 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/3 = 3/2$

$Var(Y) = E[(Y – \mu)^2] = (0 – 3/2)^2 \cdot 1/6 + (1 – 3/2)^2 \cdot 1/2 + (3 – 3/2)^2 \cdot 1/3 = 5/4.$

$E(Z_9) = \mu^9 = (3/2)^9 = 38,4$

$Var(Z_9) = \sigma^2 \cdot \mu^8 (1 – \mu^9) / (1 – \mu) = 5/4 \cdot(3/2)^8 \cdot (1 – (3/2)^9) / (1 – 3/2) = 2.400$

Τυπική απόκλιση: $[Var(Z_9)]^{1/2} = 2.400^{1/2} = 49$ άτομα.

(β) Είναι $G(s) = s^0 \cdot 1/6 + s^1 \cdot 1/2 + s^3 \cdot 1/3 = 1/6\cdot(1 + 3s + 2s^3)$. Άρα,

$$
\begin{aligned}
P(Z_3 = 0, Z_2 > 0) &= P(Z_3 = 0) – P(Z_2 = 0) \\
&= G_3(0) – G_2(0) \\
&= G(G(G(0))) – G(G(0)) \\
&= 0{,}2977 – 0{,}2515 \\
&= 0{,}0462 \\
&= 4{,}62\%.
\end{aligned}
$$

(είναι $G(0) = 1/6$, $G(G(0)) = G(1/6) = 0{,}2515$ και $G(G(G(0))) = G(0{,}2515) = 0{,}2977$)

(γ) Είναι $\mu = 3/2 > 1$ άρα η πιθανότητα εξάλειψης είναι μικρότερη της μονάδας. Για να την υπολογίσουμε επακριβώς λύνουμε την εξίσωση $G(s) = s$ δηλαδή την εξίσωση

$1/6\cdot(1 + 3s + 2s^3) = s$, η οποία έχει ρίζες 1, $(-1 - 3^{0.5})/2$, $(-1 + 3^{0.5})/2$. Από αυτές η μικρότερη θετική ρίζα είναι η ζητούμενη λύση, δηλαδή $\gamma = (-1 + 3^{0.5})/2 = 0{,}366 = 36{,}6\%$

(δ) Πρόκειται για 5 ανεξάρτητες διεργασίες κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα εξάλειψης $\gamma = 0{,}366$. Συνεπώς, η πιθανότητα να συμβεί αυτό και στις 5 διεργασίες είναι

$$\gamma^5 = 0{,}366^5 = 0{,}0065 = 0{,}65\%$$

Παράδειγμα 8

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης και $Y \sim Poisson(\lambda)$.

(α) Υποθέτοντας πως δεν αποβιώνει κανένα μέλος του πληθυσμού, προσδιορίστε τον αναμενόμενο συνολικό πληθυσμό την $10^{η}$ γενιά.

(β) Προσδιορίστε, (και με τη βοήθεια υπολογιστή) την πιθανότητα να μην υπάρχουν μακροπρόθεσμα απόγονοι για λ = ½, λ = 1 και λ = 2.

Λύση

$$
\begin{aligned}
\text{(α) } & E(Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}) = \\
&= E(Z_0) + E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) + E(Z_5) + \\
&\quad + E(Z_6) + E(Z_7) + E(Z_8) + E(Z_9) + E(Z_{10}) \\
&= 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 + \mu^6 + \mu^7 + \mu^8 + \mu^9 + \mu^{10} \\
&= (\mu^{11} – 1) / (\mu – 1), \text{ αν } \mu \neq 1 \text{ ή } 11 \text{ αν } \mu =1.
\end{aligned}
$$

Σημείωση
Η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής ισχύει για κάθε σύνολο τυχαίων μεταβλητών.

(β) Y ~ Poisson(λ) άρα $G_Y(s) = e^{(s-1)\lambda}$. Λύνουμε την εξίσωση

$$G(s) = s \text{ ή } e^{(s-1)\lambda} = s.$$

Αν λ = ½ ή λ = 1 η μοναδική λύση είναι η s = 1 (αξιοποιήστε την ανίσωση $e^x \geq x + 1$).

Αν λ = 2 τότε με χρήση υπολογιστή εκτιμούμε s = 0,2032, άρα γ = 20,32%.

Παράδειγμα 9

Κάθε άτομο ενός πληθυσμού αναπαράγεται ανεξάρτητα από τους άλλους και δίνει τυχαίο πλήθος απογόνων ακολουθώντας την κατανομή

Πλήθος απογόνων	0	1	2	3+
Πιθανότητα	0,375	0,125	0,5	0

Στην παρούσα γενιά υπάρχουν 6 άτομα, κάθε ένα από τα οποία έχει τη δυνατότητα να παράξει απογόνους. Υπολογίστε την πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

Λύση

Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων είναι μ = E(Y) = 0 · 0,375 + 1 · 0,125 + 2 · 0,5 = 1,125.

