

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙΙ

Συνοπτική Θεωρία 1^ο Μέρος

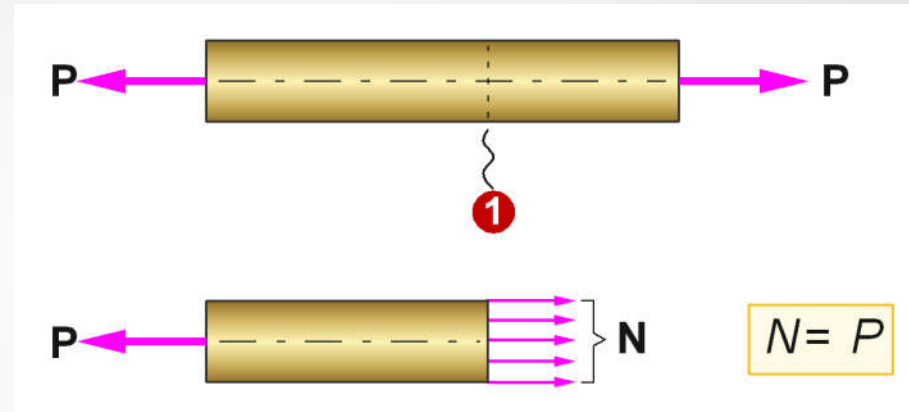
*Σύμφωνα με το βιβλίο του
Δρ. Παναγιώτη Α. Βουθούνη*



Ορθή τάση

Ορθή τάση

- Θεωρείται μια ευθύγραμμη ράβδος με εμβαδό διατομής A , στα άκρα της οποίας ασκούνται δύο, ίσες κατά μέτρο και με αντίθετη φορά, αξονικές εφελκυστικές δυνάμεις. Για την εύρεση της εσωτερικής έντασης της ράβδου, θεωρούμε την τομή 1 όπως στο σχήμα.



- Όπως γνωρίζουμε, στην τομή αναδεικνύονται οι εσωτερικές δυνάμεις: η αξονική δύναμη N , η τέμνουσα δύναμη Q και η καμπτική ροπή M . Εν προκειμένω, $Q=M=0$.
- Στην πραγματικότητα, στην τομή αναδεικνύονται πολλές απειροστές δυνάμεις dP , η κάθε μία σε μια απειροστή επιφάνεια dA . Αυτές αθροιστικά ισούνται με N .

Επιπλέον, από ισορροπία, $N=P$.

Ορθή τάση

- Ονομάζουμε **ορθή τάση** σ σε ένα σημείο D :

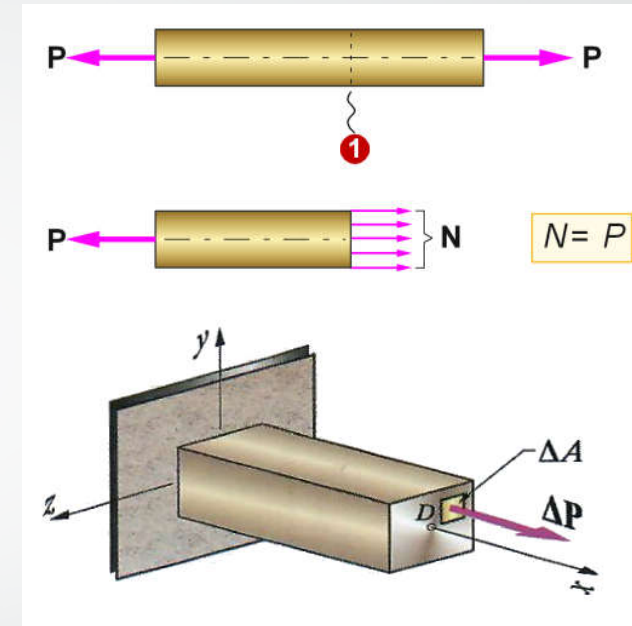
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta P / \Delta A = dP / dA$$

από το οποίο προκύπτει ότι $dP = \sigma dA$.

- Η τάση είναι **θετική** όταν είναι **εφελκυστική**, **αρνητική** όταν είναι **θλιπτική**.
- Αν επιπλέον θεωρήσουμε ως παραδοχή ότι η ορθή τάση σ είναι σταθερή σε ολόκληρη την επιφάνεια της τομής 1, (το οποίο είναι κοντά στην πραγματικότητα αν η επιφάνεια A είναι μικρή σε σχέση με το μήκος και αν βρισκόμαστε αρκετά μακριά από τα σημεία επιβολής των P), τότε θα πρέπει:

$$P = N = \int dP = \int \sigma dA = \sigma_{ave} \int dA = \sigma_{ave} A \Rightarrow \sigma_{ave} = P / A.$$

Η τάση $\sigma_{ave} = P / A$ ονομάζεται ειδικότερα **μέση ορθή τάση (average normal stress)**.

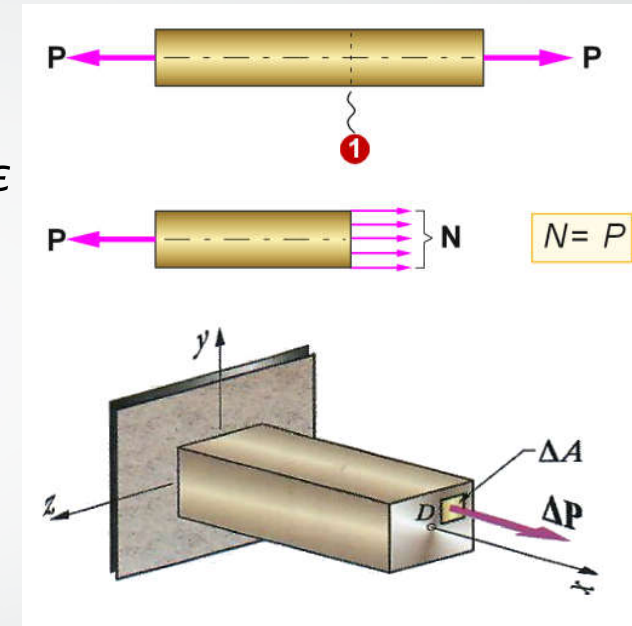


Ορθή τάση

- Η τάση $\sigma_{ave} = P / A$ ονομάζεται **μέση** διότι θεωρούμε ότι είναι σταθερή σε όλη την διατομή. Στην πραγματικότητα, η μετρούμενη τάση σε διάφορα σημεία της διατομής μπορεί να διαφέρει από την μέση τάση.
- Η τάση ονομάζεται **ορθή** διότι είναι **κάθετη** προς την επιφάνεια της τομής.
- Η τάση έχει μονάδες $[\sigma] = FL^{-2}$.

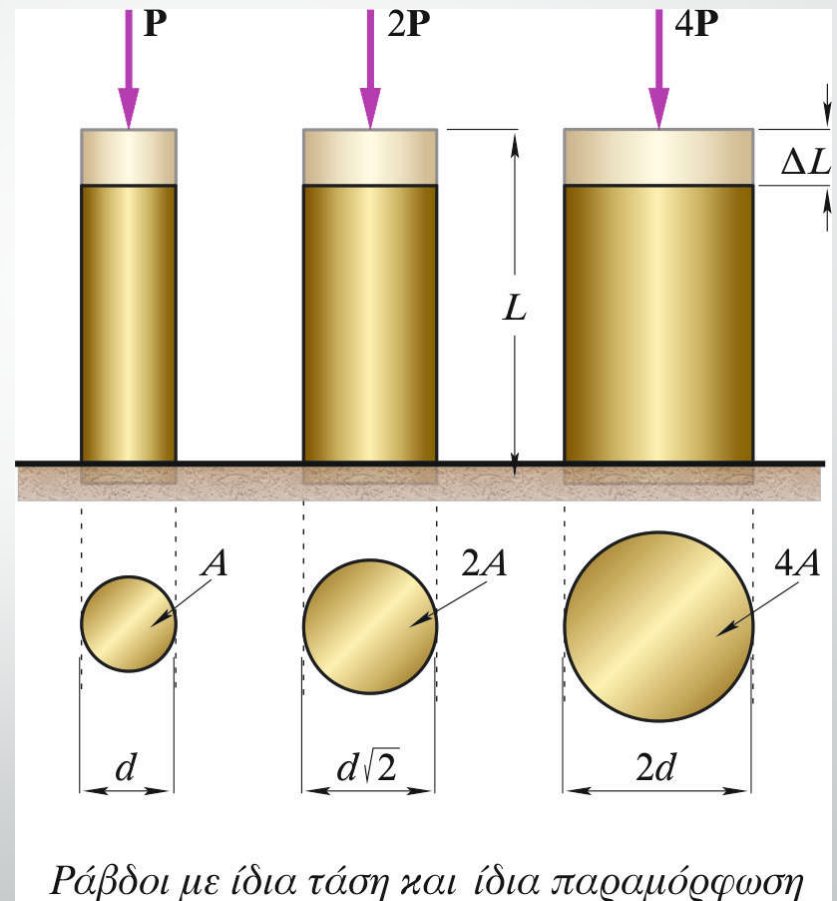
Στο S.I. χρησιμοποιείται το Pascal: $1 Pa = 1 N/m^2$, καθώς και τα παράγωγά του:
 $1 kPa = 1 kN/m^2 = 10^3 Pa$, $1 MPa = 1 MN/m^2 = 10^6 Pa$, $1 GPa = 1 GN/m^2 = 10^9 Pa$.

- Άλλες μονάδες τάσης: $1 at = kp/cm^2$ (1 ατμόσφαιρα, με $1 kp = 9.81 N = 1 kgf$),
 $1 bar = 10^5 N/m^2$, $1 psi = 1 lb/in^2 \approx 7 kPa$, $1 ksi = 10^3 psi$, κ.ο.κ.



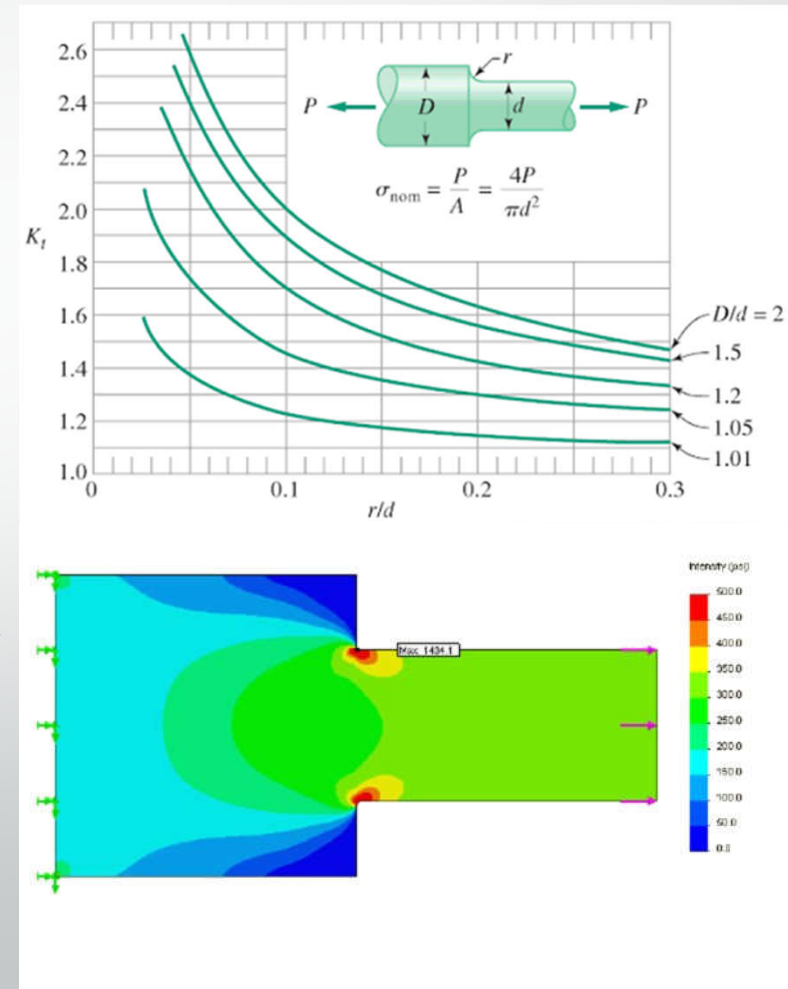
Ορθή τάση

- Πρέπει να γίνει σαφές ότι η επάρκεια ενός μέλους **δεν εξαρτάται από την δύναμη** που επιβάλλεται στο μέλος, αλλά από την **τάση που προκύπτει**.
- Μας ενδιαφέρει λοιπόν ιδιαίτερα η **μέγιστη τάση σ_{max}** η οποία, για την ίδια αξονική δύναμη P , θα παρατηρηθεί στην ελάχιστη διατομή A_{min} .
- Θα δούμε ότι και η παραμόρφωση (δηλαδή η αλλαγή των διαστάσεων) θα εξαρτάται από την τάση (αλλά και το είδος του υλικού).



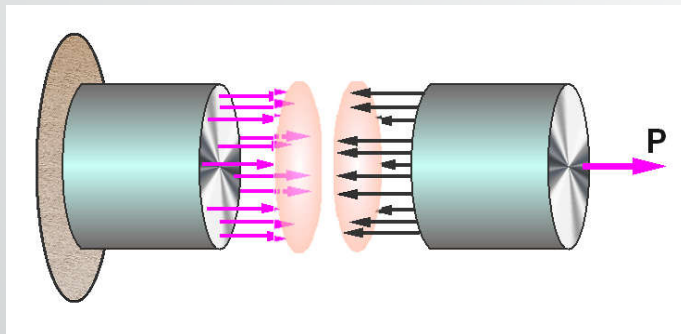
Ορθή τάση

- Η μέση ορθή τάση $\sigma_{ave} = P/A$ έχει νόημα σε πρισματικές ράβδους ή, κατά καλή προσέγγιση, σε ράβδους με ομαλά μεταβαλλόμενη διατομή.
- Έντονες και απότομες μεταβολές στην γεωμετρία προκαλούν «ανωμαλίες» στο πεδίο των τάσεων και οδηγούν σε «συγκέντρωση τάσεων». Τα σημεία συγκέντρωσης τάσεων είναι ιδιαίτερα επίφοβα διότι σε αυτά οφείλονται οι αστοχίες του υλικού, π.χ. **εκεί ξεκινάνε κατά κανόνα οι ρωγμές** και διαδίδονται μέσα στο υλικό.
- $K_t \rightarrow$ συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων.

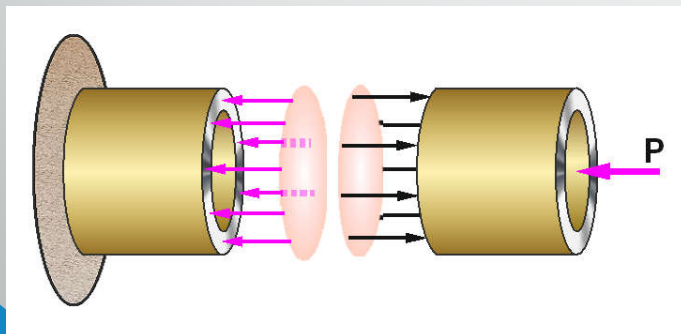


Ορθή τάση

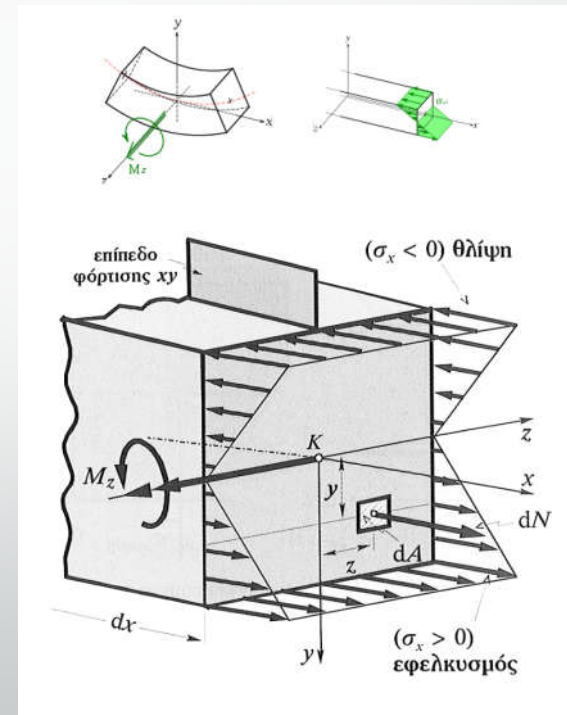
- **Ορθές τάσεις προκύπτουν φυσικά από αξονική καταπόνηση (εφελκυσμό και θλίψη). Προκύπτουν όμως και από καμπτική καταπόνηση.**



Ορθές τάσεις λόγω εφελκυσμού



Ορθές τάσεις λόγω θλίψης



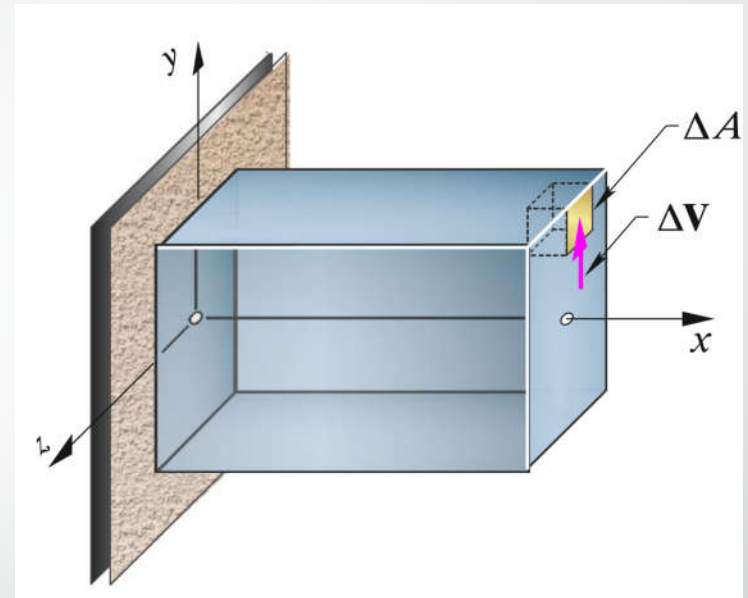
Ορθές τάσεις λόγω καθαρής κάμψης



Διατμητική τάση

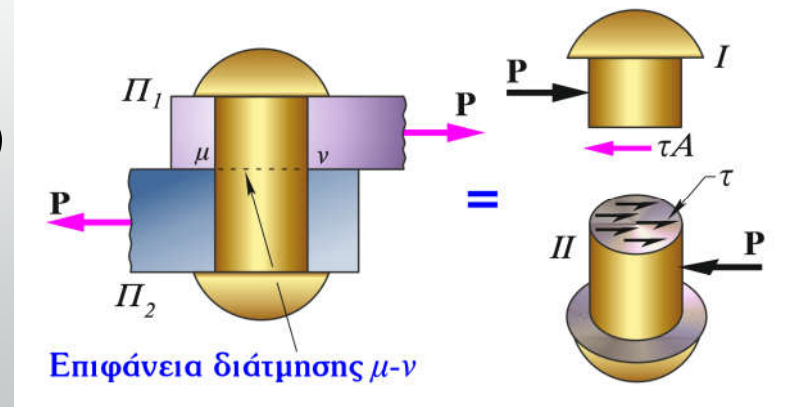
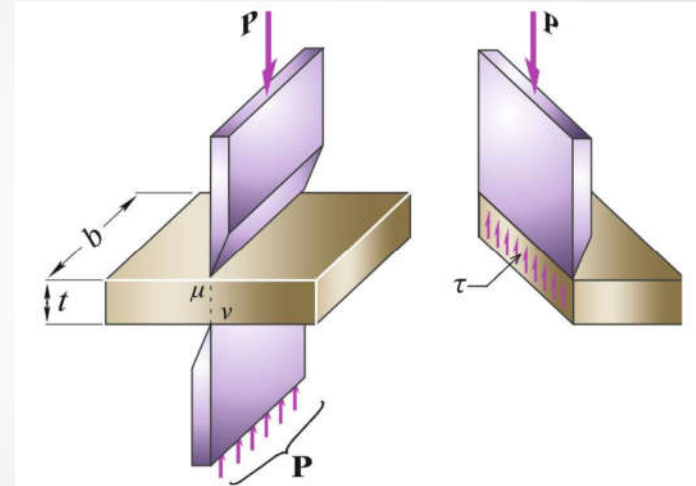
Διατμητική τάση

- Θεωρείται μια πακτωμένη δοκός με εμβαδό διατομής A . Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA στην οποία ασκείται τέμνουσα δύναμη ΔV .
- Ορίζουμε την διατμητική τάση (*shear stress*) ως εξής:
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta V / \Delta A = dV / dA$$
- Η διατμητική τάση δρα **επί του επιπέδου της τομής**, σε αντίθεση με την ορθή τάση που είναι κάθετη σε αυτό.



