

Χρηματοοικονομική Διοίκηση

6^η Διάλεξη –Αξιολόγηση ακολουθιών ταμειακών ροών

Δρ. Αγγελική Ζαχαράκη (agzachar@pme.duth.gr)

Μηχανικός Παραγωγής και Διοίκησης

Πλάνο Παρουσίασης

- Ενότητα 1: Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών
- Ενότητα 2: Διηλεκτής ράντα
- Ενότητα 3: Ετήσια ράντα
- Ενότητα 4: Αύξηση ταμειακών ροών
- Ενότητα 5: Μη ετήσιες ταμειακές ροές

Ενότητα 1

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Ενότητα 1: Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- Κανόνας 1: Μόνον οι αξίες που βρίσκονται στην ίδια χρονική στιγμή μπορούν να συγκριθούν ή να συνδυαστούν.
- Κανόνας 2: Για να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία μιας ταμειακής ακολουθίας πρέπει να την ανατοκίσουμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση.

$$FV_n = C \times (1 + r)^n$$

- Κανόνας 3. Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας μελλοντικής ταμειακής ακολουθίας, πρέπει να την προεξοφλήσουμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$PV = C \div (1 + r)^n = \frac{C}{(1 + r)^n}$$

Ενότητα 1: Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εφαρμογή των κανόνων αξιολόγησης ταμειακών ροών

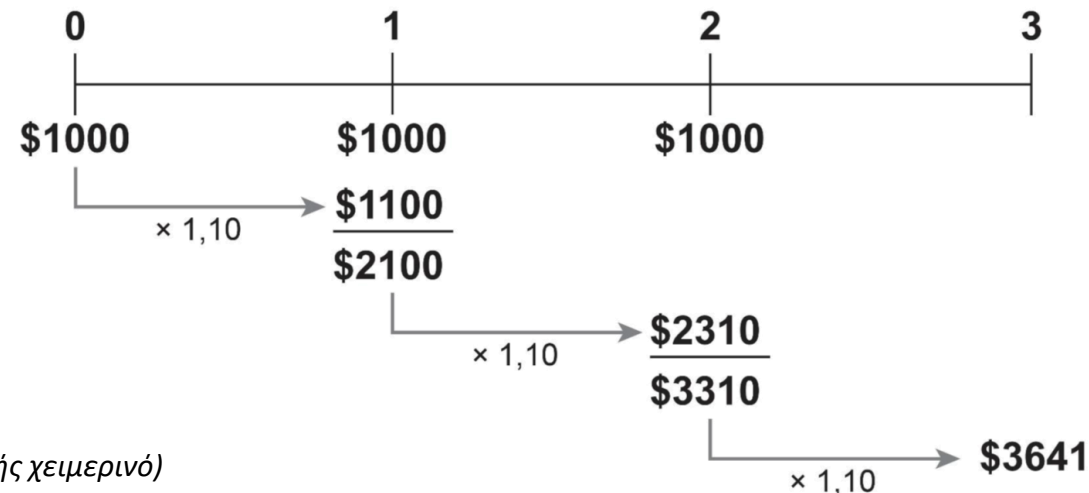
- Έστω ότι σχεδιάζουμε να αποταμιεύσουμε \$1 000 σήμερα, και \$1 000 στο τέλος καθενός εκ των επόμενων δύο ετών.
- Αν κερδίζουμε ένα σταθερό επιτόκιο ύψους 10% στις αποταμιεύσεις μας, πόσα χρήματα θα έχουμε σε τρία χρόνια από σήμερα;

Λύση:

Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους

- Πρώτα , παίρνουμε την κατάθεση στην ημερομηνία 0 και την μετακινούμε στην ημερομηνία 1
- Συνδυάζουμε αυτό το ποσό με την κατάθεση στην ημερομηνία 1 και μετακινούμε το συνδυασμένο σύνολο στην ημερομηνία 2.