Είναι μ > 1, άρα η πιθανότητα εξάλειψης γ για τον πληθυσμό που παράγεται από κάθε ένα άτομο είναι μικρότερη της μονάδας. Ιδιαίτερα, η πιθανότητα γ εξάλειψης για κάθε ένα άτομο αποτελεί τη μικρότερη θετική ρίζα της G(s) = s, όπου

$$G(s) = E(s^Y) = 0{,}375 + 0{,}125s + 0{,}5s^2 = 3/8 + 1/8\, s + ½\, s^2 = (3 + s + 4s^2)/8$$

Η επίλυση της εξίσωσης G(s) = s δίνει s = ¾ = 0,75 ή s = 1.

Κάθε ένα άτομο πρόκειται να εξαλειφθεί με πιθανότητα 0,75 = 75%. Συνεπώς, για τον αρχικό πληθυσμό των 6 ατόμων η πιθανότητα εξάλειψης είναι

$$\gamma^6 = 0{,}75^6 = 0{,}178 = 17{,}8\%$$

Παράδειγμα 10

Τα βακτήρια αναπαράγονται με διπλασιασμό. Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο είτε πεθαίνει με πιθανότητα ¼, είτε παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους με πιθανότητα ¼ είτε διπλασιάζεται με πιθανότητα ½. Ο αρχικός πληθυσμός των βακτηρίων είναι 100 άτομα. Έστω B_n η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό πλήθους βακτηρίων μετά n χρονικές στιγμές.

(α) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της B_n.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

(γ) Έστω m_n ο μέγιστος αριθμός βακτηρίων τη χρονική στιγμή n. Να βρεθεί ο m_n και να βρεθεί η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει αυτήν την μέγιστη τιμή τη χρονική στιγμή n.

(δ) Αν γνωρίζουμε πως τη χρονική στιγμή 50 υπάρχουν 1.000 βακτήρια, τότε να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων τη χρονική στιγμή 51.

Λύση

Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο αποδίδει 0 απογόνους (πεθαίνει) με πιθανότητα ¼, αποδίδει 1 απόγονο (τον ίδιο του τον εαυτό όταν παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους) με πιθανότητα ¼ και δύο απογόνους (διπλασιάζεται) με πιθανότητα ½.

(α) Έστω ζ_i το πλήθος απογόνων του i - οστού βακτηριδίου, i = 1, 2, …, 100 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος απογόνων του i – οστού βακτηριδίου την γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζ_i είναι

$$G(s) = \tfrac{1}{4} s^0 + \tfrac{1}{4} s^1 + \tfrac{1}{2} s^2 = \tfrac{1}{4} \cdot (1 + s + 2s^2),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \text{ o } G \text{ o } \dots \text{ o } G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν Z_n το πλήθος απογόνων των 100 βακτηρίων της n γενιάς τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_1^{(n)} + \dots + \zeta_{100}^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Z_n}(s) = [G^{(n)}(s)]^{100}.$$

(β) Κάθε βακτηρίδιο αναπαράγεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του συνολικού πληθυσμού είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων εξάλειψης κάθε ενός από αυτά. Η πιθανότητα εξάλειψης ενός από αυτά είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης G(s) = s.

Είναι: $G(s) = s \leftrightarrow 1 + s + 2s^2 = 4s \leftrightarrow 2s^2 - 3s + 1 = 0 \leftrightarrow s = \tfrac{1}{2}$ ή $s = 1$.

Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από ένα βακτήριο είναι γ = ½ = 0,5 = 50% και η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από το σύνολο όλων των 100 βακτηριδίων είναι $(\tfrac{1}{2})^{100} = 7{,}9 \cdot 10^{-31}$.

(γ) Το μέγιστο πλήθος βακτηριδίων προκύπτει όταν κάθε ένα από τα 100 βακτηρίδια διπλασιάζεται δηλαδή όταν δίνει 2 απογόνους. Άρα, $m_n = 100 \cdot 2^n$. Επιπλέον, σε κάθε ένα από τα βήματα i = 0, 1, 2, …, n, καθώς η πιθανότητα διπλασιασμού για ένα βακτήριο είναι ½, η πιθανότητα διπλασιασμού για τα m_n βακτήρια είναι (½)^m_n Υπολογίζουμε:

$P(Z_n = m_n) = P(Z_n = m_n, Z_{n-1} = m_{n-1}, \dots, Z_1 = m_1, Z_0 = m_0)$

$= P(Z_n = m_n | Z_{n-1} = m_{n-1}) \cdot P(Z_{n-1} = m_{n-1} | Z_{n-2} = m_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Z_1 = m_1 | Z_0 = m_0) \cdot P(Z_0 = m_0) =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100\left(2^{n-1} + \ldots + 2 + 1\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100 \cdot \left(2^n - 1\right)}$$

(δ) Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων για κάθε ένα από τα 1.000 βακτήρια είναι

$$M = E(Y) = 0 \cdot ¼ + ¼ \cdot 1 + ½ \cdot 2 = 5/4 = 1{,}25.$$

Άρα, το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων στο βήμα 51 για τα 1.000 βακτήρια θα είναι

$M_{1000} = 1000 \cdot M = 1000 \cdot 1{,}25 = 1.250$ βακτήρια.