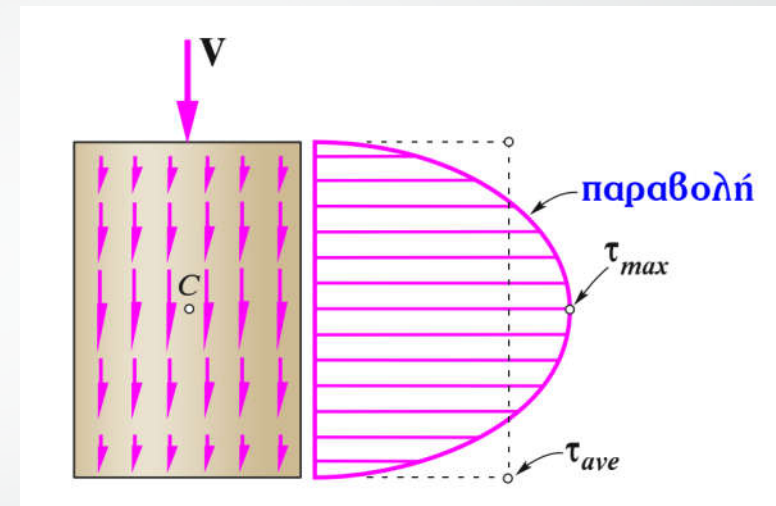
Διατμητική τάση

- Στην περίπτωση της **απλής ή άμεσης διάτμησης**, δύο αντίθετες δυνάμεις τείνουν να αποτμήσουν μια επιφάνεια.
- Το υλικό ανθίσταται αναπτύσσοντας μια διατμητική τάση.
- Για την πρώτη εικόνα (απότμηση ελάσματος), η **μέση** διατμητική τάση είναι: $\tau_{ave} = \frac{P}{b \cdot t}$.
- Για την δεύτερη εικόνα (μονότμητος ήλος) η **μέση** διατμητική τάση είναι:
$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d^2 / 4}$$



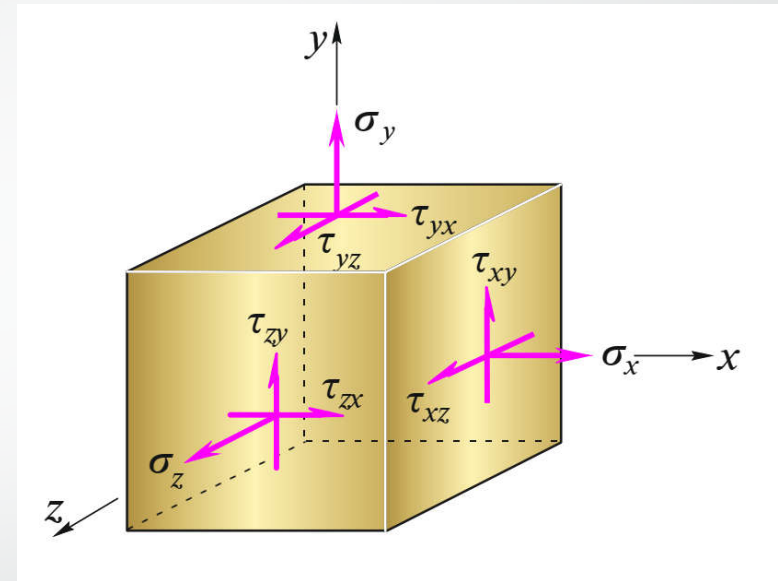
Διατμητική τάση

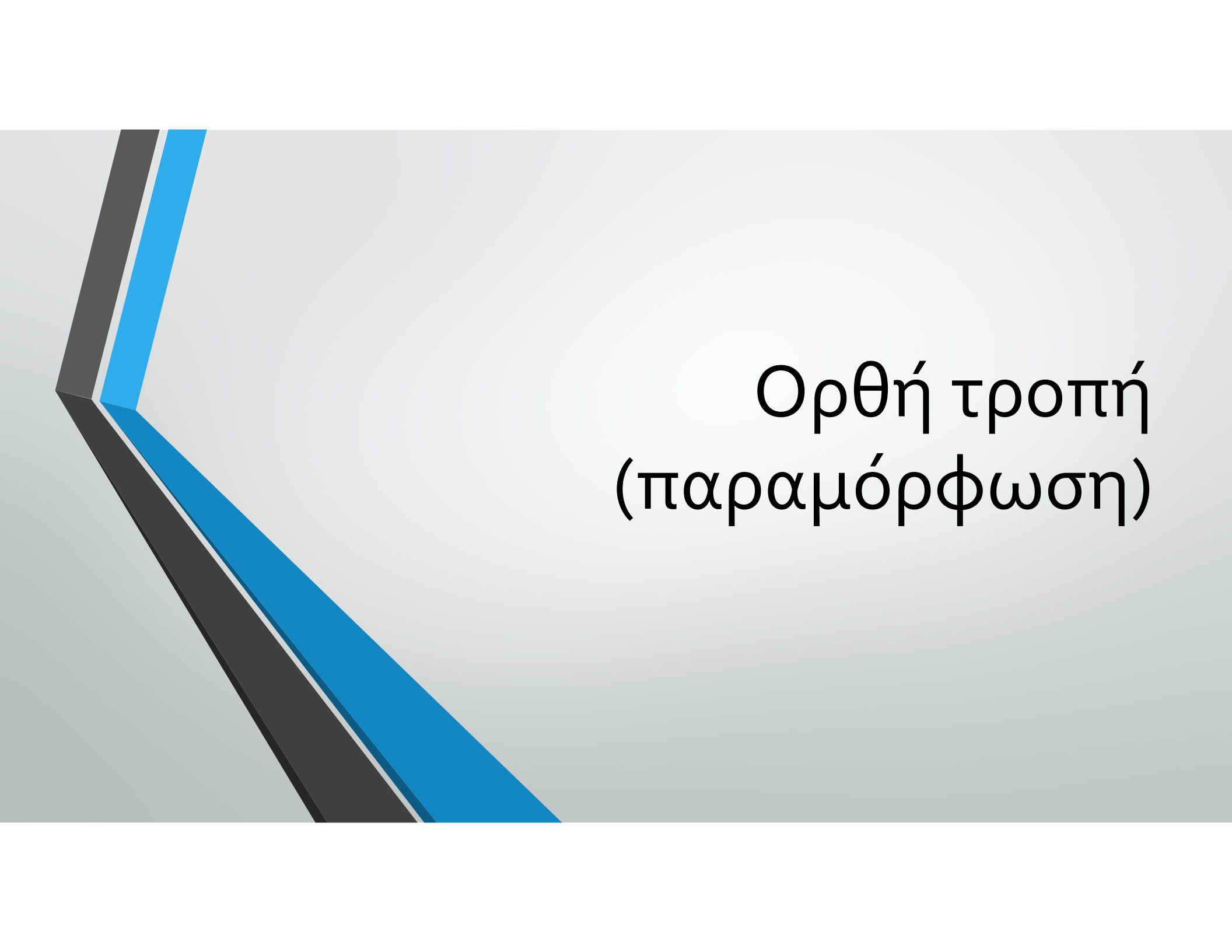
- Στην περίπτωση της **έμμεσης διάτμησης**, αυτή αναπτύσσεται **λόγω της τέμνουσας δύναμης** που δρα σε μια επιφάνεια.
- Η **μέση** διατμητική τάση είναι: $\tau_{ave} = \frac{V}{A}$.
- Στην πραγματικότητα η κατανομή των διατμητικών τάσεων δεν είναι ομοιόμορφη, αλλά **παραβολική**. Η διατμητική τάση είναι μηδενική στο άνω και κάτω άκρο, ενώ λαμβάνει την μέγιστη της τιμή στο ύψος του γεωμετρικού κέντρου της διατομής C .



Διατμητική τάση

- Στην γενικότερη περίπτωση, η διεύθυνση και προσήμανση των ορθών (σ) και διατμητικών (τ) τάσεων ακολουθεί το διπλανό σχήμα.
- Η ορθή τάση σ_x είναι κάθετη στο επίπεδο yz , η ορθή τάση σ_y είναι κάθετη στο επίπεδο zx , η ορθή τάση σ_z είναι κάθετη στο επίπεδο xy .
- Η διατμητική τάση τ ακολουθείται από δύο δείκτες:
 - Ο **πρώτος** υποδεικνύει τον άξονα στον οποίο είναι **κάθετη** η διατμητική τάση.
 - Ο **δεύτερος** υποδεικνύει τον άξονα προς τον οποίο είναι **παράλληλη** η διατμητική τάση.

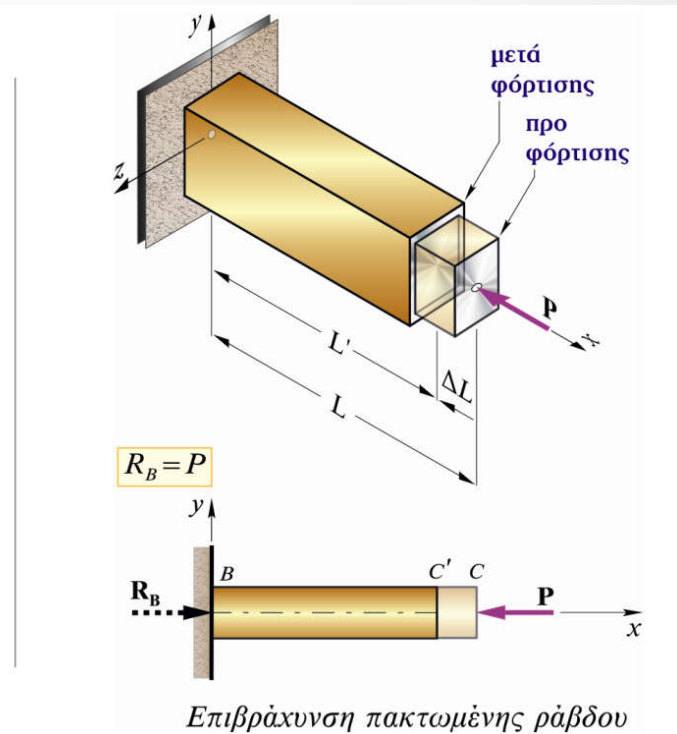
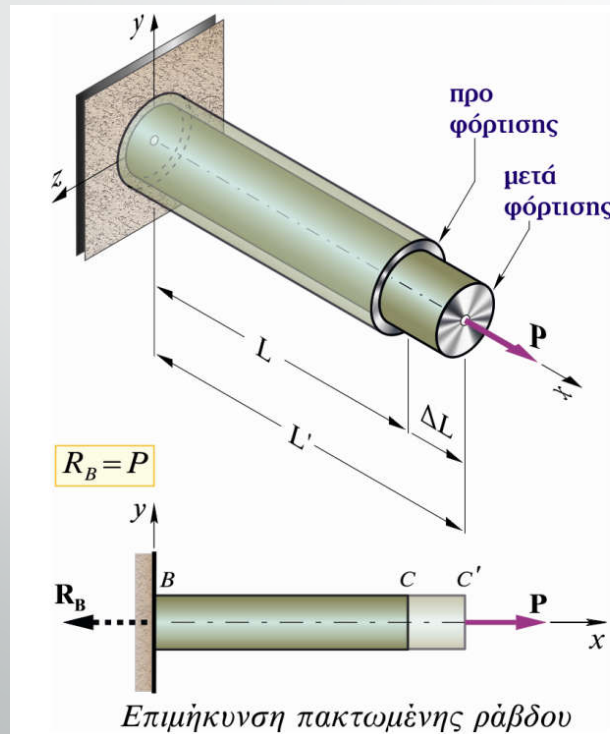




Ορθή τροπή
(παραμόρφωση)

Ορθή τροπή (παραμόρφωση)

- Θεωρείται πρισματική ευθύγραμμη ράβδος υπό αξονική δύναμη. Αυτή παραμορφώνεται (αλλάζει μήκος), όπως στο σχήμα.
Στην περίπτωση **εφελκυστικής** δύναμης P , $\Delta L > 0$ (επιμήκυνση – elongation).
Στην περίπτωση **θλιπτικής** δύναμης P , $\Delta L < 0$ (επιβράχυνση – shortening).



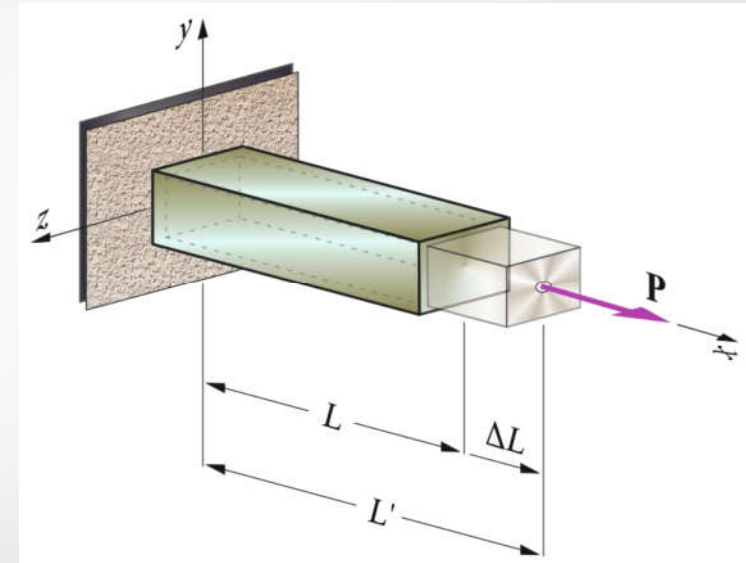
Ορθή τροπή (παραμόρφωση)

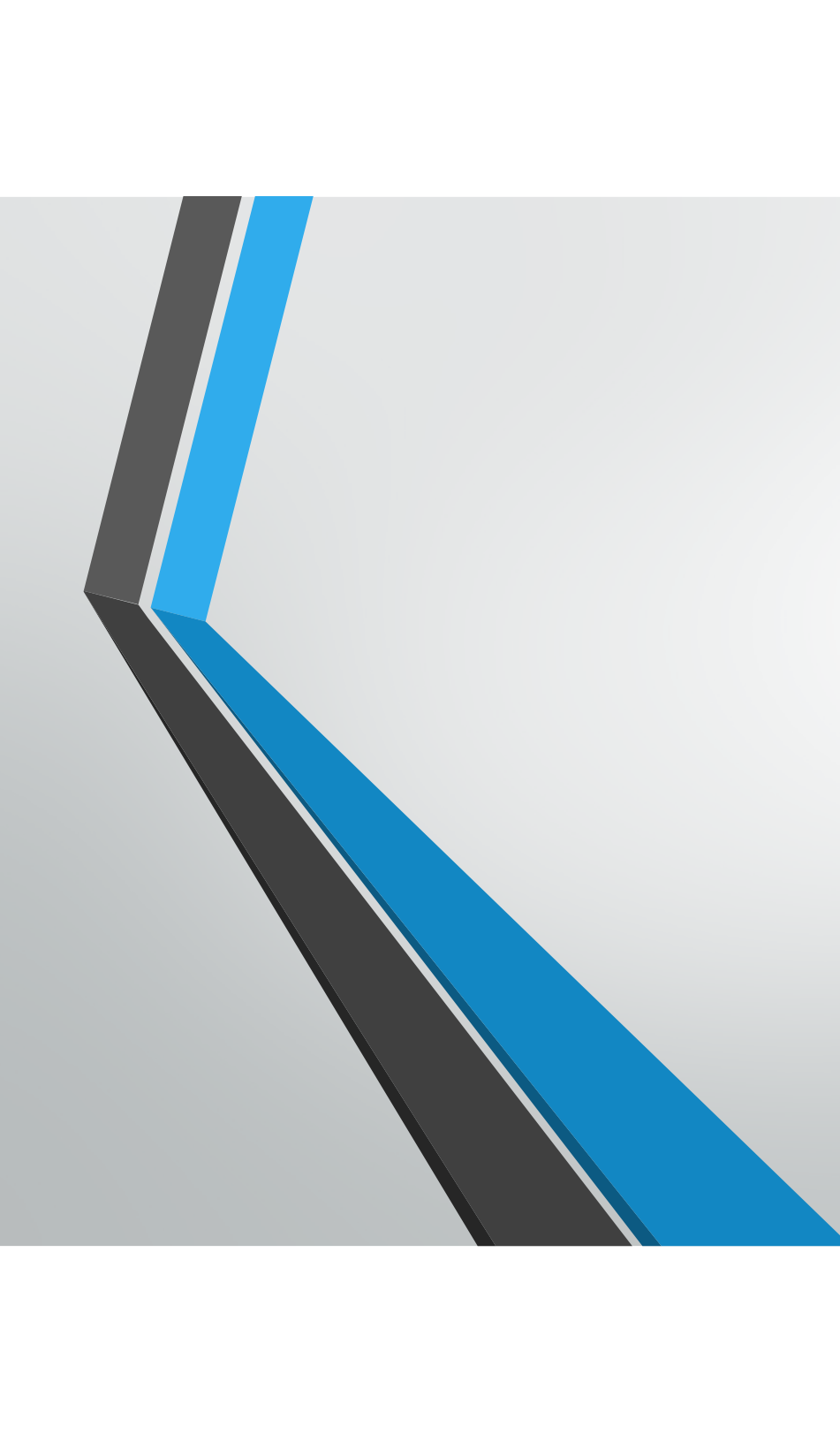
- Το τελικό μήκος είναι $L' = L + \Delta L$.
- Ορίζουμε ως **ανηγμένη τροπή**, ή **ανηγμένη παραμόρφωση**, την αδιάστατη ποσότητα

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L} = \frac{L'}{L} - 1.$$

- Επειδή υπολογίζεται με βάση το αρχικό μήκος, πολλές φορές αναφέρεται ως **ανηγμένη συμβατική** παραμόρφωση.
- Σε περιοχή της δοκού μήκους Δx , της οποίας το μήκος αλλάζει κατά $\Delta \delta$, μπορούμε να ορίσουμε την παραμόρφωση ως:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

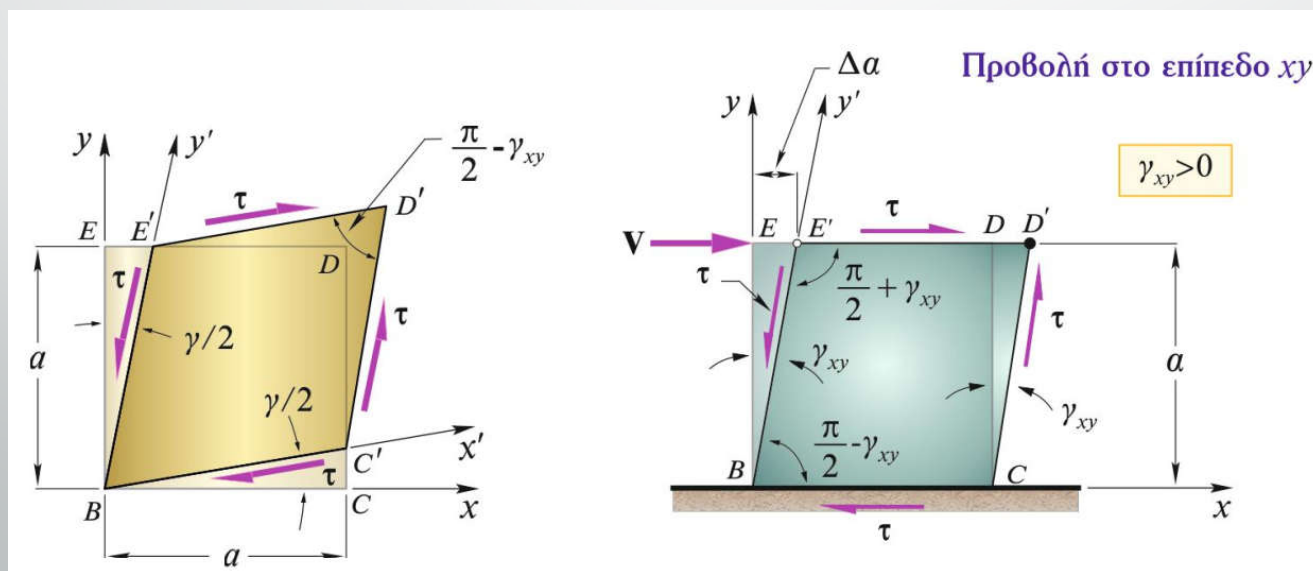




Διατμητική τροπή (παραμόρφωση)

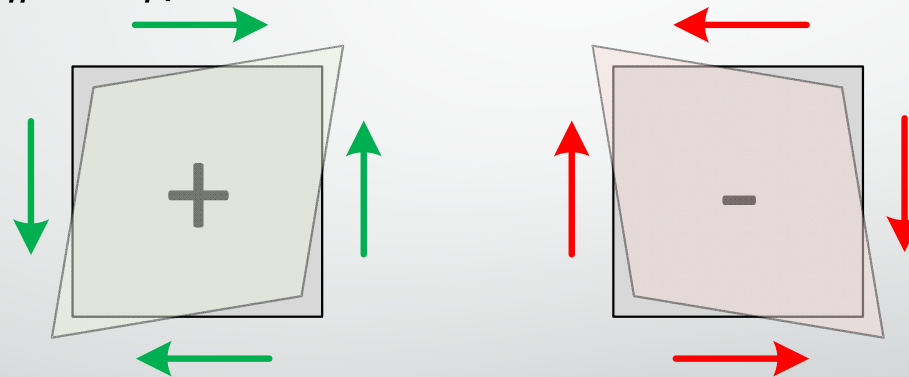
Διατμητική τροπή (παραμόρφωση)

- Υπό την επίδραση διατμητικής τάσης τ παρατηρείται στρέβλωση ενός στοιχειώδους τετραγώνου σε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Μέτρο της στρέβλωσης είναι η **γωνιακή τροπή** ή **γωνιακή παραμόρφωση** ή **διατμητική τροπή** ή **διατμητική παραμόρφωση** γ (αδιάστατο μέγεθος, γωνία σε rad).
- Επειδή έχουμε πολύ μικρές γωνίες, $\gamma \cong \tan(\gamma) \cong \sin(\gamma)$. Τότε:
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \cong \tan(\gamma) = \frac{(DD')}{(CD)} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}.$$



Διατμητική τροπή (παραμόρφωση)

- **Κανόνας αμοιβαιότητας των διατμητικών τάσεων (πρόταση του Cauchy):**
Οι διατμητικές τάσεις είναι όλες ίσες μεταξύ τους, και ανά δύο, είτε κατευθύνονται στην κοινή ακμή του πρίσματος είτε απομακρύνονται από αυτήν.
- **Σήμανση διατμητικών παραμορφώσεων:** σύμφωνα με την παρακάτω «συσκευή προσήμανσης».