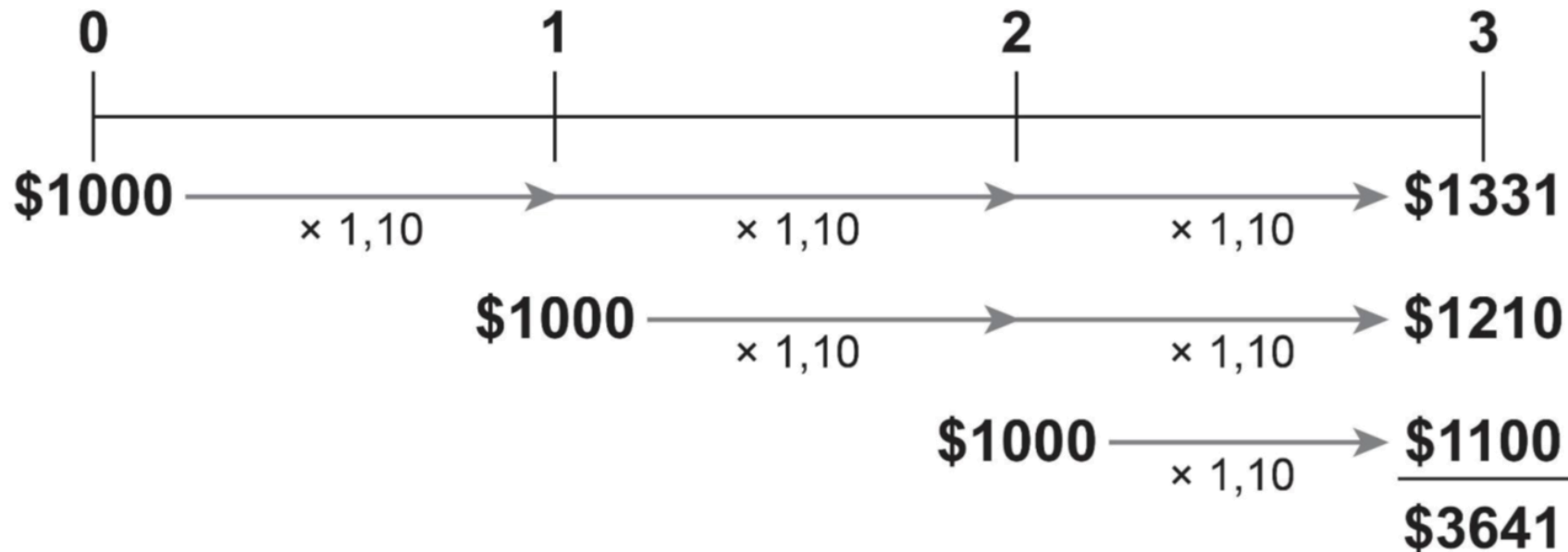
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ως εξής



Ενότητα 1: Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Μια άλλη προσέγγιση είναι να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία στο έτος 3 για κάθε ταμειακή ακολουθία ξεχωριστά

Μόλις όλα τα ποσά είναι σε τιμές του έτους 3, τα συνδυάζουμε

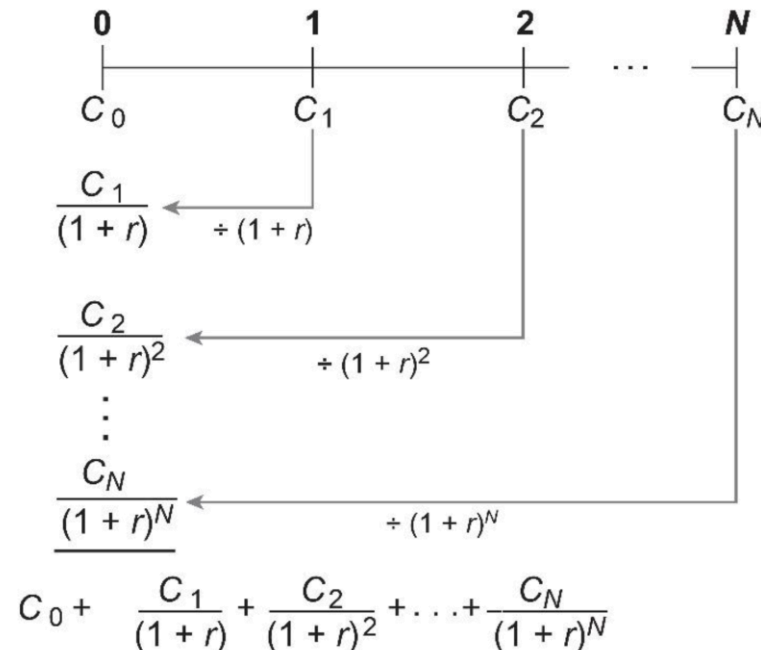


Ενότητα 1: Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εξετάζουμε τη ακολουθία ταμειακών ροών: C_0, C_1 στο χρόνο 1, κ.ο.κ .., έως το C_N , στο χρόνο N