Σημειώσεις

Είναι $G'(s) = [¼ \cdot (1 + s + 2s^2)]' = ¼ \cdot (1 + 4s)$. Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων ισοδύναμα μπορούμε να το υπολογίσουμε ως $\mu = G'(1) = 5/4$. Επιπλέον, αξιοποιήθηκε η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής που ισχύει για κάθε ομάδα τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 11

Ένα παιχνίδι τύχης ξεκινάει με 3 ευρώ στο τραπέζι. Κάθε παίκτης ρίχνει ένα ζάρι.

Αν το ζάρι είναι 1 ή 2 τότε ο παίκτης παίρνει 1 ευρώ από τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 3 τότε ξαναρίχνει.

Αν το ζάρι είναι 4 τότε βάζει 1 ευρώ στο τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 5 ή 6 βάζει 2 ευρώ στο τραπέζι.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν δεν υπάρχουν πλέον χρήματα στο τραπέζι.

(α) Προσδιορίστε τα “άτομα”, και τις έννοιες της “αναπαραγωγής” και της “γενιάς” βάσει των οποίων το παραπάνω παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία διακλάδωσης.

(β) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού πλήθος ευρώ Z_n που απομένουν στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος χρημάτων στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία το παιχνίδι τελικά θα σταματήσει.

Λύση

(α) Για να εκφράσουμε τη διαδικασία του παιχνιδιού ως μία διαδικασία διακλάδωσης θεωρούμε ως αρχικό “άτομο” κάθε ένα από τα 3 ευρώ που βρίσκονται αρχικά στο τραπέζι και κάθε “γενιά” τα ευρώ που 0απομένουν στη θέση του κάθε ενός, μετά από μία συνεχόμενη ακολουθία παιχνιδιών σε πλήθος όσα και τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι. Δηλαδή, αν $Z_0 = 3$, τότε

Z_1 = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από 3 ρίψεις.

Αν (για παράδειγμα) μετά από 3 ρίψεις τα ευρώ στο τραπέζι είναι 4 τότε

Z_2 = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από άλλες 4 ρίψεις.

Με την παραπάνω θεώρηση, το κάθε ευρώ που βρίσκεται στο τραπέζι οποιαδήποτε χρονική στιγμή προσομοιάζει σε “άτομο” που “αναπαράγεται” με πλήθος απογόνων Y, όπου

$P(Y = 0) = 2/6 = 1/3$ (με 1 ή 2 ο παίκτης παίρνει ένα ευρώ)

$P(Y = 1) = 1/6$ (με 3 το ευρώ μένει άθικτο)

$P(Y = 2) = 1/6$ (με 4 το ευρώ διπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει ένα)

$P(Y = 3) = 2/6 = 1/3$ (με 5 ή 6 το ευρώ τριπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει δύο)

(β) Έστω ζ_i το πλήθος των ευρώ που μένουν στη θέση του i - οστού ευρώ, i = 1, 2, 3 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος ευρώ τη γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζ_i είναι

$$G(s) = 1/3\, s^0 + 1/6\, s^1 + 1/6\, s^2 + 1/3\, s^3 = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \text{ o } G \text{ o } \dots \text{ o } G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν Z_n το πλήθος ευρώ “απογόνων” των 3 αρχικών ευρώ στη n γενιά τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} + \zeta_3^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Zn}(s) = [G^{(n)}(s)]^3.$$

(γ) Είναι $G^{(1)}_{Zn}(s) = 3[G^{(n)}(s)]^2[G^{(n)}(s)]^{(1)}$ και

$$[G^{(n)}(s)]^{(1)} = G^{(1)}(G^{(n-1)}(s)) \cdot G^{(1)}(G^{(n-2)}(s)) \cdot \dots \cdot G^{(1)}(s)$$

Καθώς $G(1) = 1$, υπολογίζουμε, $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(G^{(1)}(1))^n$.

Είναι, $G(s) = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3)$, άρα $G^{(1)}(s) = 1/6 \cdot (1 + 2s + 6s^2)$ και $G^{(1)}(1) = 9/6 = 3/2$.

Καταλήγουμε ότι: $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(3/2)^n = 3^{n+1}/2^n$.

(δ) Η πιθανότητα εξάλειψης γ του κάθε ενός από τα αρχικά ευρώ είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης $G(s) = s$. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε $s = -2$, $s = ½$ και $s = 1$, άρα $γ = ½ = 0{,}5 = 50\%$. Καθώς κάθε ένα από τα αρχικά ευρώ αντικαθίσταται με τρόπο ανεξάρτητο με τα άλλα, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα το παιχνίδι να σταματήσει είναι

$$(1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

Πίνακας Διαγραμμάτων