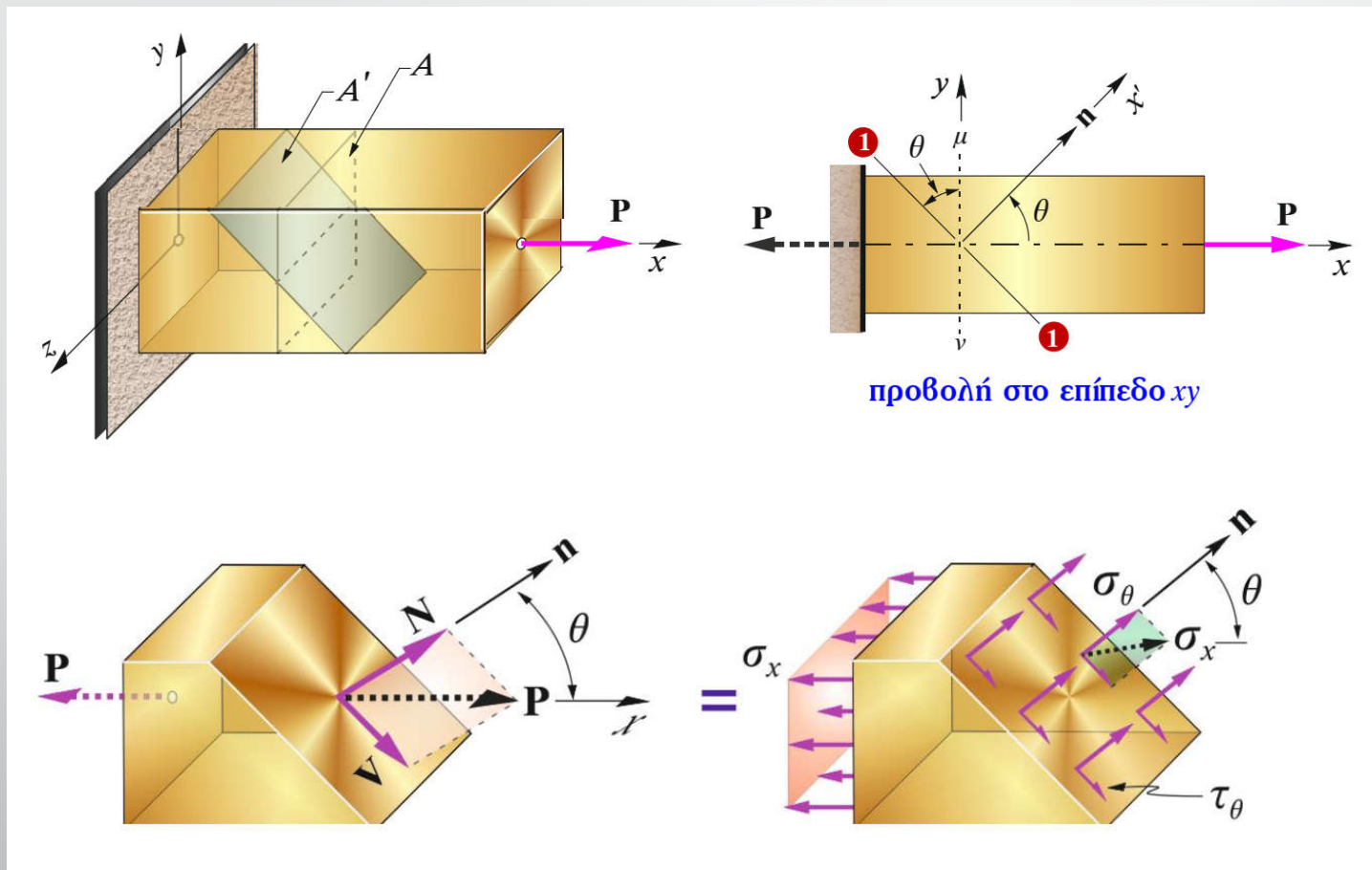


- **Σημαντική σημείωση:** οι ορθές τάσεις προκαλούν μόνον μεταβολές μηκών, οι διατμητικές τάσεις προκαλούν μόνον μεταβολές γωνιών.

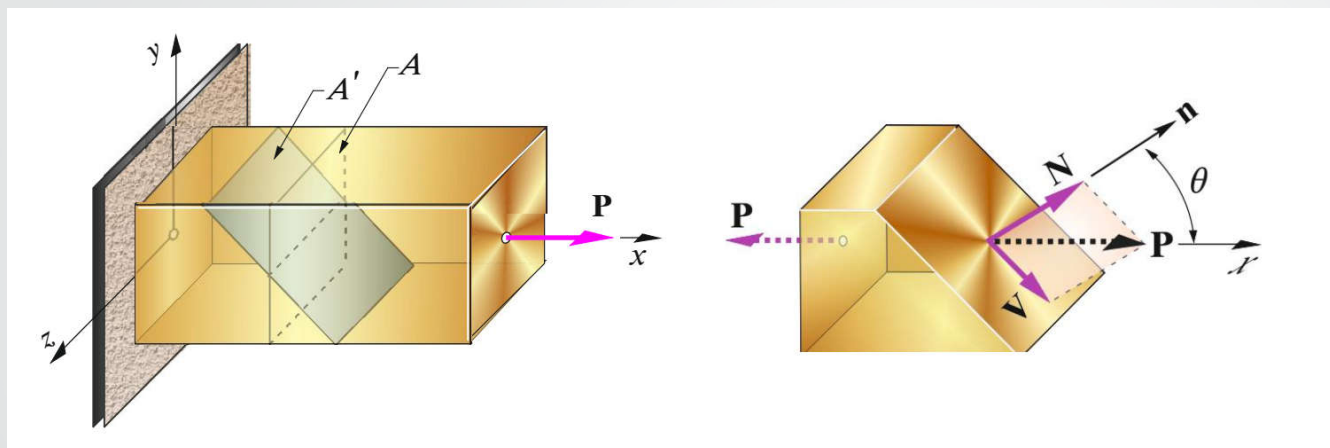


Τάσεις σε πλάγιες τομές

Τάσεις σε πλάγιες τομές



Τάσεις σε πλάγιες τομές

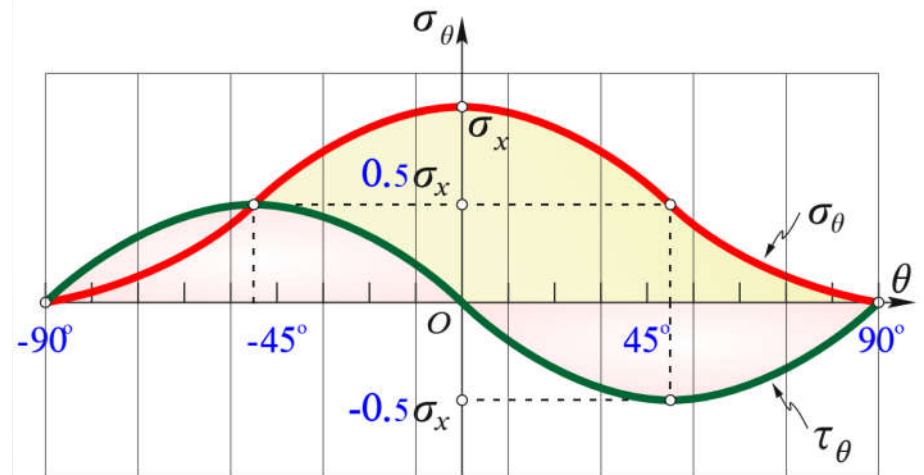
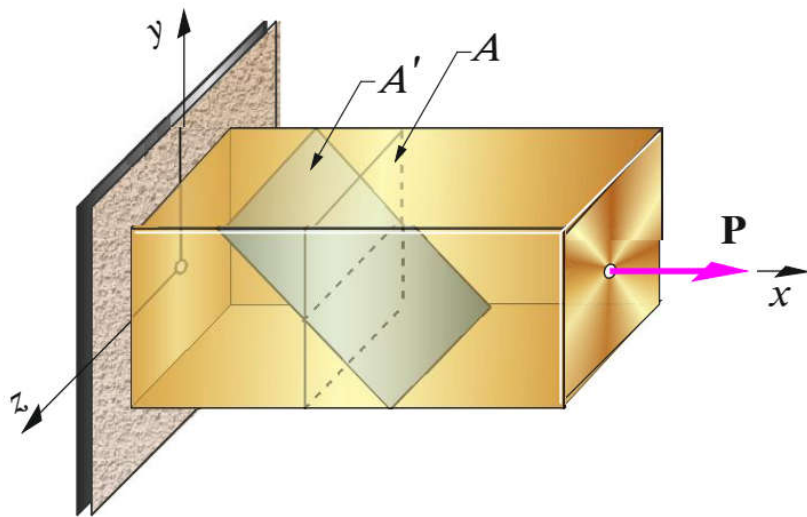


- $\sigma_{\theta} = \frac{N}{A'} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$
- $\tau_{\theta} = \frac{-V}{A'} = \frac{-P \sin \theta}{A / \cos \theta} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$

Διότι $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

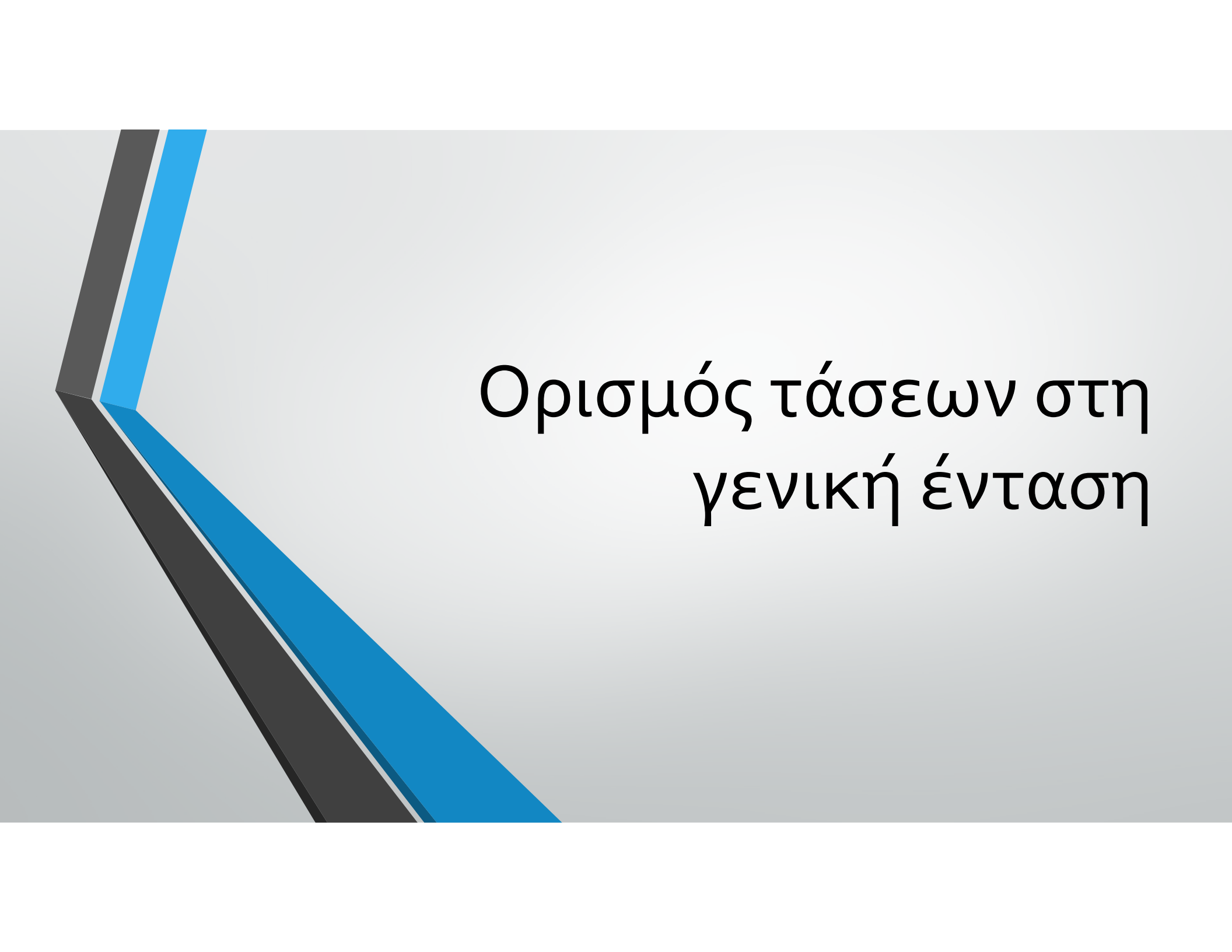
Τάσεις σε πλάγιες τομές

- $\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta), \tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$



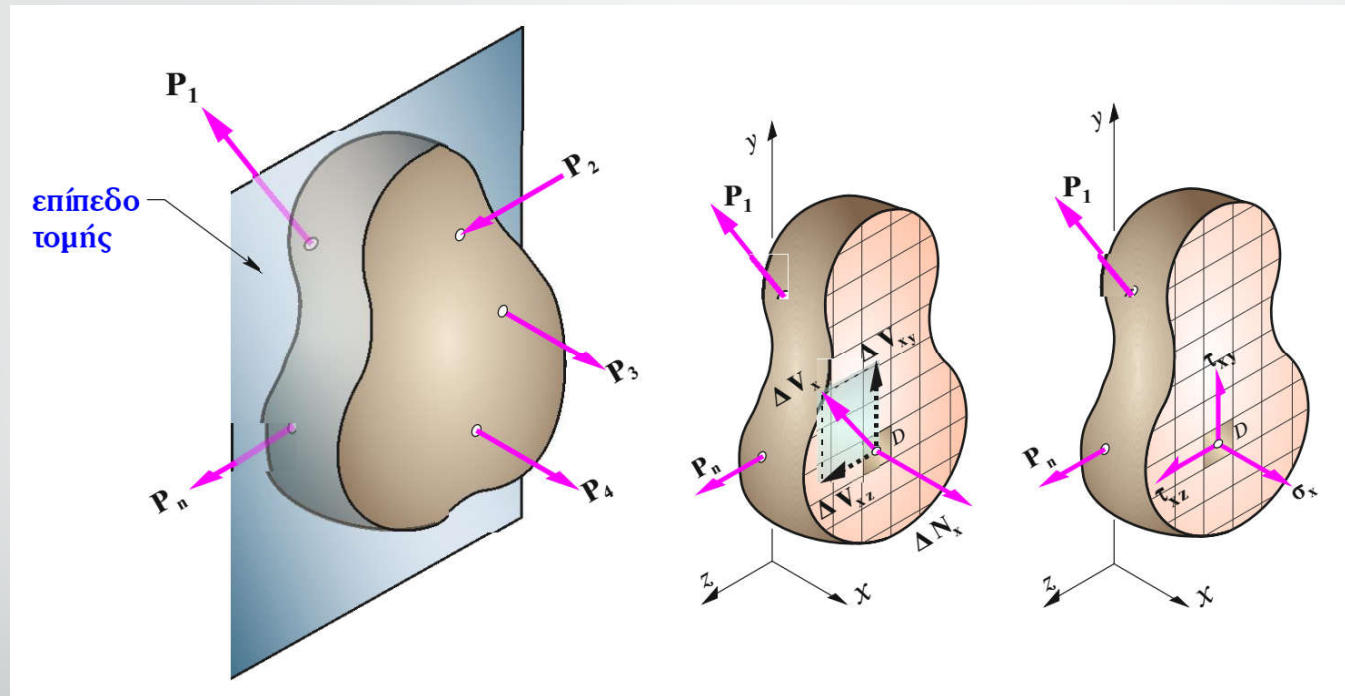
Οι τάσεις σ_{θ} και τ_{θ} συναρτήσει της γωνίας θ

- Αν και η τ_{max} είναι μόνο το μισό της σ_{max} **συνήθως αυτή αποτελεί το βασικό κριτήριο αστοχίας**, γιατί η διατμητική αντοχή είναι πολύ μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη εφελκυστική σε πολλά υλικά (π.χ. όλκιμα).



Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση

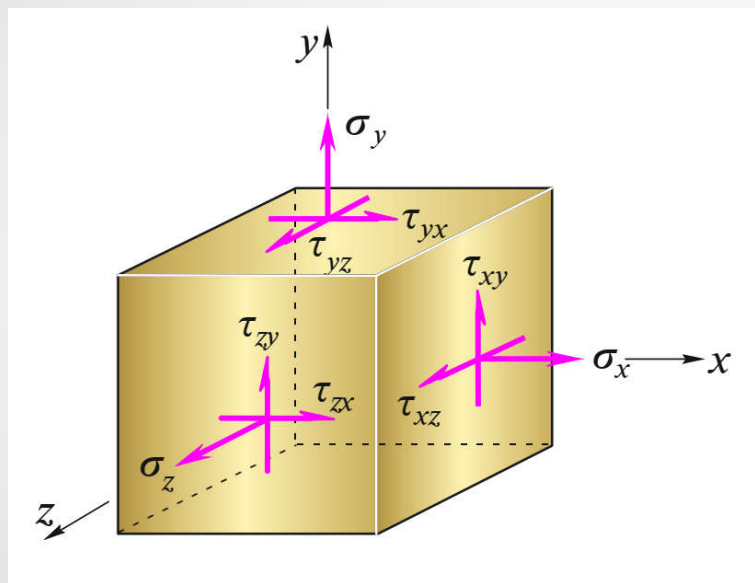
Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση



- Ορισμός τάσεων (στο επίπεδο yz):

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A}, \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xy}}{\Delta A}, \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{xz}}{\Delta A}.$$

Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση



- Αμοιβαιότητα των διατμητικών τάσεων:

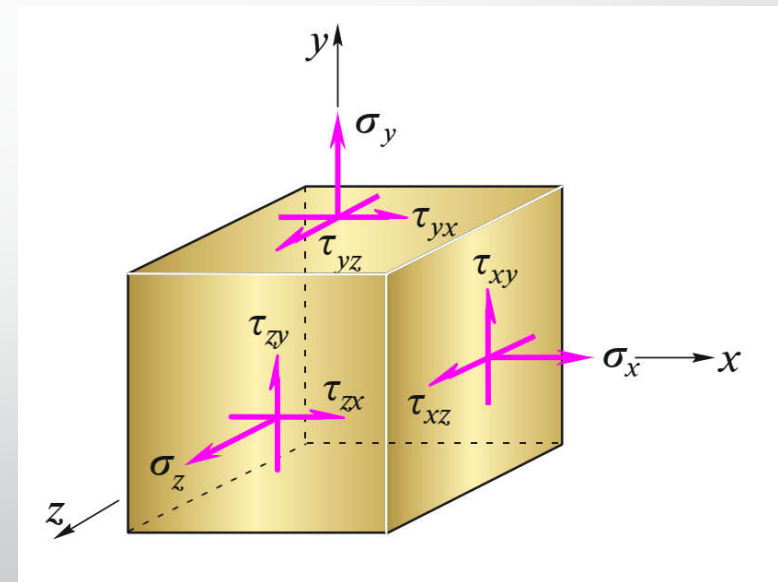
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση

- Η τάση σε ένα σημείο αναπαρίσταται από έναν **τανυστή β' τάξης**, δηλαδή μια μαθηματική οντότητα που μπορεί να αποτυπωθεί σε έναν δισδιάστατο πίνακα, αλλά που υπακούει και σε επιπλέον νόμους μετασχηματισμού.
- Στην περίπτωση μας, η τάση αναπαρίσταται με τον 3×3 πίνακα:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- Λόγω αμοιβαιότητας των διατμητικών τάσεων ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), ο πίνακας $[\sigma]$ είναι **συμμετρικός**.

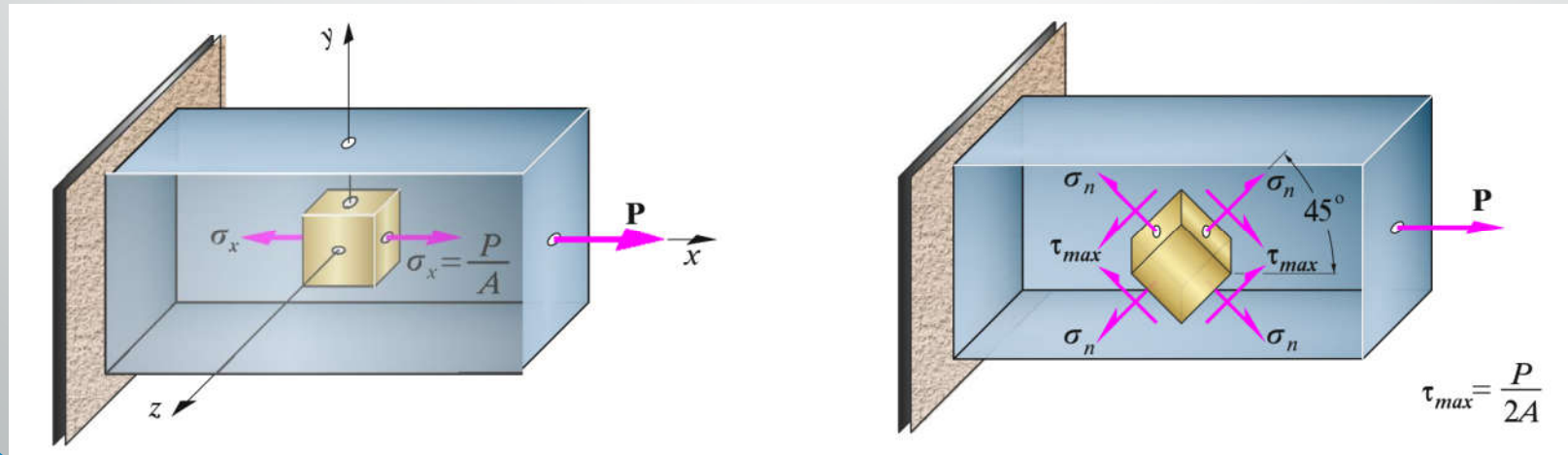


Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση

- Στην περίπτωση **επίπεδης έντασης**, όπου όλες οι τάσεις αναπτύσσονται σε ένα και μόνο επίπεδο, έστω το xy , ο τανυστής της τάσης αναπαρίσταται από τον 2×2 πίνακα:

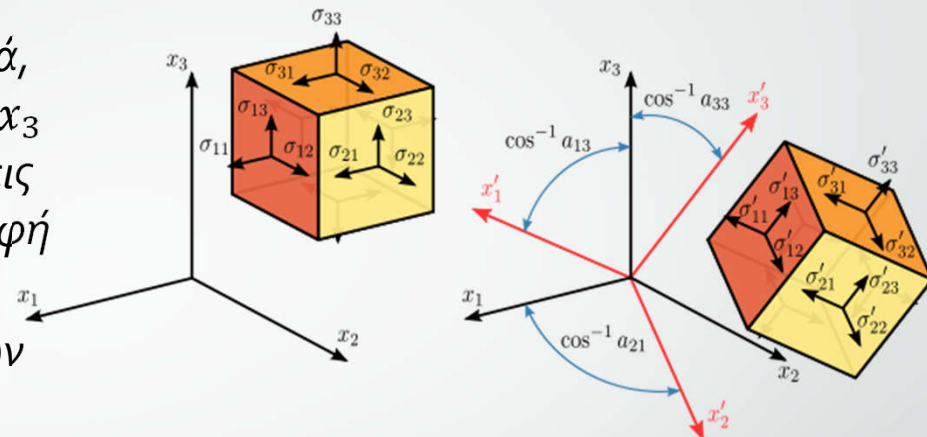
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

- Στην περίπτωση αυτή, θα είναι $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$.



Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση

- Μερικές φορές, επειδή βολεύει αλγοριθμικά, αντικαθιστούμε τα x, y, z με άξονες x_1, x_2, x_3 χωρίς να αλλάζει τίποτα άλλο. Όλες οι τάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν από την μορφή σ_{ij} , με i, j ακέραιους. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον ταχυστή των τάσεων με περιστροφή ως προς 3 άξονες:



- Σε κάθε περίπτωση φόρτισης, υπάρχει ένας ειδικός προσανατολισμός των νέων αξόνων x'_1, x'_2, x'_3 , για τον οποίο όλες οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται.

- Τότε ο $[\sigma]$ παίρνει την μορφή
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$
, όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι οι κύριες τάσεις.

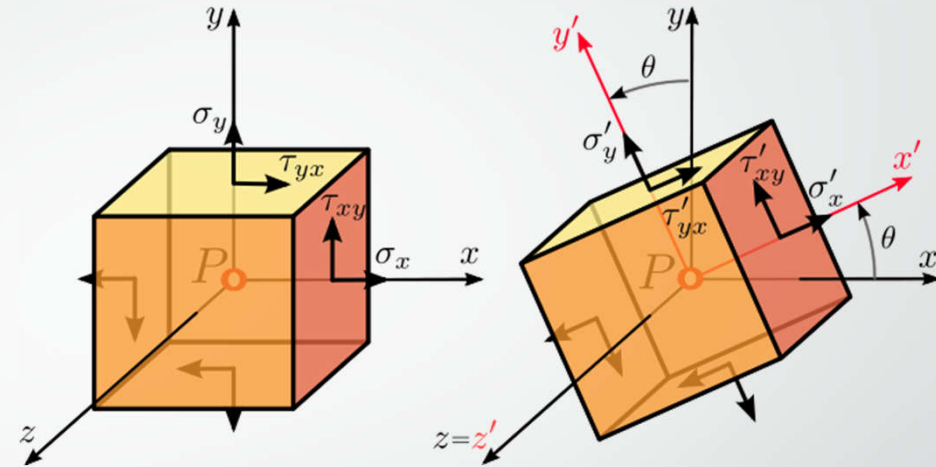
- Στο ειδικό αυτό σύστημα συντεταγμένων, η εντατική κατάσταση ονομάζεται **τριαξονική**. Οι διευθύνσεις των νέων αξόνων ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις** του ταχυστή.

Ορισμός τάσεων στη γενική ένταση

- Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy . Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ .
- Υπάρχει, πάλι, ένας ειδικός προσανατολισμός των νέων αξόνων x', y' για τον οποίο οι διατμητικές τάσεις εξαφανίζονται. Εκεί ο τανυστής των τάσεων παίρνει την μορφή:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

- Ξανά, οι σ_1, σ_2 είναι οι **κύριες τάσεις**, οι οποίες εμφανίζονται κάθετα στα **κύρια επίπεδα**. Οι διευθύνσεις των αξόνων x', y' είναι οι **κύριες διευθύνσεις** του τανυστή.

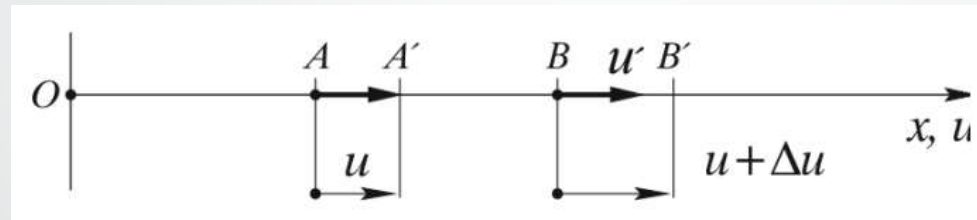




Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

- Θεωρούμε ότι εντός ενός σώματος, τα διάφορα σημεία μετατοπίζονται λόγω καταπόνησης.
- Αν εξετάσουμε το πρόβλημα μονοδιάστατα, έστω ότι έχουμε δύο σημεία που απέχουν προ της φόρτισης Δx . Αυτά μετατοπίζονται ως εξής:



- Η μετατόπιση u είναι κοινή και δεν εντείνει το σώμα. Ορίζεται ως ορθή τροπή ή ορθή παραμόρφωση ε_x η ποσότητα:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

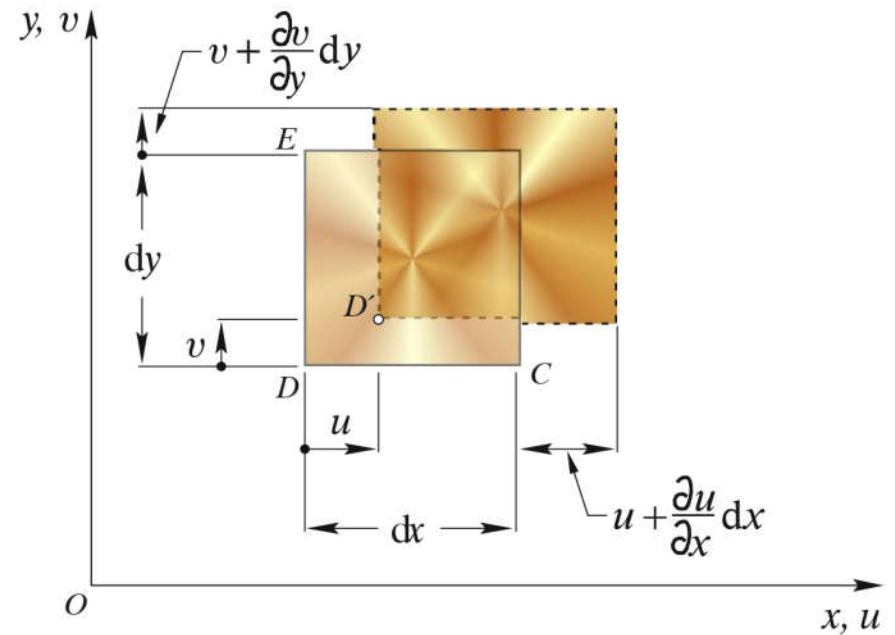
Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

- Στις δύο διαστάσεις έχουμε:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

- Όπου u, v οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες x, y αντίστοιχα.



Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

- Στις δύο διαστάσεις έχουμε επίσης:

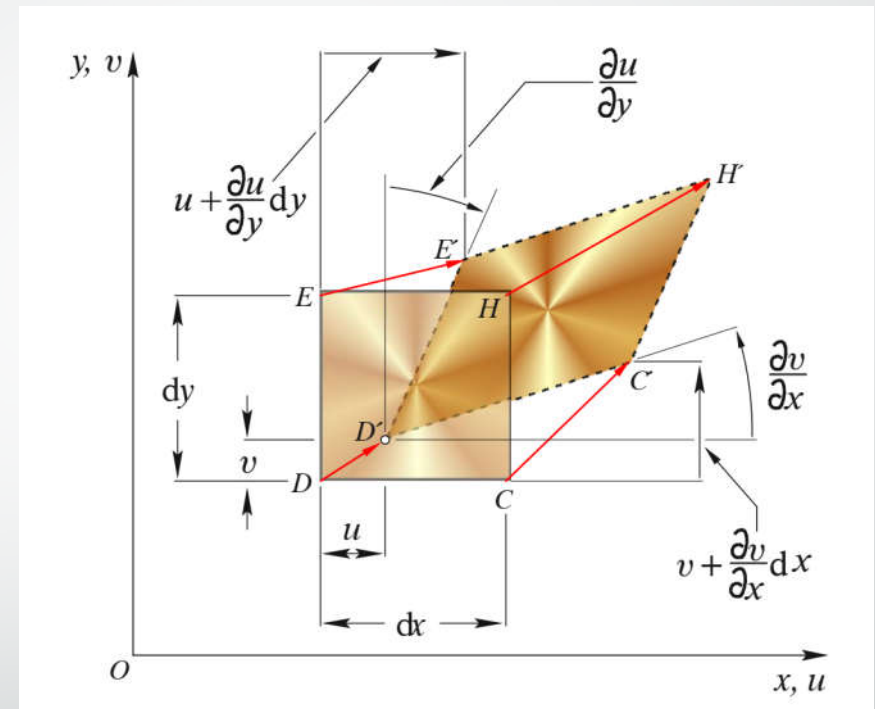
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Εναλλακτικά, αντί για τα παραπάνω χρησιμοποιούμε συνήθως το ήμισυ αυτών, ορίζοντας την **διατμητική παραμόρφωση** ως:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

- Ο τανυστής της τροπής θα αναπαρασταθεί από τον 2×2 πίνακα:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$



Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

- Στις 3 διαστάσεις, αν u, v, w είναι οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες x, y, z αντίστοιχα, έχω:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2},$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2},$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

Ορισμός τροπών στη γενική ένταση

- Στις 3 διαστάσεις, ο **τανυστής των τροπών** αναπαρίσταται από τον 3×3 πίνακα:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- Όπως και στις τάσεις, με κατάλληλες περιστροφές του συστήματος **συντεταγμένων** ο τανυστής των τροπών παίρνει την μορφή:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή, υπάρχουν πάντα κάποια επίπεδα στα οποία οι διατμητικές παραμορφώσεις μηδενίζονται. Οι παραμορφώσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ονομάζονται **κύριες**.



Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων (τροπών)

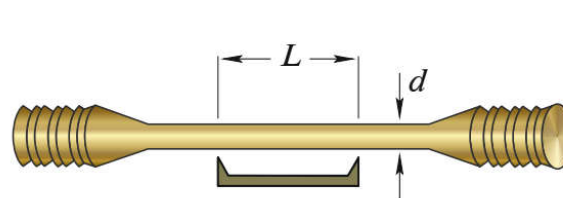
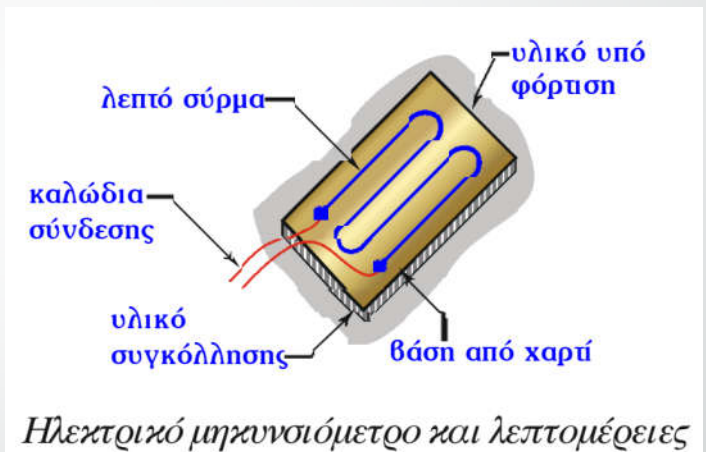
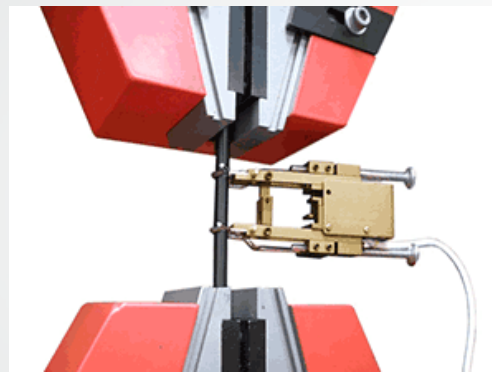
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

■ Ορισμοί:

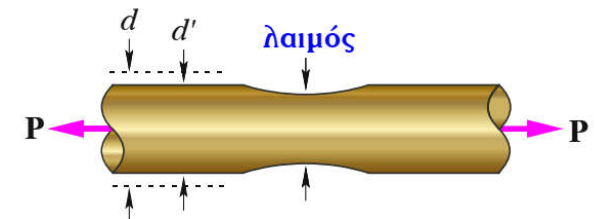
- Η ιδιότητα των σωμάτων να τείνουν να επανέλθουν στην αρχική τους μορφή μετά την παραμόρφωση ονομάζεται **ελαστικότητα**.
- **Τελείως ελαστικό** ονομάζεται το σώμα το οποίο μετά την αποφόρτιση επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και τις προηγούμενες του διαστάσεις. Οι παραμορφώσεις ονομάζονται **ελαστικές**.
- **Τελείως πλαστικό** ονομάζεται το σώμα το οποίο παραμένει απολύτως στην παραμορφωμένη κατάσταση και δεν επανέρχεται. Οι παραμορφώσεις ονομάζονται **μόνιμες ή πλαστικές**.
- Πολλά σώματα είναι **μερικώς ελαστικά**: ένα μέρος της παραμόρφωσης (η ελαστική παραμόρφωση) αναιρείται με την αποφόρτιση, και ένα άλλο μέρος της (η πλαστική παραμόρφωση) παραμένει.
- Αν ένα σώμα έχει έντονη πλαστική συμπεριφορά, θα ονομαστεί **όλκιμο**, π.χ. μαλακός χάλυβας, μόλυβδος, κ.α. Αν ένα σώμα έχει μόνο ελαστική συμπεριφορά και αμέσως μετά θραύεται, θα ονομαστεί **ψαθυρό**, π.χ. κιμωλία, μάρμαρο, χυτοσίδηρος κ.α.

Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Πείραμα θλίψης – εφελκυσμού:



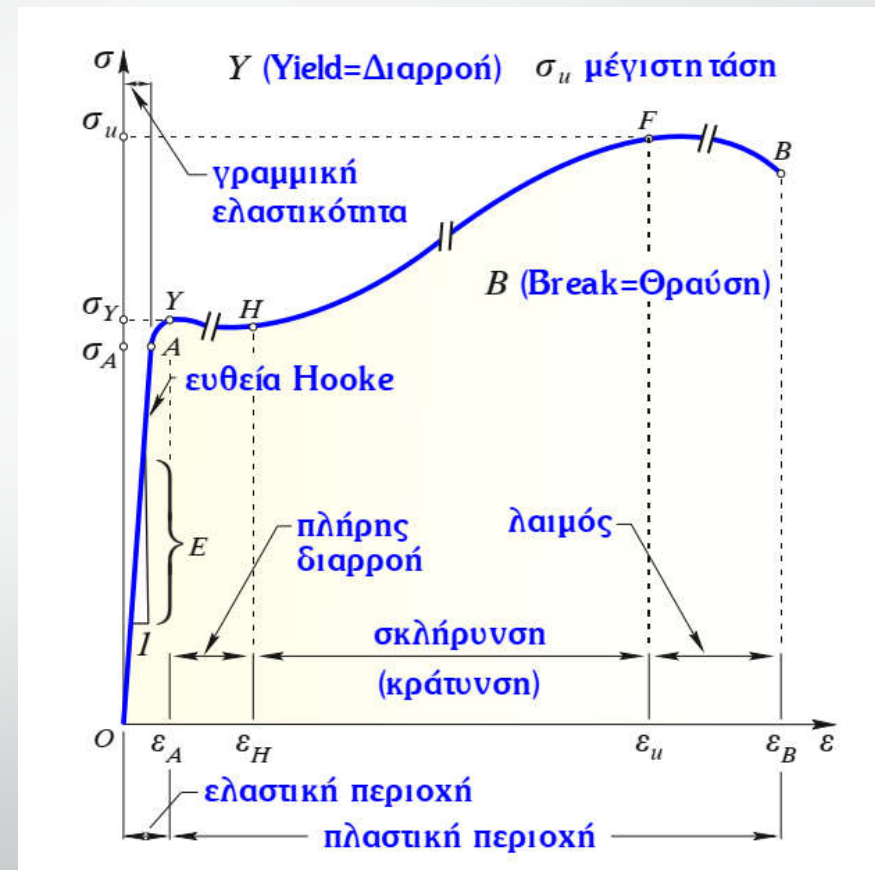
Δοκίμιο εφελκυσμού



Μεγεθυμένη περιοχή του λαιμού προ θραύσης

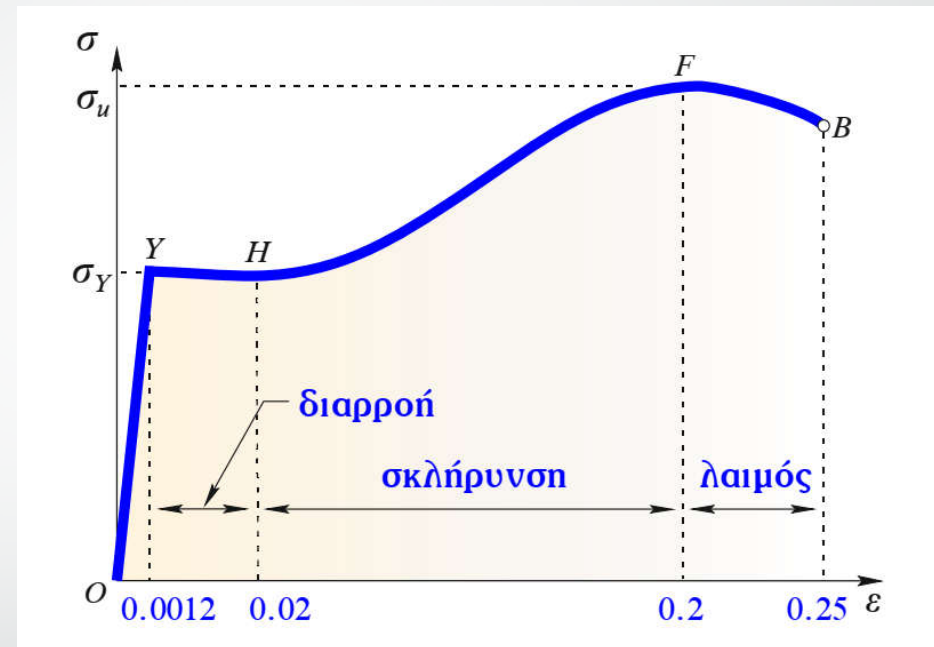
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Συμβατικό διάγραμμα σ - ϵ όλκιμου υλικού σε εφελκυσμό.
- Στην ελαστική περιοχή ισχύει ο αναλογικός καταστατικός νόμος ή ο νόμος του Hooke: $\sigma = E\epsilon$, με $E = \tan(\varphi)$ μια βασική σταθερά που χαρακτηρίζει το υλικό, που ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** ή **μέτρο του Young**.
- Στην περιοχή $A \rightarrow Y$ έχουμε **μη γραμμική** ελαστικότητα.
- Το σημείο Y είναι το **σημείο διαρροής**.
- Το εμβαδόν της διατομής θεωρήθηκε σταθερό για όλο το πείραμα, για αυτό έχουμε **συμβατικό** διάγραμμα.



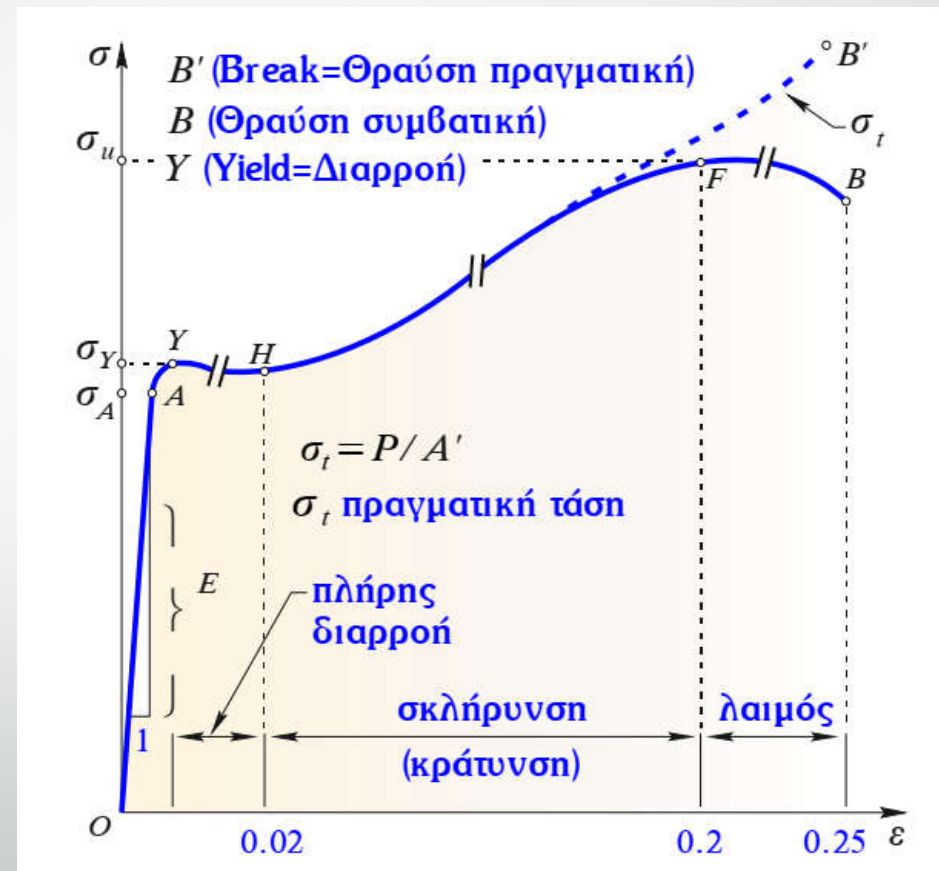
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Προσεγγιστικό συμβατικό διάγραμμα σ - ϵ όλκιμου χάλυβα σε εφελκυσμό.
- Στην περιοχή $F \rightarrow B$ παρατηρείται η δημιουργία **λαιμού**, δηλαδή σημαντική μείωση της διατομής.
- Στην κρίσιμη περιοχή εμφανίζονται επίσης **γραμμές ολίσθησης Lüders**, υπό γωνία ~ 45 μοιρών ως προς τον άξονα. Η διατμητική τάση είναι η αιτία αστοχίας (έχουμε διατμητική ολίσθηση του όλκιμου υλικού).