Υπολογίζουμε την παρούσα αξία αυτής της ακολουθίας ταμειακών ροών σε δύο βήματα
Πρώτα, υπολογίζουμε την παρούσα αξία κάθε μεμονωμένης ταμειακής ακολουθίας.
Στη συνέχεια συνδυάζουμε τις παρούσες αξίες



Παράδειγμα 1: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Πρόβλημα προς Λύση:

Μόλις αποφοιτήσατε και χρειάζεστε χρήματα για να αγοράσετε ένα καινούργιο αυτοκίνητο.

Ο πλούσιος θείος σας, Henry θα σας δανείσει τα χρήματα αν συμφωνήσετε να τον αποπληρώσετε σε τέσσερα χρόνια.

Εσείς προσφέρεστε να του καταβάλλετε το επιτόκιο που θα λάμβανε αν τοποθετούσε τα χρήματά του σε έναν αποταμιευτικό λογαριασμό.

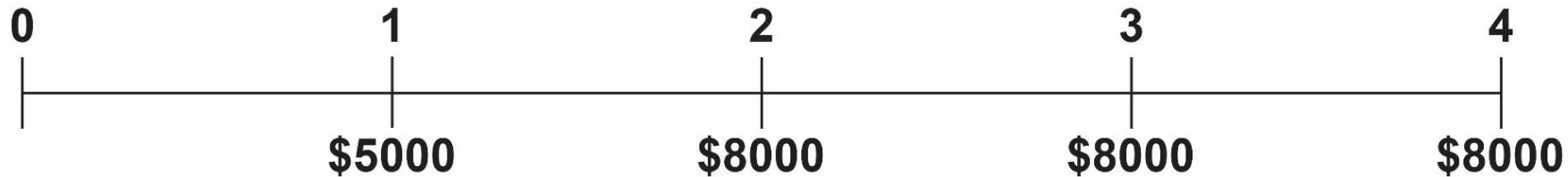
Με βάση τα κέρδη σας και το κόστος ζωής σας, θεωρείτε ότι θα είστε σε θέση να του επιστρέψετε \$5000 σε ένα χρόνο και στη συνέχεια \$8000 κάθε χρόνο για τα επόμενα τρία χρόνια.

Αν ο θείος σας κέρδιζε σε διαφορετική περίπτωση επιτόκιο 6% στην αποταμίευσή του, ποιο είναι το ποσό που μπορείτε να δανειστείτε;

Παράδειγμα 1: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Σχέδιο Λύσης:

Οι ταμειακές ροές που μπορείτε να υποσχεθείτε στο θείο σας είναι οι παρακάτω:



Ο θείος σας θα πρέπει να είναι πρόθυμος να σας δώσει μια ποσότητα που αντιστοιχεί σε αυτές τις πληρωμές με όρους παρούσας αξίας. Αυτή είναι η ποσότητα των χρημάτων που θα χρειαζόταν για να παράγει τις ίδιες ταμειακές ροές.

- (1) Θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την εξίσωση που είδαμε στην Διαφάνεια 9
- (2) Θα επιβεβαιώσουμε την απάντησή μας υπολογίζοντας την παρούσα αξία αυτού του ποσού.

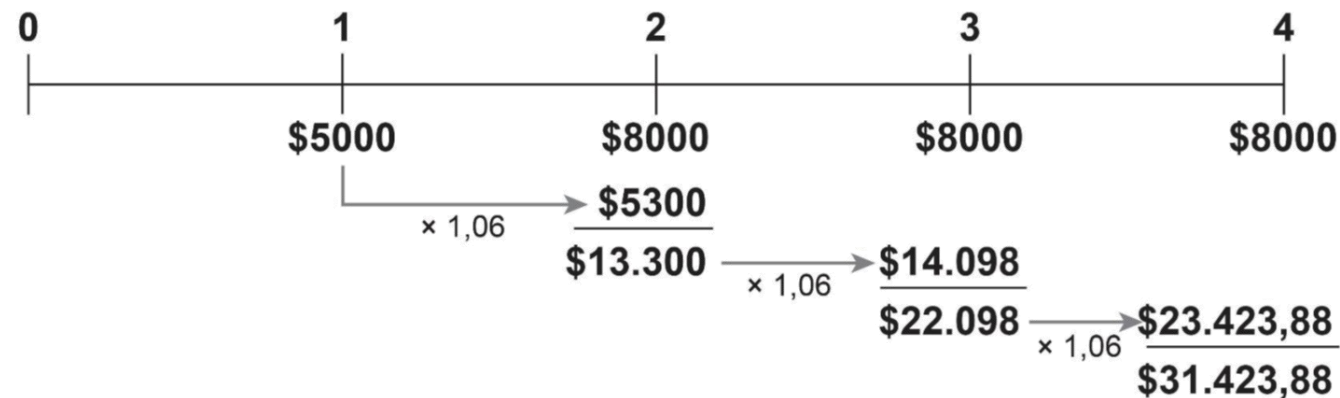
Παράδειγμα 1: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εκτέλεση Λύσης:

1. Μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{5000}{1,06} + \frac{8000}{1,06^2} + \frac{8000}{1,06^3} + \frac{8000}{1,06^4} \\ &= 4.716,98 + 7.119,97 + 6.716,95 + 6.336,75 = \$24.890,65 \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι ο θείος σας σάς δίνει τα χρήματα και στη συνέχεια καταθέτει στην τράπεζα τις πληρωμές που του καταβάλλετε κάθε χρόνο. Πόσα θα διαθέτει σε τέσσερα χρόνια από τώρα; Πρέπει να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία των ετήσιων καταθέσεων. Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να υπολογίσουμε το υπόλοιπο του καταθετικού λογαριασμού κάθε χρόνο:



Παράδειγμα 1: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εκτέλεση Λύσης:

2. Για να επιβεβαιώσουμε την απάντησή μας, ας υποθέσουμε ότι ο θείος σας διατηρεί τα \$24.890,65 στην τράπεζα σήμερα κερδίζοντας τόκο 6%. Σε τέσσερα χρόνια θα είχε:

$$FV = \$24.890,65 \times (1,06)^4 = \$31.423,87 \text{ σε 4 χρόνια}$$

Και με τους δύο τρόπους καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα (η μικρή διαφορά οφείλεται στη στρογγυλοποίηση).

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Έτσι, ο θείος σας θα πρέπει να είναι πρόθυμος να σας δανείσει \$24.890, 65 για να λάβει τις καταβολές που του έχετε υποσχεθεί. Αυτή η ποσότητα είναι μικρότερη από τη συνολική ποσότητα που θα του καταβάλλετε (\$5000 + \$8000 + \$8000 + \$8000 = \$29.000) εξαιτίας της διαχρονικής αξίας των χρημάτων.

Παράδειγμα 2: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Πρόβλημα προς Λύση:

Μόλις αποφοιτήσατε και χρειάζεστε χρήματα για να δώσετε προκαταβολή για ένα διαμέρισμα.

Η θεία σας θα σας δανείσει τα χρήματα, εφόσον συμφωνείτε να την αποπληρώσετε μέσα σε έξι μήνες.

Προσφέρετε να της πληρώσετε το επιτόκιο που θα κέρδιζε αν έβαζε τα χρήματά της σε ένα λογαριασμό ταμειυτηρίου.

Με βάση τα κέρδη και τα έξοδα διαβίωσής σας, νομίζετε ότι θα είστε σε θέση να αποπληρώσετε \$70 τον επόμενο μήνα, \$85 σε κάθε έναν από τους επόμενους δύο μήνες, και στη συνέχεια \$90 κάθε μήνα για τους μήνες 4 έως 6.

Αν η θεία σας παίρνει 0,5% ετησίως για τις αποταμιεύσεις της, πόσο μπορείτε να δανειστείτε από αυτήν;

Σχέδιο Λύσης:

Οι ταμειακές ροές που μπορείτε να υποσχεθείτε στη θεία σας είναι οι εξής:



Θα ήταν πρόθυμη να σας δώσει ένα ποσό που θα ήταν ίσο με αυτές τις πληρωμές σε όρους παρούσας αξίας

Παράδειγμα 2: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εκτέλεση Λύσης:

Μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ως εξής:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{70}{1,005} + \frac{85}{1,005^2} + \frac{85}{1,005^3} + \frac{90}{1,005^4} + \frac{90}{1,005^5} + \frac{90}{1,005^6} \\ &= \$69,65 + \$84,16 + \$83,74 + \$88,22 + \$87,78 + \$87,35 \\ &= \$500,90 \end{aligned}$$

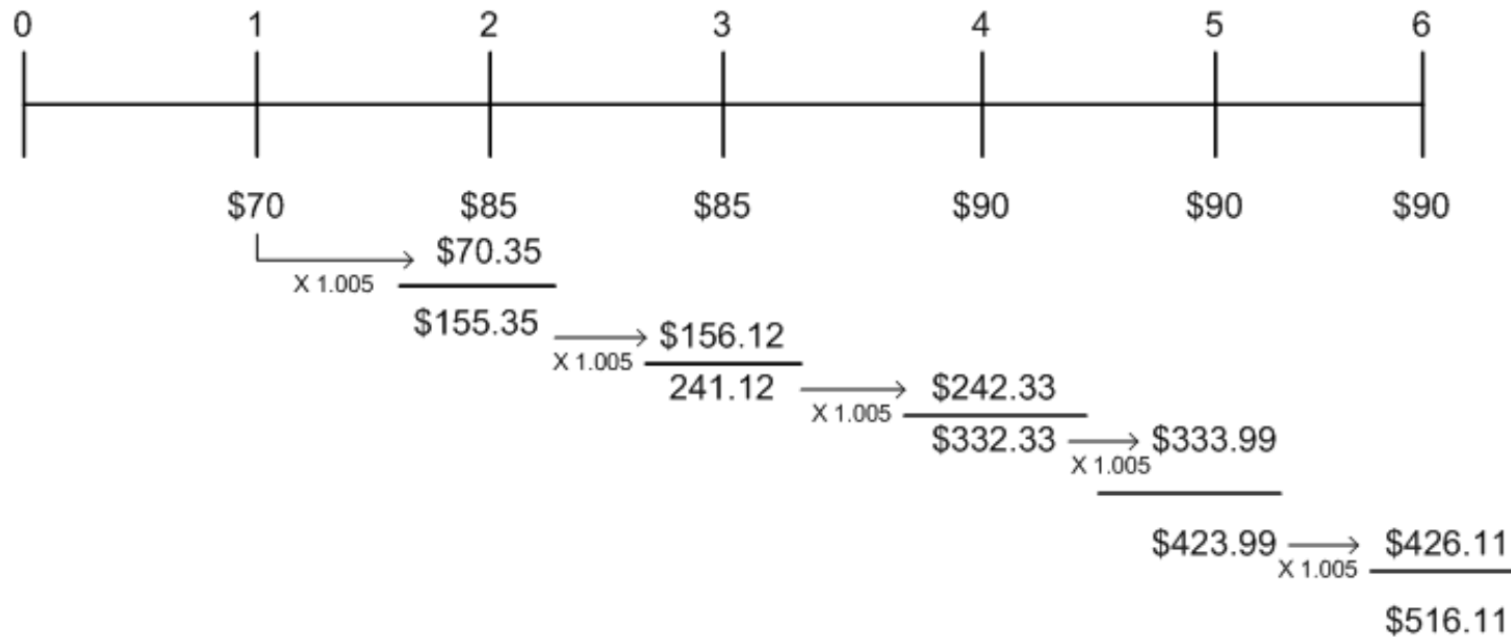
Τώρα, υποθέτουμε ότι η θεία σας σας δίνει τα χρήματα και στη συνέχεια καταθέτει τις πληρωμές σας κάθε μήνα στην τράπεζα

Πόσα χρήματα θα έχει σε έξι μήνες από τώρα;

- Πρέπει να υπολογίσουμε την μελλοντική αξία των μηνιαίων καταθέσεων.
- Ένας τρόπος είναι να υπολογίσουμε το τραπεζικό υπόλοιπο κάθε μήνα.

Παράδειγμα 2: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εκτέλεση Λύσης:



Παράδειγμα 2: Παρούσα αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Εκτέλεση Λύσης:

Για να επιβεβαιώσουμε την απάντησή μας, ας υποθέσουμε ότι η θεία σας κράτησε στην τράπεζα το ποσό των \$500,90 το οποίο κερδίζει επιτόκιο 0,5%.

Σε έξι μήνες θα έχει:

$$FV = \$500,90 \times (1,005)^6 = \$516,11 \text{ σε 6 μήνες}$$

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Επομένως, η θεία σας θα είναι διατεθειμένη να σας δανείσει \$500 90 με αντάλλαγμα τις πληρωμές που της υποσχεθήκατε.