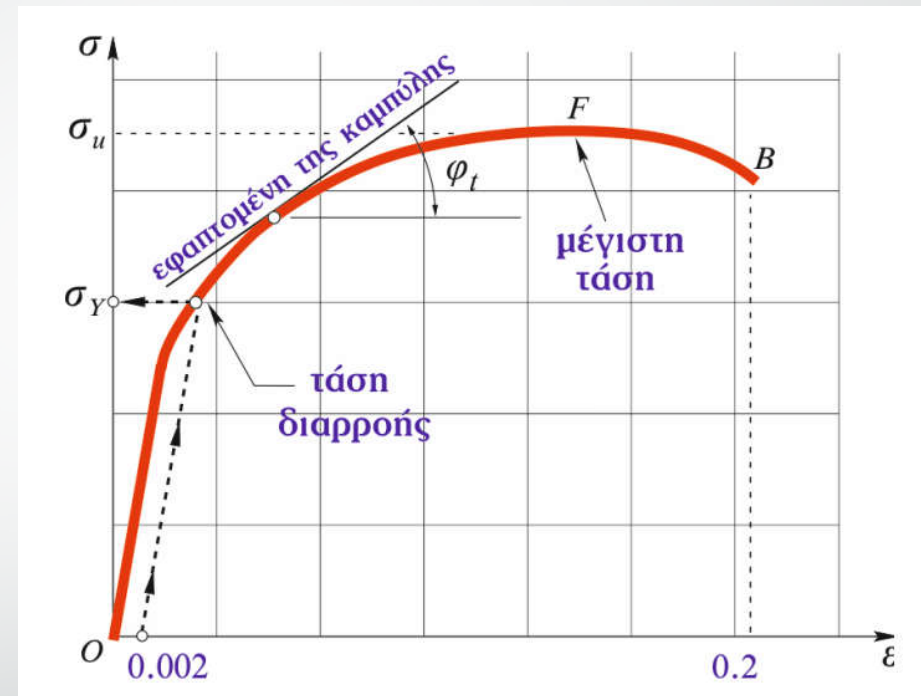
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Πραγματικό διάγραμμα σ - ϵ όλκιμου υλικού σε εφελκυσμό.
- Αν λάβουμε υπόψη την αλλαγή (μείωση) στο εμβαδόν της διατομής στην περιοχή του λαιμού, υπολογίζουμε την **πραγματική μέση τάση** σ_t .
- Με βάση αυτή βλέπουμε ότι στην πραγματικότητα **το υλικό συνεχίζει να σκληραίνει** («παραμορφωσιακή κράτυνση»).



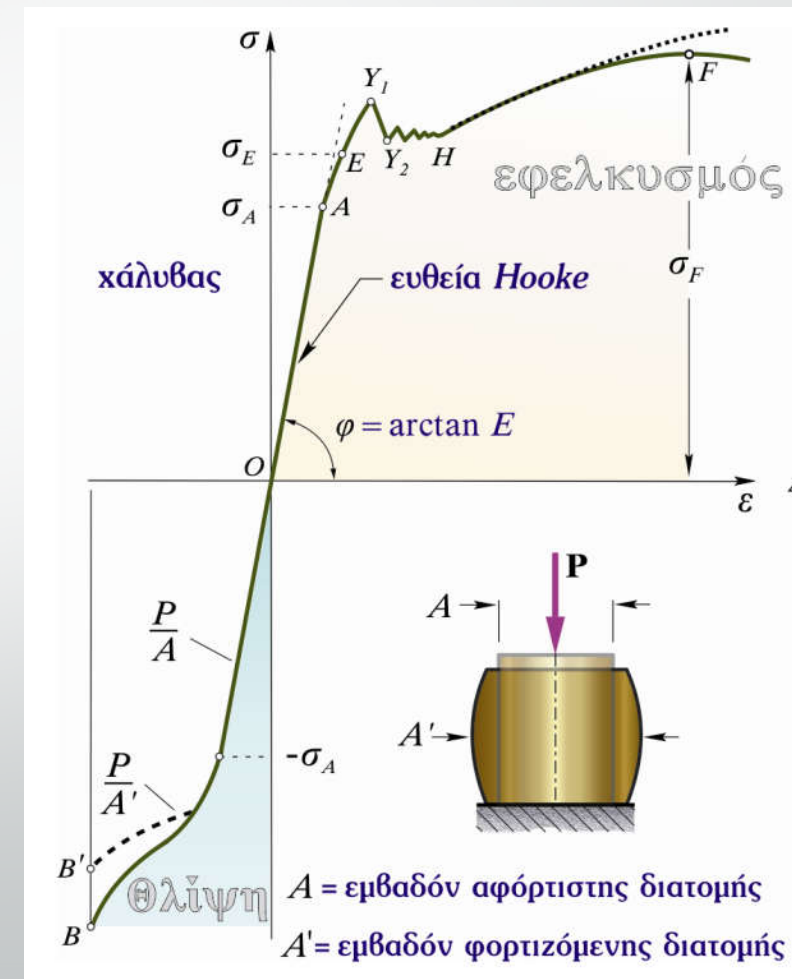
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Σε πολλά υλικά το σημείο διαρροής γ δεν είναι εμφανές, όπως στην περίπτωση ενός κράματος αλουμινίου (σχήμα).
- Τότε ορίζουμε την τάση διαρροής σ_Y συμβατικά ως την τάση που αντιστοιχεί σε παραμένονσα παραμόρφωση 2 τοις χιλίοις (‰).
- Επειδή η αποφόρτιση γίνεται με την κλίση του αρχικού ελαστικού κλάδου, μπορώ να ξεκινήσω από το $\varepsilon = 0.002$ και να βρω εύκολα το **συμβατικό σημείο διαρροής**.



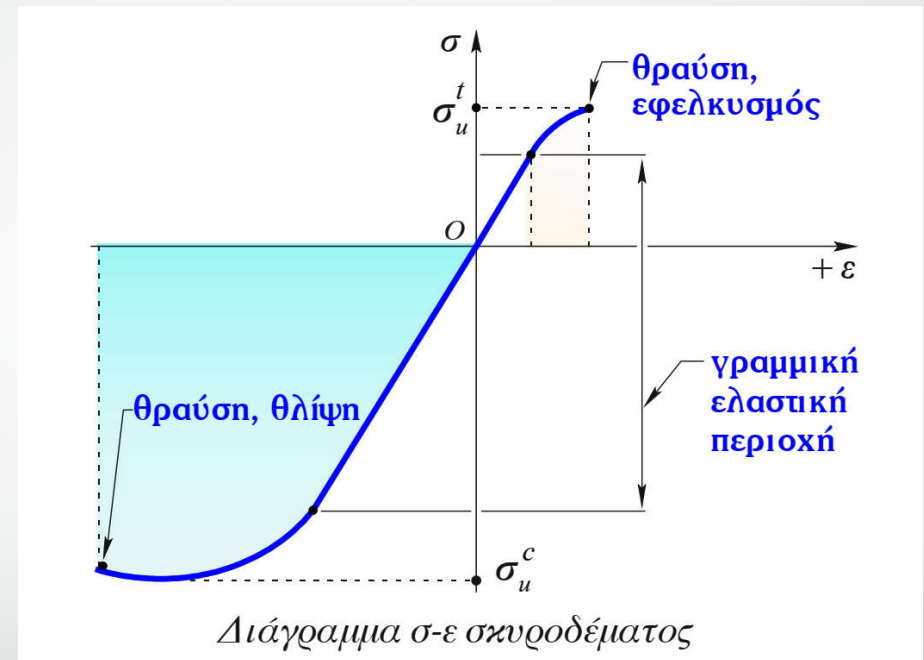
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- **Διάγραμμα σ - ϵ όλκιμου υλικού σε θλίψη.**
- Η συμπεριφορά των όλκιμων υλικών σε θλίψη **δεν διαφέρει σημαντικά** από την αντίστοιχη συμπεριφορά σε εφελκυσμό.
- Μετά την μέγιστη απόκριση (σημείο F) αντί να έχουμε αστάθεια (δημιουργία λαιμού), στην περίπτωση της θλίψης έχουμε αύξηση της διατομής λόγω «**βαρελοποίησης**» του δοκιμίου.
- Ορίζουμε την **συμβατική τάση θραύσης σε θλίψη**: είναι η τάση που προκαλεί μείωση του αρχικού ύψους κατά $1/3$ (δηλαδή $\epsilon_B = -0.33$).



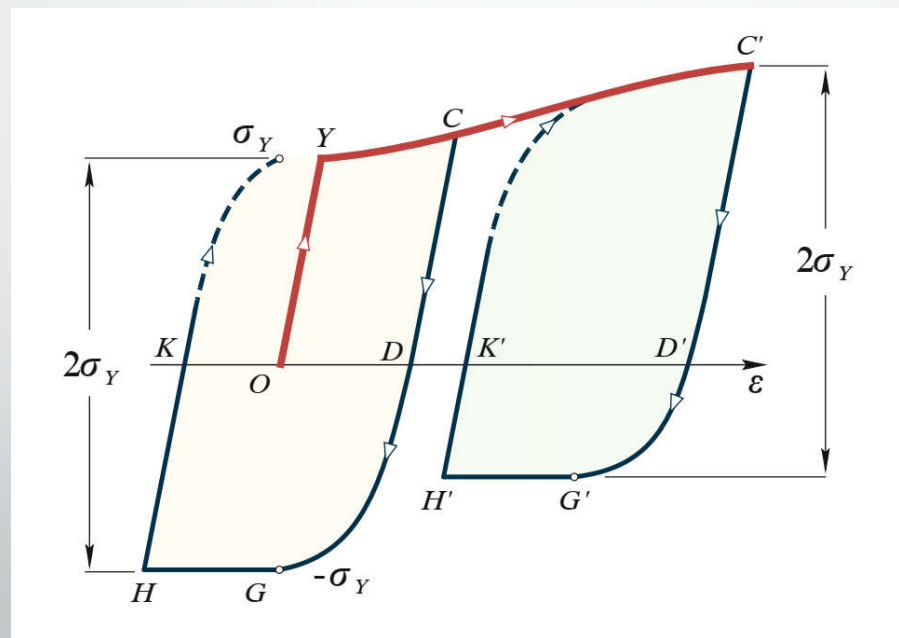
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Διάγραμμα σ - ε ψαθυρού υλικού σε θλίψη.
- Η συμπεριφορά των ψαθυρών υλικών σε θλίψη **διαφέρει σημαντικά** από την αντίστοιχη συμπεριφορά σε εφελκυσμό.
- Χαρακτηριστικό ψαθυρό υλικό: σκυρόδεμα. Ίδιο μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό και θλίψη. Γραμμικώς ελαστική περιοχή σε θλίψη ~10 φορές την αντίστοιχη περιοχή σε εφελκυσμό.



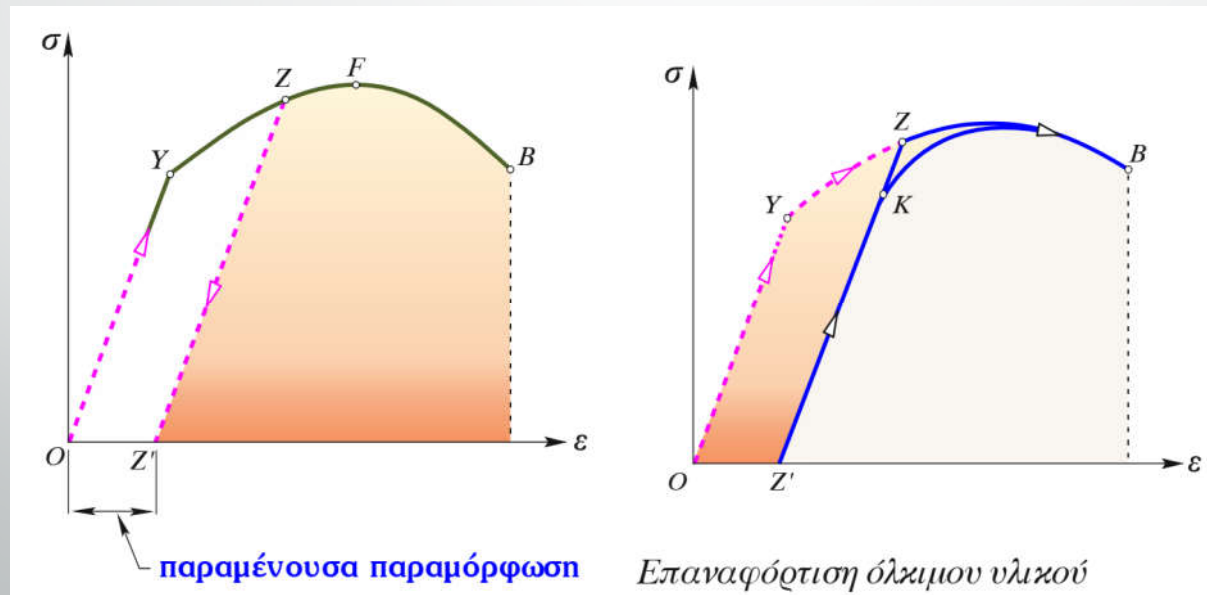
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- Φαινόμενο *Bauschinger* σε όλκιμο υλικό
- Αν το υλικό καταπονηθεί πέρα από το όριο διαρροής του, σε επόμενο κύκλο φόρτισης μεταβάλλεται το όριο διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη έτσι ώστε το εύρος της ελαστικής περιοχής να παραμείνει σταθερό.



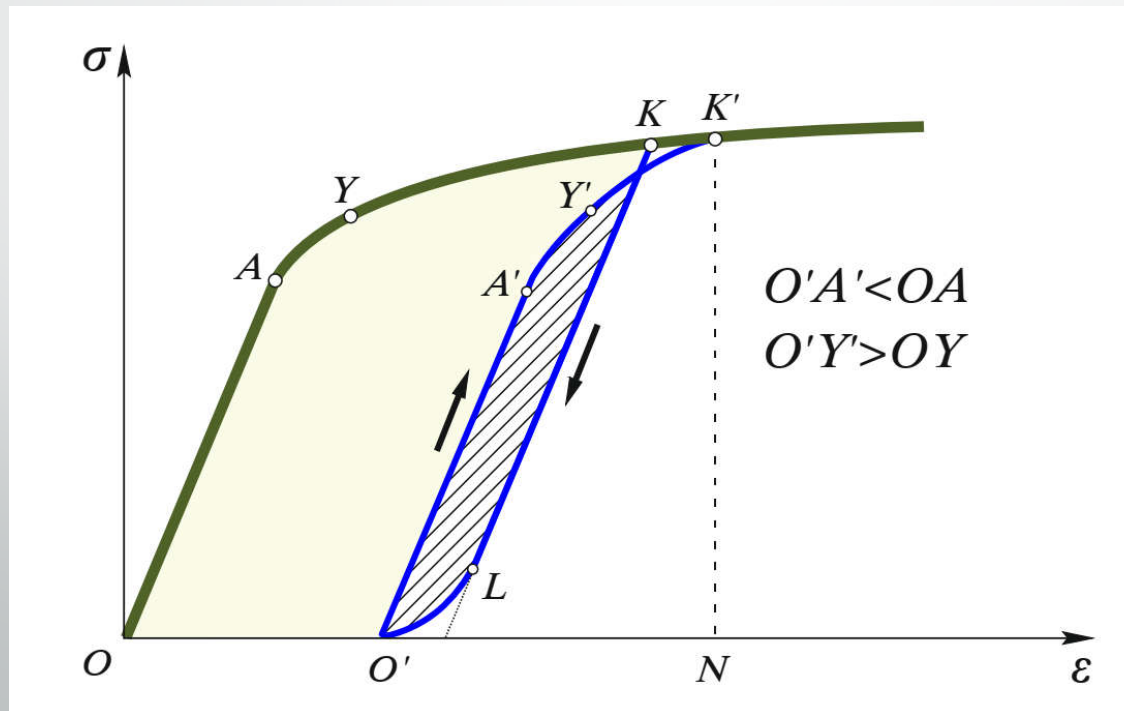
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- **Φόρτιση – Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση**
- Η μερική αποφόρτιση γίνεται με την κλίση του αρχικού ελαστικού κλάδου. Σε πολλά υλικά (π.χ. χάλυβας, διατομές οπλισμένου σκυροδέματος), η επαναφόρτιση ακολουθεί την ίδια πρακτικά γραμμή, μέχρι να συναντηθεί με την αντίστοιχη καμπύλη σε μονοτονική φόρτιση.



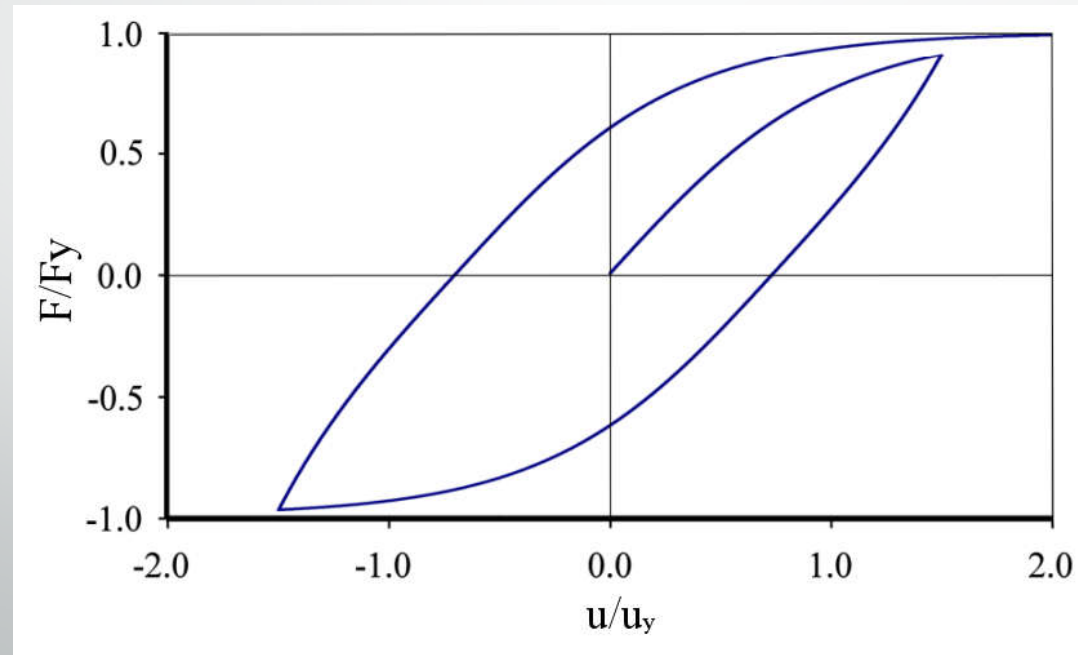
Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

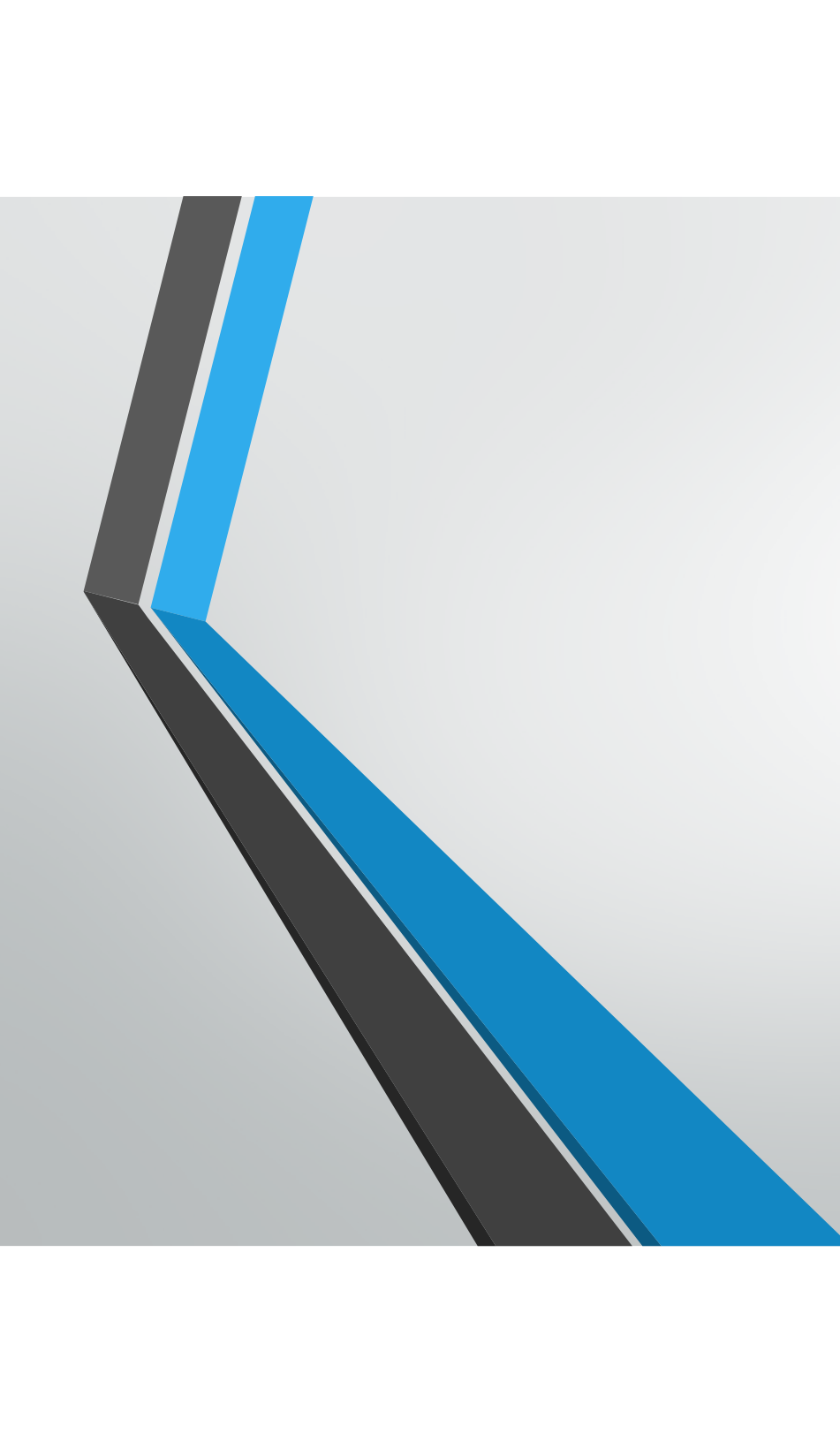
- **Βρόγχος υστέρησης**
- Σε πολλά υλικά (π.χ. εδάφη), η **μερική** αποφόρτιση – επαναφόρτιση δεν γίνεται ακριβώς πάνω στην ίδια γραμμή. Δημιουργείται έτσι ελάσσων βρόγχος υστέρησης, ο οποίος συνδέεται με απορρόφηση ενέργειας.



Διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων

- **Βρόγχος υστέρησης**
- Στα περισσότερα όμως υλικά, **πλήρεις** κύκλοι φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης (με την αντίθετη φορά) προκαλούν μείζονες βρόγχους υστέρησης, το μέγεθος των οποίων συνδέεται με το μέτρο της απορρόφησης ενέργειας.





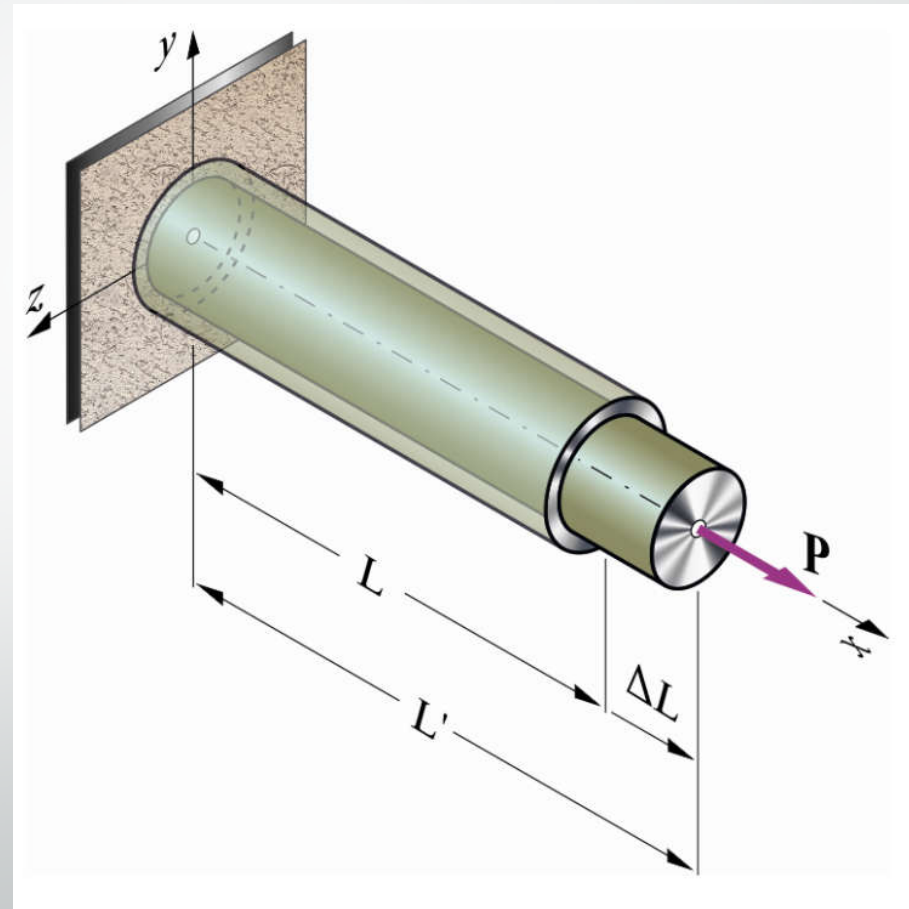
Νόμος του Hooke

Νόμος του Hooke

- Πειραματιζόμενος με πρισματικές ράβδους ποικίλων υλικών, ο Robert Hooke διατύπωσε τον «καταστατικό νόμο» το 1678:

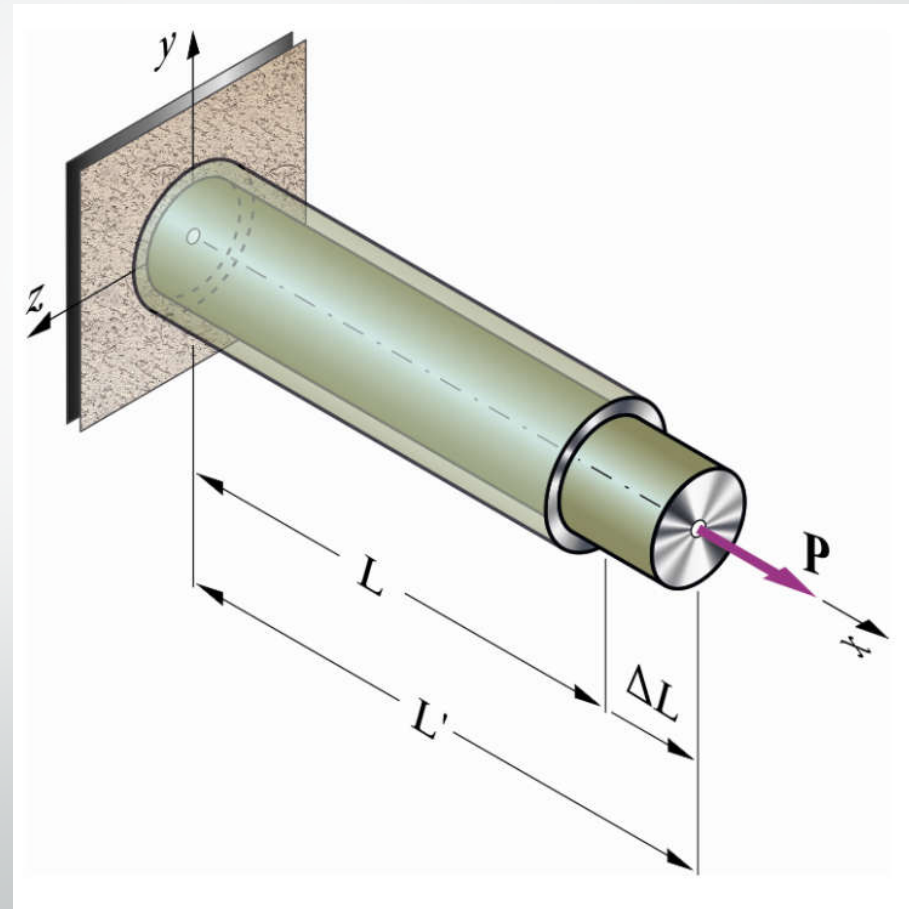
$$\Delta L = \frac{P}{EA} L$$

- Αλλιώς: $\frac{P}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \sigma = E \varepsilon$
- Ο συντελεστής E είναι το **μέτρο ελαστικότητας** ή **μέτρο του Young**.
- Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο στην γραμμικώς ελαστική περιοχή συμπεριφοράς του υλικού.

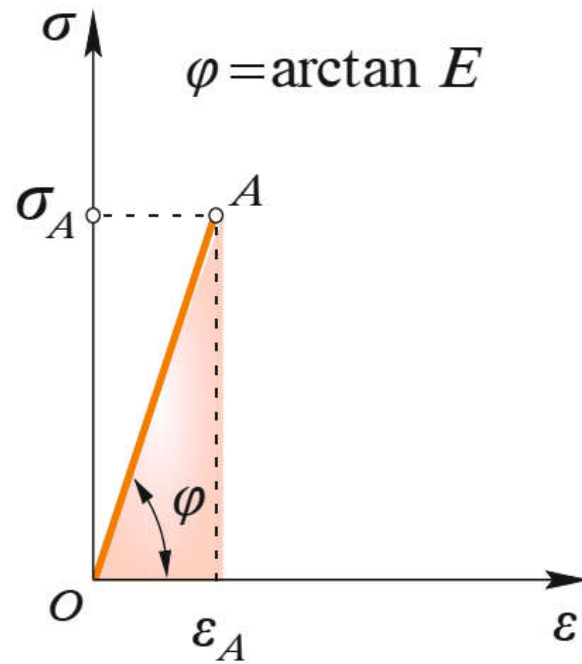


Νόμος του Hooke

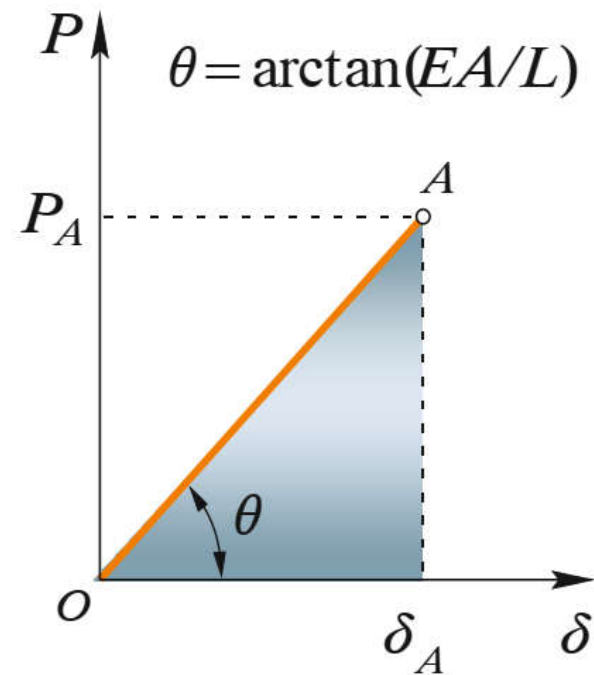
- Ν. του Hooke: $\sigma = E\varepsilon$
- Επειδή το ε είναι αδιάστατο, το μέτρο ελαστικότητας E έχει διαστάσεις τάσης (π.χ. Pascal).
- Αντιστοιχεί στην τάση που προκαλεί ανηγμένη παραμόρφωση ίση με την μονάδα, δηλαδή διπλασιασμό του μήκους! Άρα παίρνει μεγάλες τιμές, και συνήθως μετράται σε GPa.
- Αποτελεί την βασικότερη σταθερά που χαρακτηρίζει ένα υλικό.



Νόμος του Hooke



(α) Διάγραμμα σ - ε



(β) Διάγραμμα P - δ



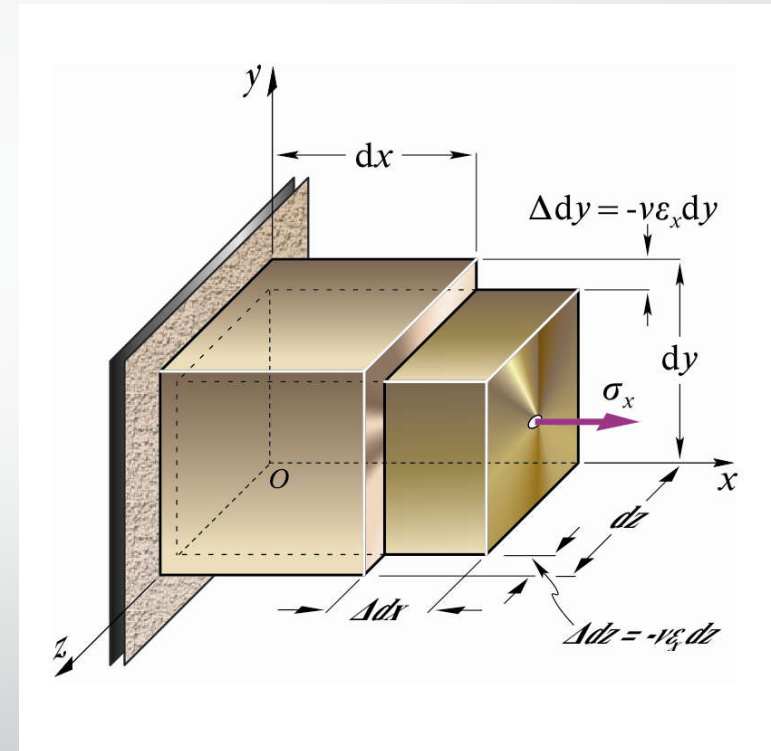
Εγκάρσιες παραμορφώσεις

Εγκάρσιες παραμορφώσεις

- Πειράματα έχουν δείξει ότι η αξονική παραμόρφωση συνοδεύεται και από εγκάρσια (πλευρική παραμόρφωση). Αν d_y είναι η αρχική εγκάρσια διάσταση κατά τον άξονα y , και d'_y η τελική τότε η εγκάρσια τροπή κατά τον άξονα y θα είναι:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta d_y}{d_y} = \frac{d'_y - d_y}{d_y}$$

- Όταν το σώμα εφελκύεται κατά τον x ($\varepsilon_x > 0$), τότε (συνήθως) $\varepsilon_y < 0$! Και αντίστροφα.
- Στα ισότροπα υλικά, $\varepsilon_y = \varepsilon_z$.

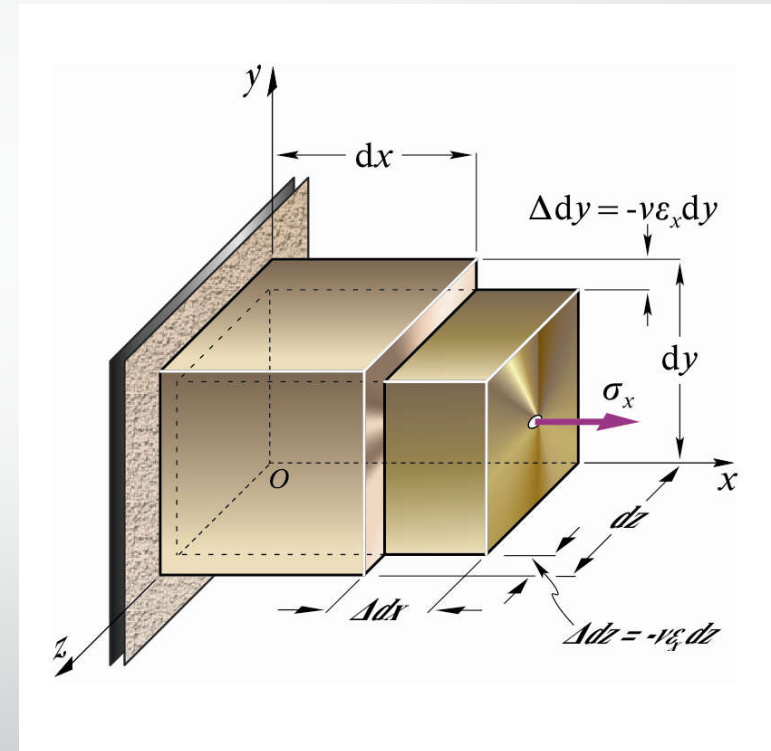


Εγκάρσιες παραμορφώσεις

- Ορίζουμε ως **λόγο του Poisson** την ποσότητα:

$$\nu = - \frac{\text{εγκάρσια παραμορφωση}}{\text{αξονική παραμορφωση}}$$

- Στα ισότροπα υλικά, $\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$.
- Ο λόγος του Poisson είναι αδιάστατος αριθμός. Συνήθως, $0 \leq \nu \leq 0.5$, αν και θεωρητικά $-1 \leq \nu \leq 0.5$. Αρνητικό ν έχουν ειδικά υλικά (τα αυξητικά υλικά – auxetic materials).
- Έχει νόημα στην ελαστική περιοχή. Όταν είμαστε στην πλαστική περιοχή, το ν πλησιάζει το 0.5 ασυμπτωτικά, διότι τα υλικά διατηρούν τον όγκο τους.
- Το ελαστικό κόμι (λάστιχο) έχει $\nu = 0.5$, ο φελλός σχεδόν μηδέν! Στα μέταλλα, $\nu \cong 0.3$. Το σκυρόδεμα έχει από 0.1 ως 0.2.



Εγκάρσιες παραμορφώσεις

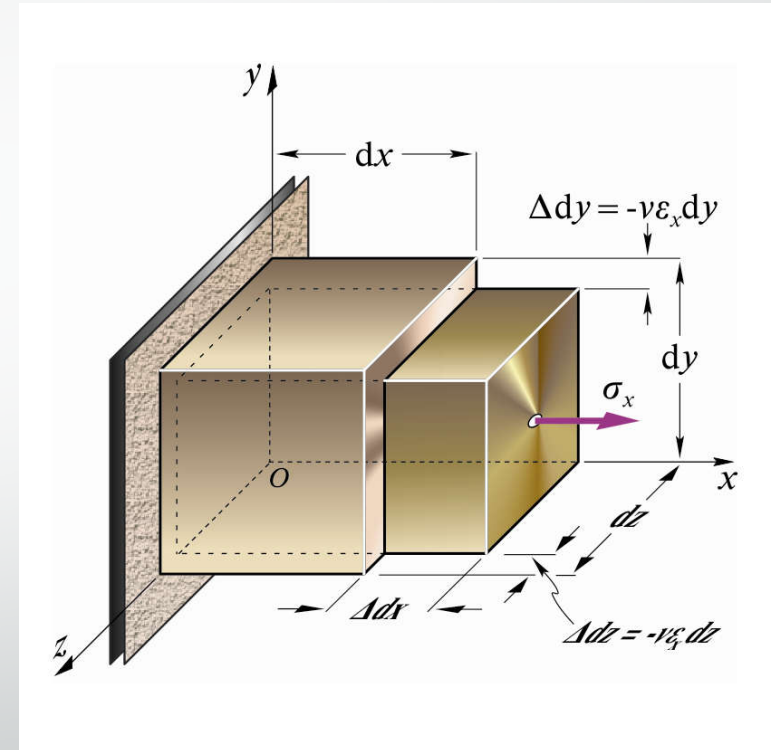
- Ορίζουμε ως **ανηγμένη διόγκωση (ή ογκική τροπή – volumetric strain)** την ποσότητα:

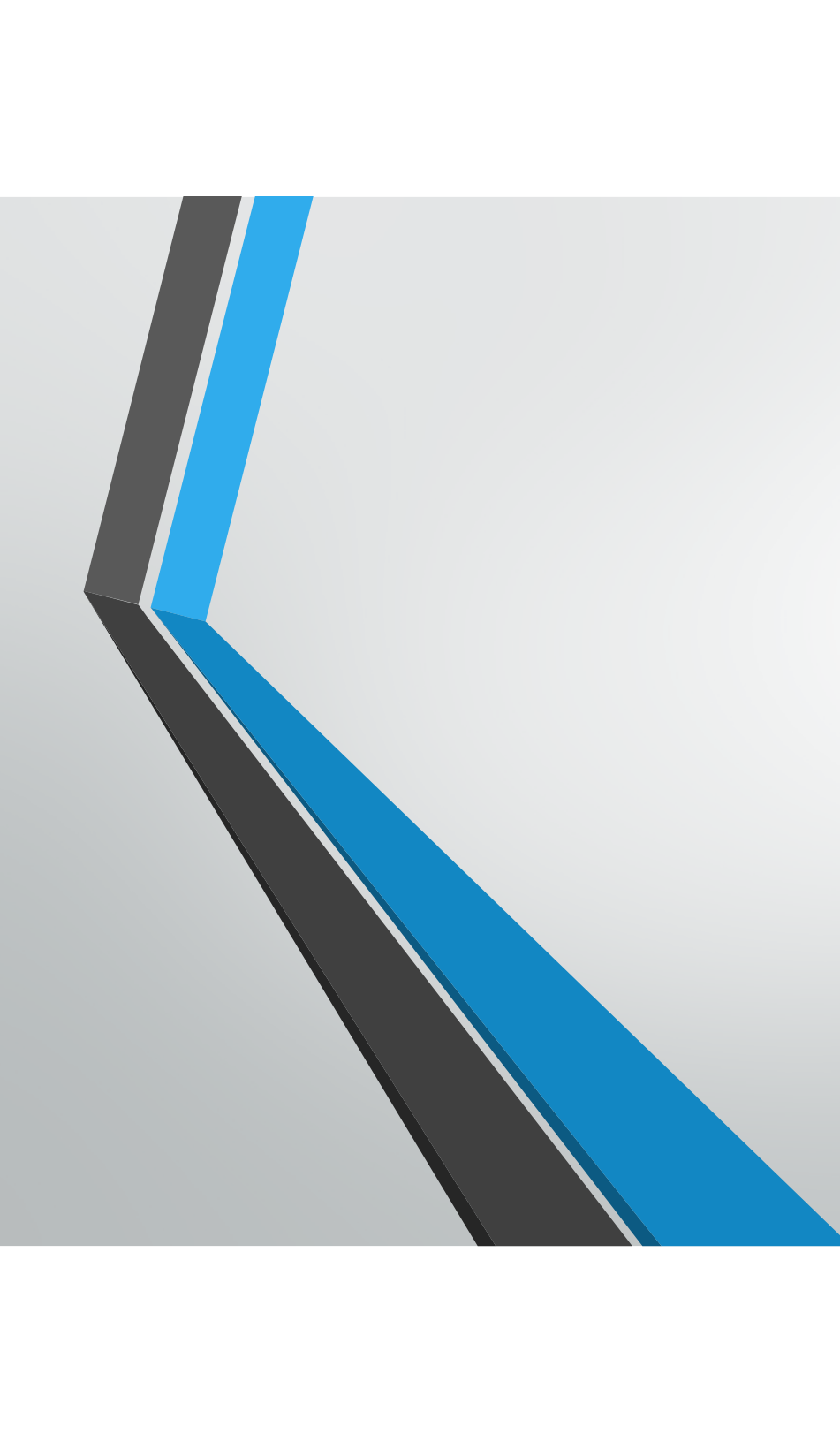
$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x(1 - 2\nu)$$

- Ορίζουμε ως **μέτρο διόγκωσης – bulk modulus** την ποσότητα:

$$K_p = \frac{\sigma}{e} = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

- Όπου p είναι η υδροστατική πίεση που εφαρμόζουμε σε πείραμα όπου το σώμα συμπιέζεται εντός υγρού.
- Το K_p εκφράζει την αντίσταση του υλικού στην συμπίεση. Ο αντίστροφος του K_p ονομάζεται συμπιεστότητα. Όταν $\nu = 0.5$, $K_p \rightarrow \infty$, δηλαδή το υλικό είναι ασυμπίεστο.





Νόμος του Hooke στην διάτμηση



Κύριες τάσεις –
κύρια επίπεδα

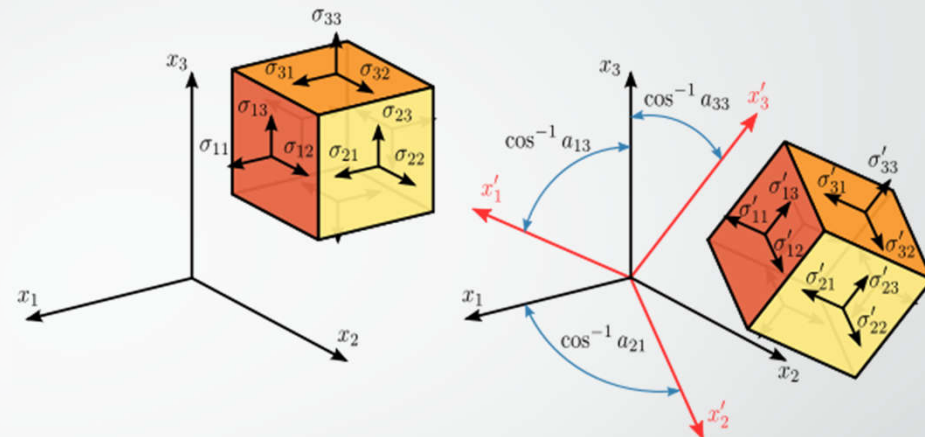
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή β' τάξης (που μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν δισδιάστατο πίνακα) στην γενική περίπτωση της τριαξονικής έντασης γίνεται μέσω ενός **μητρώου μετασχηματισμού Λ_S** :

$$\Lambda_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- όπου a_{ij} τα **συννημίτονα κατεύθυνσης**, δηλαδή $a_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$.

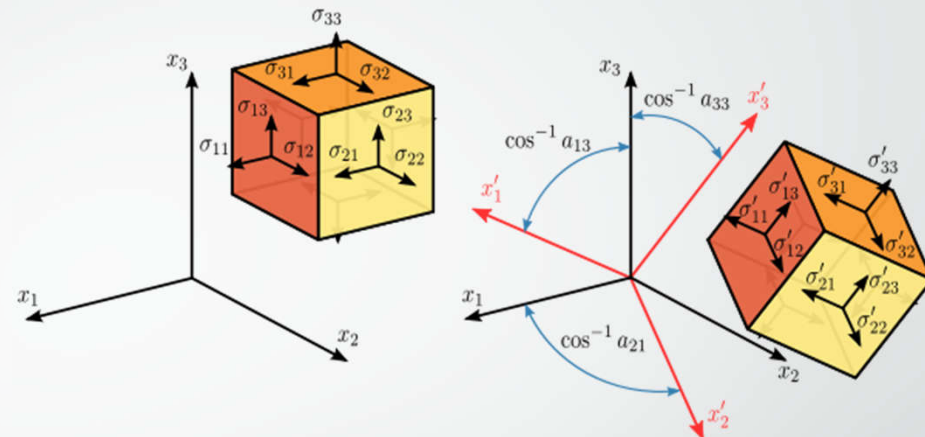
- Τότε αν $\Lambda_S^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ (ανάστροφος), αποδεικνύεται ότι $\Lambda_S \Lambda_S^T = \Lambda_S^T \Lambda_S = I$, δηλαδή ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Ο μετασχηματισμός γίνεται ως εξής:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



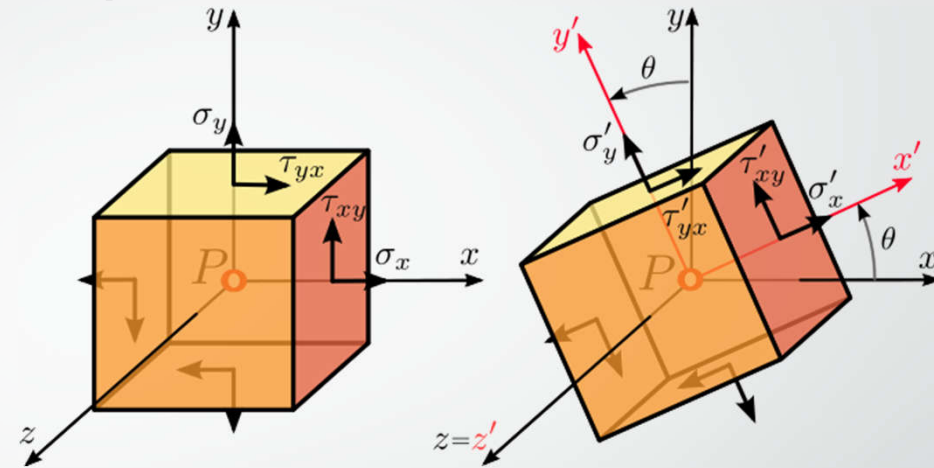
- $[\sigma'] = \Lambda_s [\sigma] \Lambda_s^T$ (από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).
- $[\sigma] = \Lambda_s^T [\sigma'] \Lambda_s$ (από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).
- Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή α' τάξης (διάνυσμα) γίνεται ως εξής:
 - $\{v'\} = \Lambda_s \{v\}$ (από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).
 - $\{v\} = \Lambda_s^T \{v'\}$ (από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy . Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ .
- Σχηματίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο Λ_p :

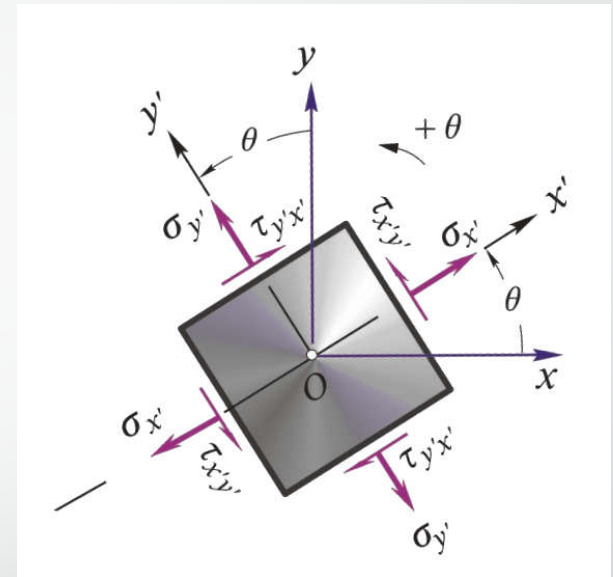
$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Τότε ο μετασχηματισμός του τανυστή των τάσεων $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ γίνεται όπως προηγουμένως.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Αναλύοντας τις σχέσεις για το επίπεδο, προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ σε κάποιο σύστημα αξόνων Oxy , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τάσεις $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ σε κάποιο στραμμένο κατά γωνία θ σύστημα $Ox'y'$, (η γωνία θ θετική Α.Δ.Ω. όπως στο σχήμα).
- Οι σχέσεις που δίνουν τις $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ είναι:
 - $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$
- Παρατηρείστε ότι $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

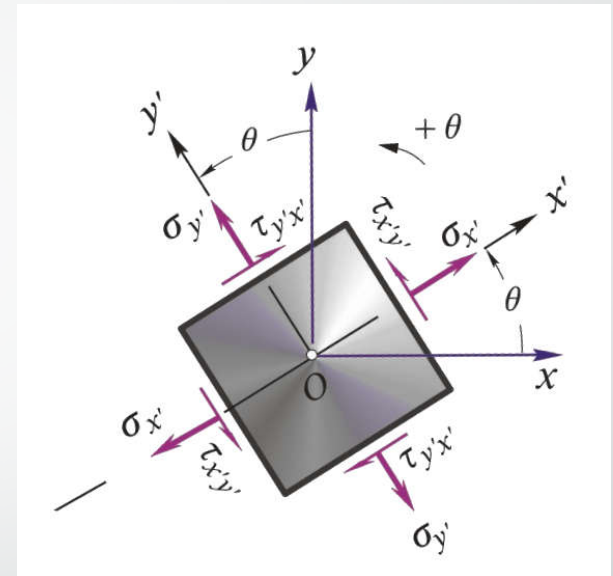
- Με βάση την τρίτη σχέση μετασχηματισμού, που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

- προκύπτει ότι υπάρχει μια ειδική τιμή της γωνίας θ , έστω γωνία θ_0 , για την οποία η διατμητική τάση $\tau_{x'y'}$ στο νέο σύστημα μηδενίζεται. Λύνω ως προς θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right), -45^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$$

- Θα ονομάσουμε **κύριο άξονα 1**, αυτόν για τον οποίο μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις και βρίσκεται πλησιέστερα στον «ισχυρότερο» εκ των αξόνων x, y . Ο **κύριος άξονας 2** θα είναι κάθετος στον άξονα 1.



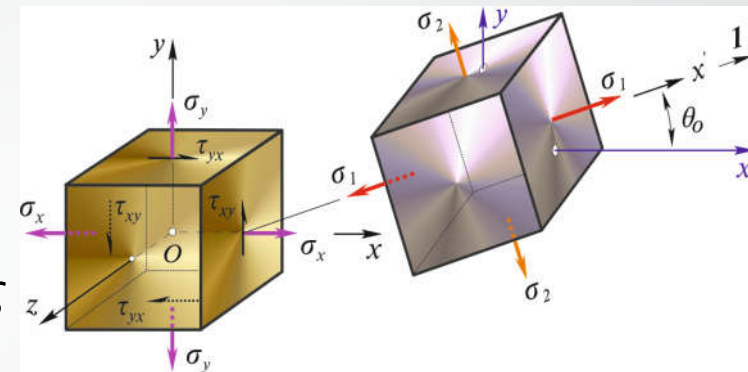
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Οι άξονες 1 και 2 ονομάζονται **κύριοι άξονες**.
- Τα επίπεδα τα κάθετα στους άξονες 1 και 2 ονομάζονται **κύρια επίπεδα**.
- Οι τάσεις σ_1, σ_2 που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες ονομάζονται **κύριες τάσεις**.
- Αντικαθιστώντας την γωνία θ_0 στις σχέσεις μετασχηματισμού προκύπτει:

- $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

- $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$$

$$Με \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

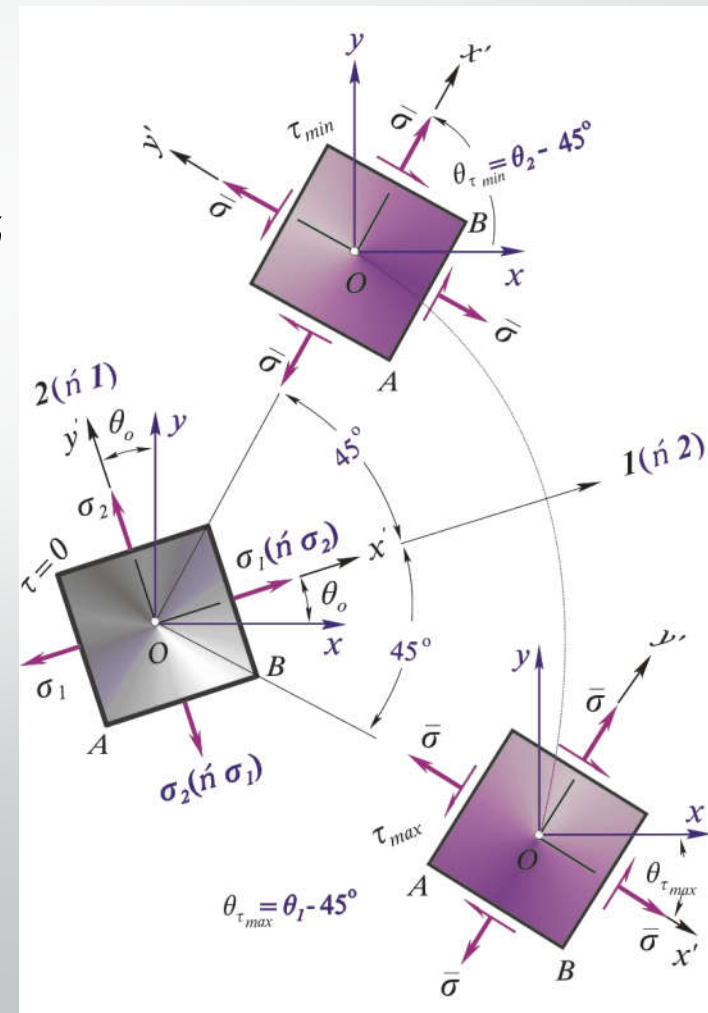


Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Παραγωγίζοντας την σχέση που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις στο στραμμένο σύστημα και θέτοντας τις παραγώγους ίσες με το μηδέν προκύπτει ότι η ελάχιστη και η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζονται σε διευθύνσεις -45° και $+45^\circ$ σε σχέση με τους κύριους άξονες (δηλαδή τους **διχοτομούν**). Εκεί:

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων που εμφανίζονται τα ακρότατα στην $\tau_{x'y'}$ θα είναι $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Παρατηρούμε ότι $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$. Αυτό συμβαίνει γενικά, **διότι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του τανυστή παραμένει αναλλοίωτο** (σταθερό) κατά την περιστροφή καθ' οποιονδήποτε τρόπο.

- Γενικά υπάρχουν τρεις αναλλοίωτες του τανυστή: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

1. **Ίχνος (trace) ή άθροισμα των ορθών τάσεων:** $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

2. **Άθροισμα ελασσόνων οριζουσών:**

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

3. **Ορίζουσα του τανυστή:** $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Οι τρεις αναλλοίωτες του τανυστή παραμένουν φυσικά οι ίδιες και στο κύριο σύστημα, όπου ο τανυστής διαγωνιοποιείται και παίρνει την μορφή:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Έτσι:

- $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$

- $J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2.$

- $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Γενικότερα, **οι κύριες τάσεις δεν είναι παρά οι ιδιοτιμές του τανυστή των τάσεων**. Ο τανυστής των τάσεων διαγωνιοποιείται, και σύμφωνα με την Γραμμική Άλγεβρα οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την **χαρακτηριστική εξίσωση**:

$$|\sigma_{ij} - \sigma_k \mathbf{I}| = 0 \quad (1)$$

- όπου, $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ ο τανυστής, $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος 3×3 και σ_k οι άγνωστες ιδιοτιμές ($k = 1, 2, 3$).

- Αναλύοντας την (1):
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_k) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_k) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_k) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\sigma_k)^3 - J_1(\sigma_k)^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0 \quad (2)$$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

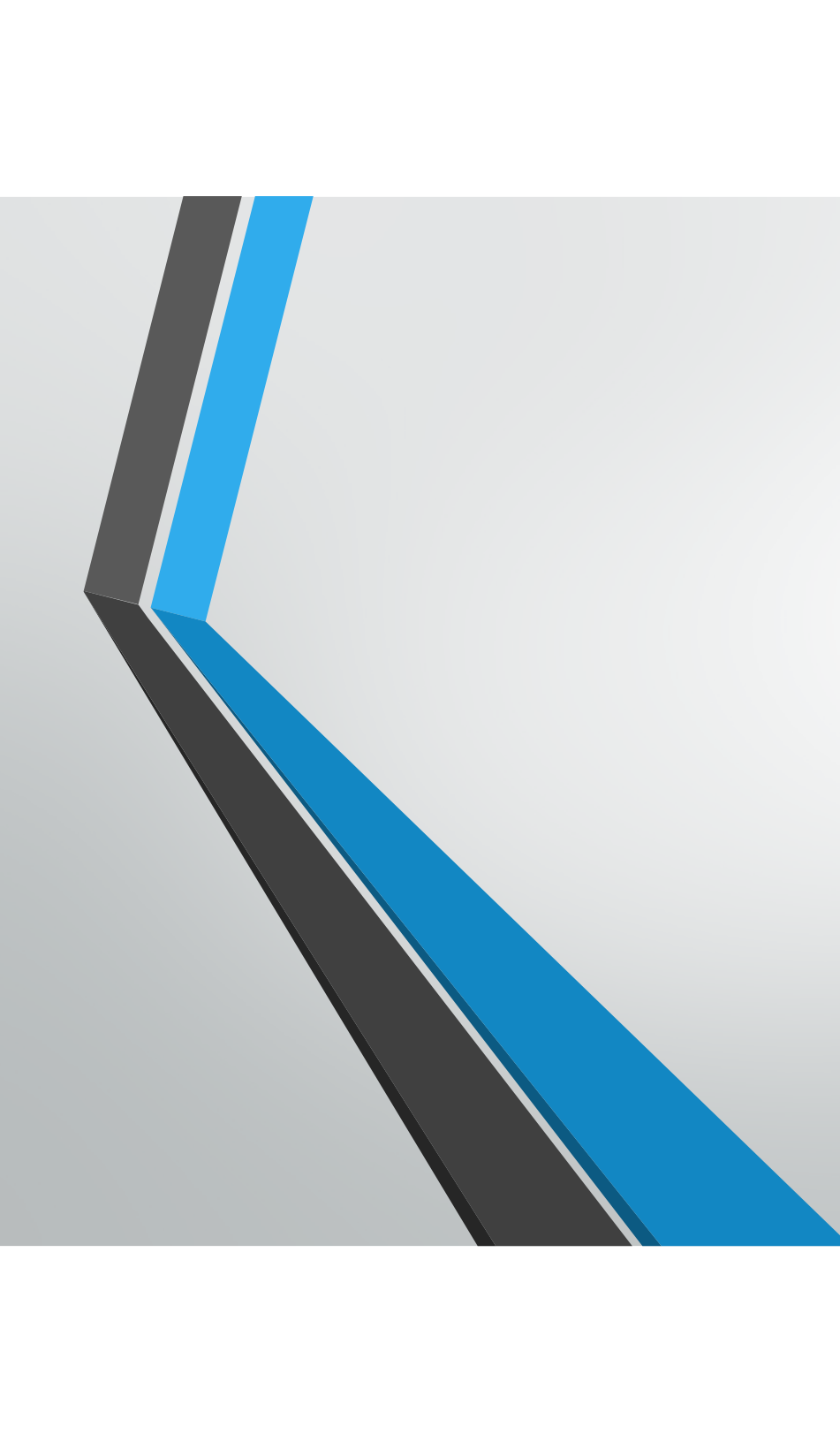
- Λύνοντας την (2) $(\sigma_k)^3 - J_1(\sigma_k)^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0$ προκύπτουν οι ιδιοτιμές (δηλαδή οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).
- Για κάθε ιδιοτιμή σ_k μπορεί να υπολογιστεί το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα n από την σχέση:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k I)n = 0$$

- Τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται και **κατευθύνοντα συνημίτονα** των γωνιών που σχηματίζουν οι στραμμένοι άξονες με τους αρχικούς.
- Επειδή μας ενδιαφέρει η διεύθυνσή τους, συνήθως κανονικοποιούνται ώστε να έχουν μέτρο (μήκος) μονάδα:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

- Επειδή είναι κατευθύνοντα συνημίτονα γωνιών, αν τα βάλουμε (όλα) σε έναν πίνακα τότε προκύπτει το μητρώο μετασχηματισμού Λ_s που μας μεταφέρει από το **τρέχον σύστημα** στο **κύριο σύστημα**.



Κύκλος του Mohr

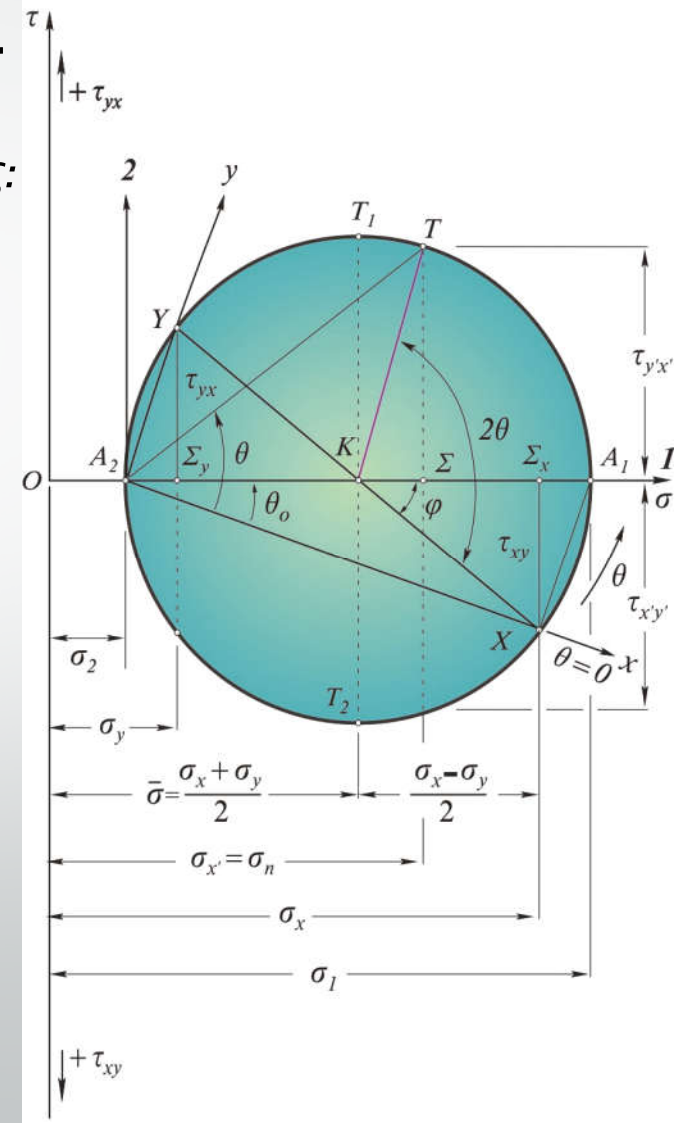
Κύκλος του Mohr

- Είδαμε ότι στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, οι σχέσεις που δίνουν τις νέες $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ είναι:
 - $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$
- Απαλείφοντας την γωνία θ , προκύπτει η εξίσωση:
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$
- Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ ή $K(\bar{\sigma}, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος του Mohr**.

Κύκλος του Mohr

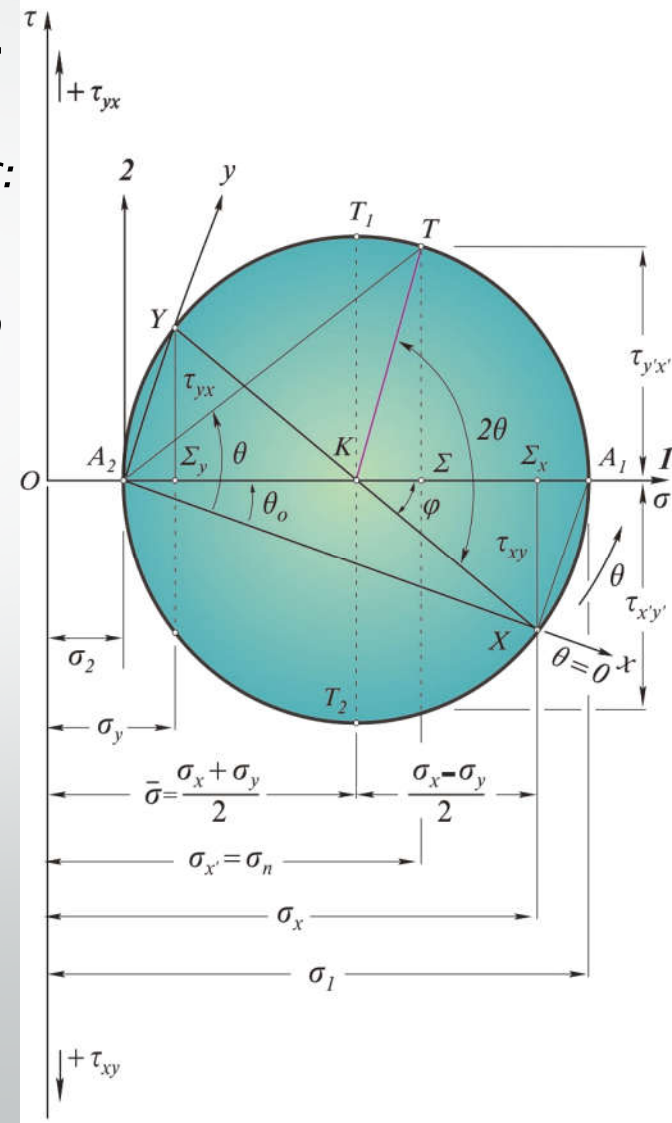
■ Τα βήματα για την σχεδίαση του κύκλου είναι τα εξής:

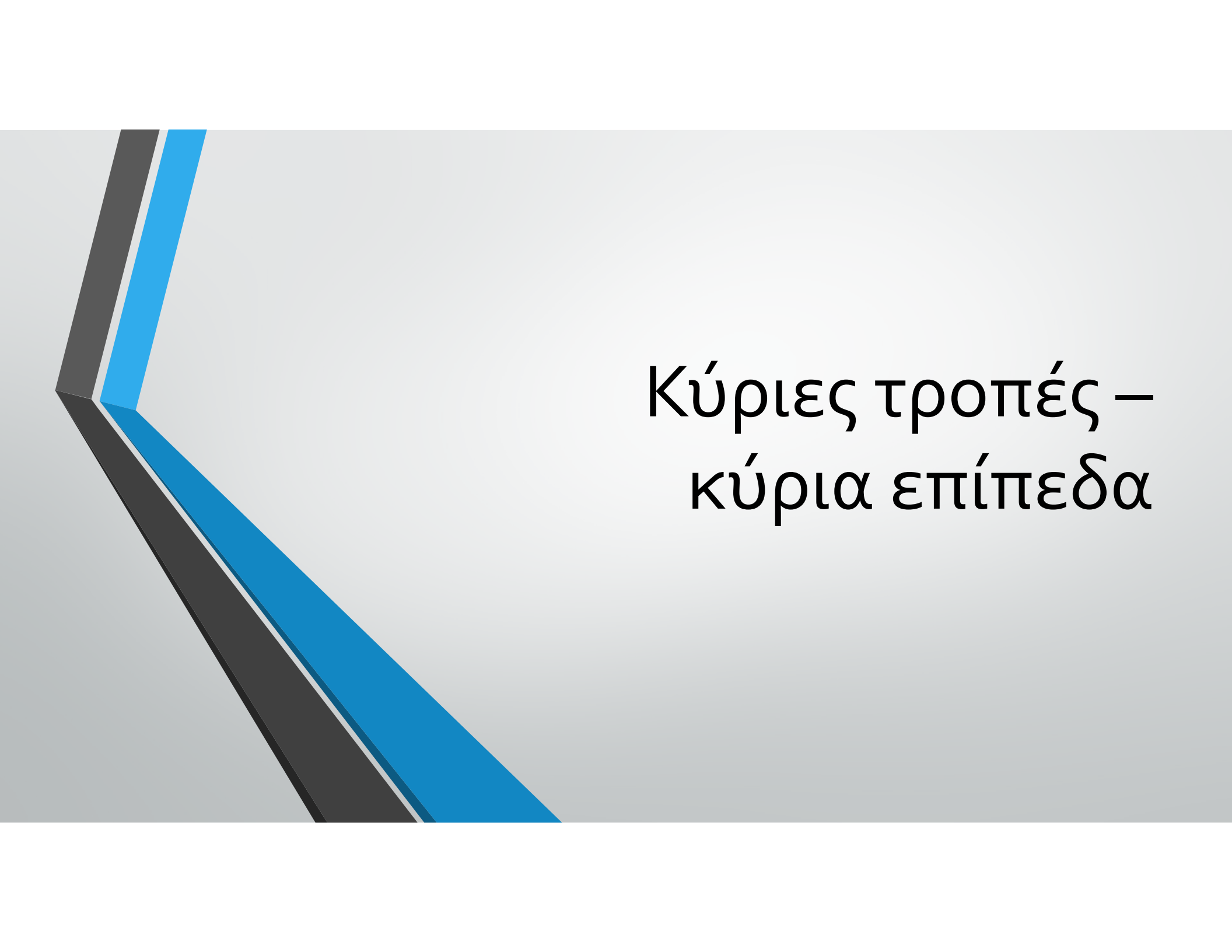
1. Στον οριζόντιο άξονα των ορθών τάσεων σ , παίρνουμε τμήμα $(O\Sigma_x) = \sigma_x$ και $(O\Sigma_y) = \sigma_y$.
2. Το μέσο τους K είναι το κέντρο του κύκλου, αφού έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$.
3. Κάνουμε την εξής σύμβαση: οι θετικές τιμές $+\tau_{xy}$ σχεδιάζονται αντίθετα προς τον άξονα y (προς τα κάτω), ενώ οι θετικές τιμές $+\tau_{yx}$ σύμφωνα με την φορά του άξονα y (προς τα πάνω).
4. Έτσι, ανάλογα αν $\tau_{xy} = \tau_{yx} > 0$ ή $\tau_{xy} = \tau_{yx} < 0$ βρίσκουμε τα σημεία X και Y . Στο σχήμα δεξιά, τυχαίνει $\tau_{xy} = \tau_{yx} > 0$.



Κύκλος του Mohr

- Τα βήματα για την σχεδίαση του κύκλου είναι τα εξής:
- 5. Ενώνουμε τα σημεία X και Y που είναι αντιδιαμετρικά, οπότε η ευθεία θα διέρχεται από το K .
- 6. Με κέντρο K και ακτίνα (KX) γράφουμε κύκλο.
- 7. Θα είναι τότε $(OA_1) = \sigma_1$, $(OA_2) = \sigma_2$.
- 8. Ενώνουμε το A_2 με το X και προκύπτει ο άξονας x .
- 9. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο κύριος άξονας 1 πάντα, οπότε η γωνία $X\hat{A}_2A_1$ είναι η γωνία θ_0 , θετική με φορά όπως στο σχήμα.
- 10. Επιλέγοντας άλλη τυχαία γωνία θ βρίσκουμε αμέσως, στο σημείο T , την ορθή και διατμητική τάση στο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με τον x .

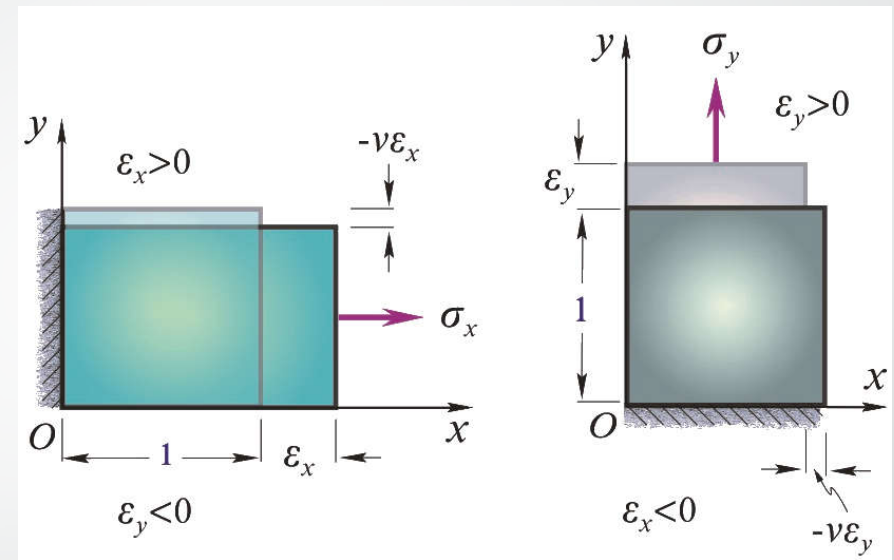




Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Είδαμε ότι η ορθή τροπή ή παραμόρφωση ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής του μήκους ενός στοιχείου, προς το αρχικό του μήκος.
- Για επίπεδη ένταση τέτοιες είναι οι ε_x , ε_y κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x , y αντίστοιχα.
- Σημειώνουμε ότι οι ορθές τροπές είναι προφανώς αδιάστατα μεγέθη.
- Έτσι αν ένα στοιχείο αυξάνει το μήκος του, συνεπώς η μεταβολή μήκους του είναι θετική, τότε και η αντίστοιχη γραμμική παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση αυτή είναι θετική.
- Αντίστροφα αν μειώνεται το μήκος του, η αντίστοιχη ορθή παραμόρφωση είναι αρνητική.



Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Η γωνία διάτμησης γ_{xy} ισούται με τη μεταβολή της αρχικά ορθής γωνίας που έχει πλευρές τους άξονες x, y και είναι θετική, όταν μετά την παραμόρφωση οι x, y πλησιάσουν και αρνητική όταν απομακρυνθούν.

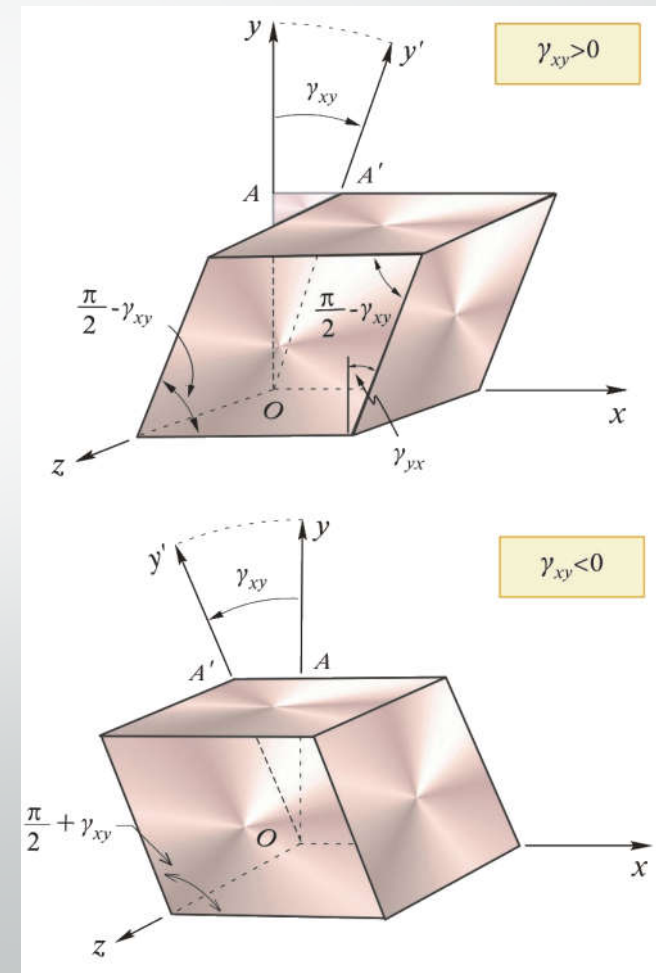
- Για ομοιομορφία των σχέσεων, ορίζουμε ως **διατμητική παραμόρφωση** την ποσότητα:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

- Τότε ο τανυστής των τροπών ή των παραμορφώσεων στην επίπεδη ένταση μπορεί να γραφεί ως:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

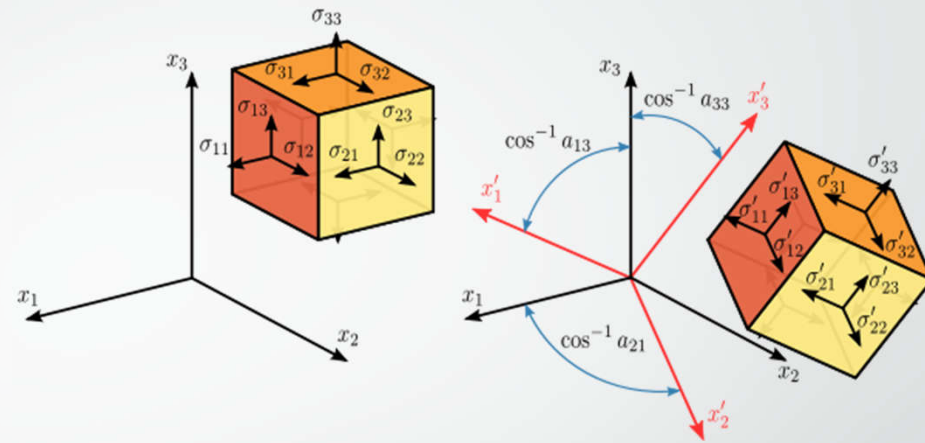
- Στην τρισδιάστατη ένταση: $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$



Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Όπως και στην περίπτωση του τανυστή των τάσεων, και ο τανυστής των τροπών μπορεί να μετασχηματιστεί (περιστραφεί) μέσω ενός **μητρώου μετασχηματισμού** Λ_S :

$$\Lambda_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



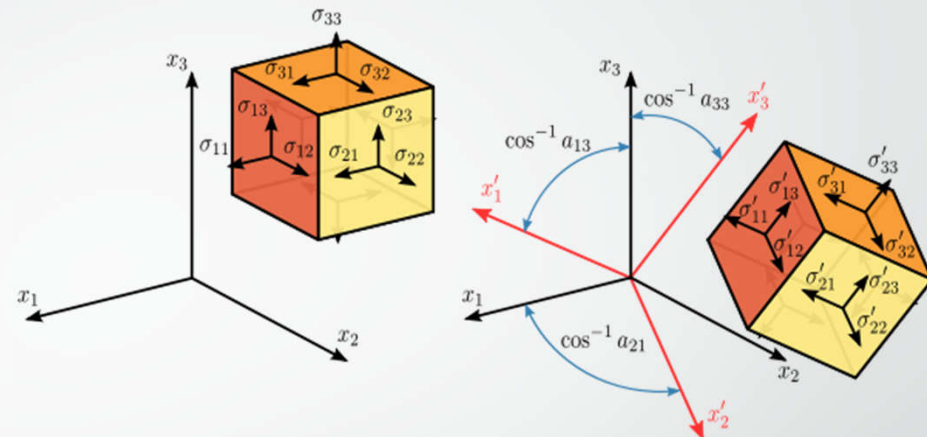
- όπου a_{ij} τα **συννημίτονα κατεύθυνσης**, δηλαδή $a_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$.
- Θυμίζουμε ότι αν $\Lambda_S^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ (ανάστροφος), αποδεικνύεται ότι $\Lambda_S \Lambda_S^T = \Lambda_S^T \Lambda_S = I$, δηλαδή ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος.

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Ο μετασχηματισμός γίνεται ως εξής:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- $[\varepsilon'] = \Lambda_s [\varepsilon] \Lambda_s^T$ (από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).
- $[\varepsilon] = \Lambda_s^T [\varepsilon'] \Lambda_s$ (από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).

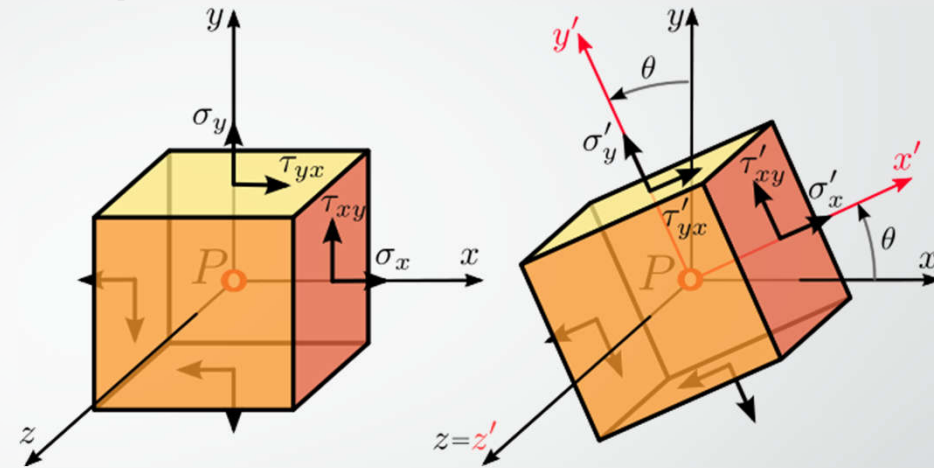


Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy . Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ .
- Σχηματίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο Λ_p :

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Τότε ο μετασχηματισμός του τανυστή των τροπών $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$ γίνεται όπως προηγουμένως.



Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- Αναλύοντας τις σχέσεις για το επίπεδο, προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τροπές $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ σε κάποιο σύστημα αξόνων Oxy , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τροπές $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \varepsilon_{x'y'}$ σε κάποιο στραμμένο κατά γωνία θ σύστημα $Ox'y'$, (η γωνία θ θετική Α.Δ.Ω.).
- Οι σχέσεις που δίνουν τις $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \varepsilon_{x'y'}$ είναι:
 - $\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$
 - $\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$
 - $\varepsilon_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$
- Παρατηρείστε ότι $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$.

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Με βάση την τρίτη σχέση μετασχηματισμού, που δίνει τις νέες διατμητικές τροπές:

$$\varepsilon_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$$

- προκύπτει ότι υπάρχει μια ειδική τιμή της γωνίας θ , έστω γωνία θ_0 , για την οποία η διατμητική παραμόρφωση $\varepsilon_{x'y'}$ στο νέο σύστημα μηδενίζεται. Λύνω ως προς θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right), -45^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$$

- Θα ονομάσουμε **κύριο άξονα 1**, αυτόν για τον οποίο μηδενίζονται οι διατμητικές παραμορφώσεις και βρίσκεται πλησιέστερα στον «ισχυρότερο» εκ των αξόνων x, y . Ο **κύριος άξονας 2** θα είναι κάθετος στον άξονα 1.

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Οι κύριοι άξονες αυτοί ταυτίζονται με τους κύριους άξονες των τάσεων.
- Επειδή οι διατμητικές παραμορφώσεις μηδενίζονται στους κύριους άξονες, **εκεί το στοιχειώδες απαραμόρφωτο τετράγωνο μετατρέπεται μετά την παραμόρφωση σε ορθογώνιο** (δεν αλλάζουν οι γωνίες αλλά παραμένουν ορθές).
- Αντικαθιστώντας την γωνία θ_0 στις σχέσεις μετασχηματισμού προκύπτει:

- $$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \Rightarrow$$

- $$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \varepsilon_{max}, \text{ με } \varepsilon_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κύκλος του Mohr ως εργαλείο επίλυσης.

Νόμος του Hooke στην διάτμηση

- Ο νόμος του Hooke συνδέει επίσης την διατμητική τάση τ με την γωνιακή παραμόρφωση γ , με την ανάλογη γραμμική σχέση:

$$\tau = G\gamma$$

- Ο συντελεστής G λέγεται **μέτρο διάτμησης**. Είναι το αντίστοιχο του μέτρου ελαστικότητας E στην διάτμηση, για αυτόν τον λόγο και μερικές φορές αναφέρεται ως «δεύτερο μέτρο ελαστικότητας».
- Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο στην γραμμικώς ελαστική περιοχή συμπεριφοράς του υλικού.
- Επίσης αποδεικνύεται από την θεωρία της ελαστικότητας ότι:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Αναφορές- References

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό βασίζεται κυρίως στο πανεπιστημιακό σύγγραμμα του Δρ. Παναγιώτη Βουθούνη, τόσο ως προς τη δομή όσο και ως προς τη θεωρητική προσέγγιση και την ορολογία.

- *Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280- 3-7].*