Αυτό το ποσό είναι ,μικρότερο από το σύνολο που θα της πληρώσετε (\$70+\$85+\$85+\$90+\$90+\$90=\$510) λόγω της διαχρονικής αξίας του χρήματος

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

Χρησιμοποιώντας μια χρηματοοικονομική αριθμομηχανή: Λύνοντας ως προς την παρούσα και μελλοντική αξία των ακολουθιών ταμειακών ροών

- Οι χρηματοοικονομικές αριθμομηχανές διαθέτουν ένα σύνολο εξισώσεων που εκτελούν τους πιο συνηθισμένους υπολογισμούς
- Οι μεταβλητές είναι πέντε:
 - N = αριθμός περιόδων
 - PV = παρούσα αξία
 - PMT = ταμειακή ροή ή «πληρωμή»
 - FV = μελλοντική αξία
 - I/Y = επιτόκιο
- Κάθε συνάρτηση χρειάζεται τέσσερις από αυτές τις μεταβλητές ως εισακτέες τιμές και αποδίδει την αξία της πέμπτης

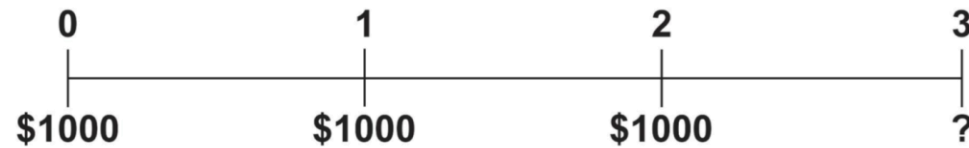
Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας

1^ο Πρόβλημα προς Λύση:

Σχεδιάζετε να αποταμιεύσετε \$1000 σήμερα και στο τέλος κάθε χρόνου για δύο χρόνια. Με ένα σταθερό επιτόκιο 10%, τι ποσό θα διαθέτετε στην τράπεζα σε τρία χρόνια από τώρα;

Σχέδιο Λύσης:

Θα ξεκινήσουμε με το χρονοδιάγραμμα για το αποταμιευτικό αυτό πλάνο.

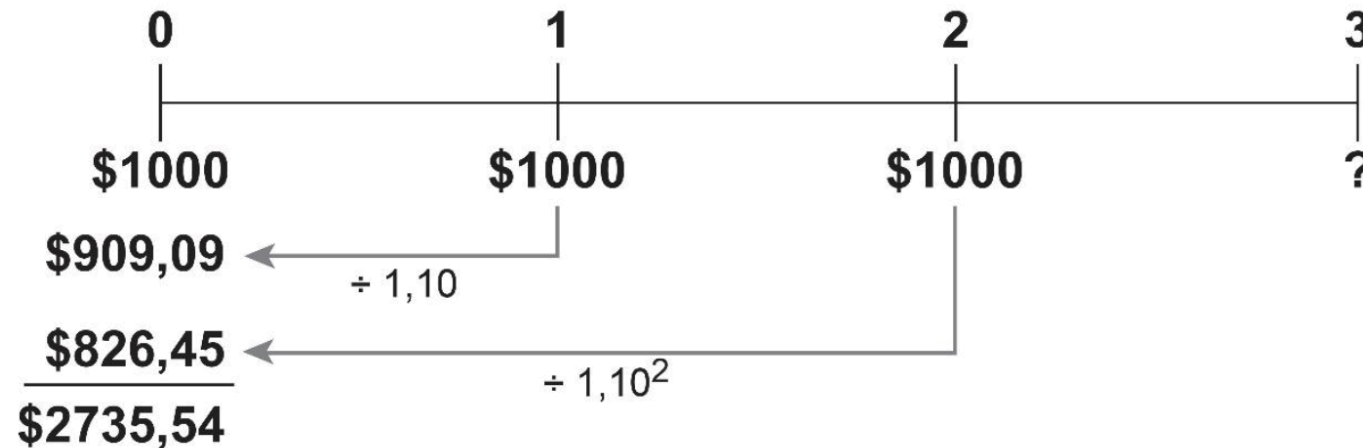


Ας λύσουμε αυτό το πρόβλημα με έναν διαφορετικό τρόπο από αυτόν που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω σε αυτό το κεφάλαιο, χωρίς όμως να αποκλίνουμε από τους κανόνες. Αρχικά, θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία των ταμειακών ροών. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την αξία τους τρία χρόνια αργότερα (μελλοντική αξία).

Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας

Εκτέλεση Λύσης:

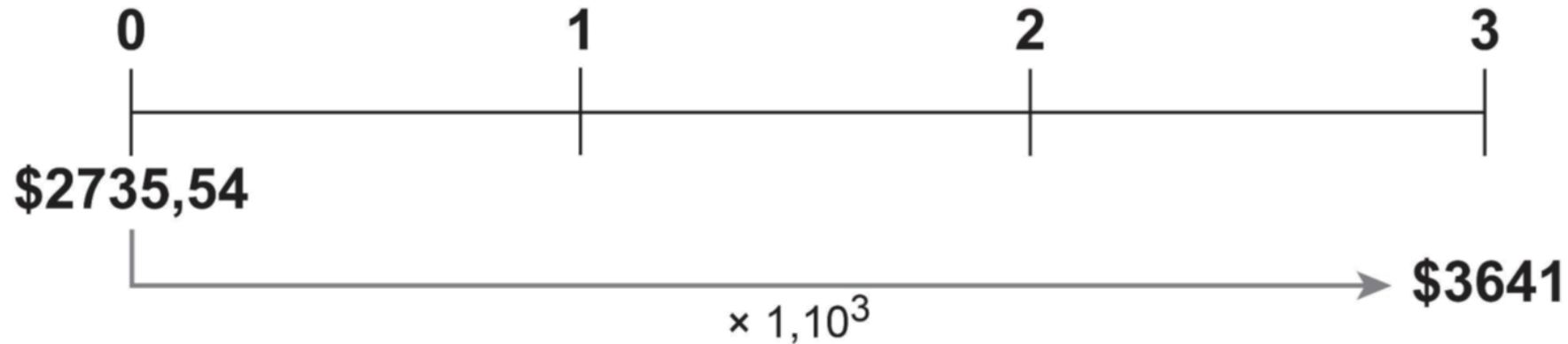
Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των ταμειακών ροών. Εδώ, θα ασχοληθούμε ξεχωριστά με κάθε ταμειακή ροή και στη συνέχεια θα συνδυάσουμε τις παρούσες αξίες.



Η αποταμίευση \$2.735,54 σήμερα αντιστοιχεί στην αποταμίευση \$1000 ανά έτος για τρία χρόνια. Τώρα, ας υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία των \$2.735,54 κατά το έτος 3.

Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας

Εκτέλεση Λύσης:



Αξιολόγηση του Αποτελέσματος:

Αυτή η απάντηση των \$3641 είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα που υπολογίσαμε και νωρίτερα. Εφόσον εφαρμόζουμε τους τρεις κανόνες αξιολόγησης ταμειακών ροών, πάντα θα καταλήγουμε στη σωστή απάντηση.

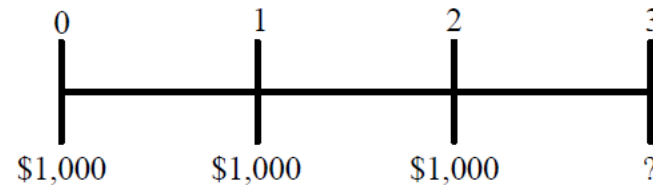
Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας

2° Πρόβλημα προς Λύση:

Σχεδιάζουμε να αποταμιεύσουμε \$1000 σήμερα και στο τέλος κάθε έτους των επόμενων δύο ετών. Σε ένα σταθερό επιτόκιο 6%, πόσο θα έχουμε στην τράπεζα σε τρία χρόνια από σήμερα;

Σχέδιο Λύσης:

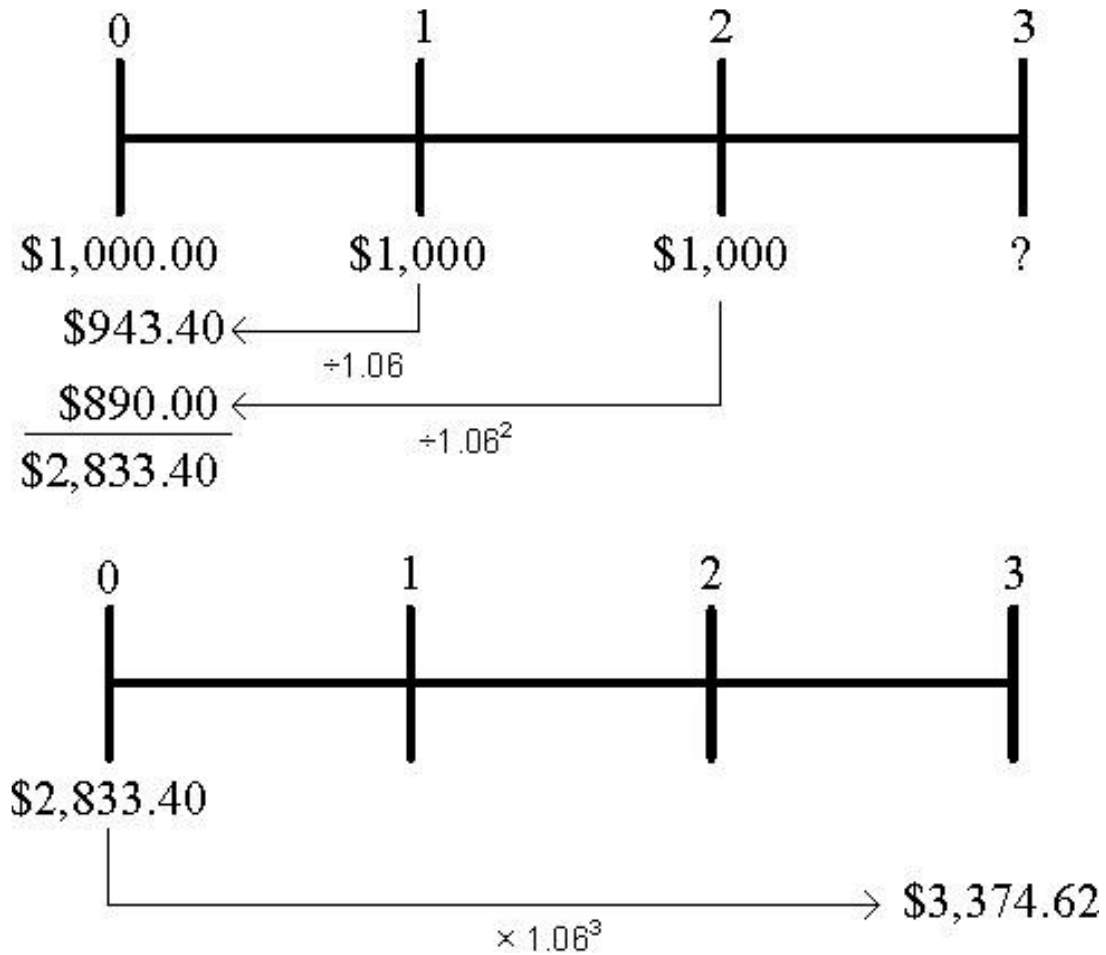
Ξεκινάμε με ένα χρονοδιάγραμμα για αυτό το αποταμιευτικό πρόγραμμα:



Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την παρούσα αξία των ταμειακών ροών.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την αξία τρία χρόνια αργότερα (τη μελλοντική της αξία).

Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας



Υπολογισμός της μελλοντικής αξίας

Αξιολόγηση του Αποτελέσματος:

Η απάντηση των \$3 374 62 και μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα ασχέτως του τρόπου με τον οποίο θα λύσουμε το πρόβλημα.

Ενότητα 2

Διηλεκτής ράντα

Διηνεκής ράντα

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την παρούσα αξία, η παρούσα αξία μιας διηνεκούς ράντας με καταβολή C και επιτόκιο r είναι.

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \dots$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι ταμειακές ροές (C στην εξίσωση) είναι οι ίδιες γιατί η ταμειακή ροή μιας διηνεκούς ράντας είναι σταθερή.

Επίσης, επειδή η πρώτη ταμειακή ροή είναι σε μια περίοδο, δεν υπάρχει ταμειακή ροή στο χρόνο 0 ($C_0 = 0$).

Για να καταλήξουμε σε μια συντόμευση υπολογίζουμε την αξία της διηνεκούς ράντας δημιουργώντας τη δική μας διηνεκή ράντα.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι μπορείτε να επενδύσετε \$100 σε έναν τραπεζικό λογαριασμό που αποδίδει τόκο 5% κάθε χρόνο για πάντα.

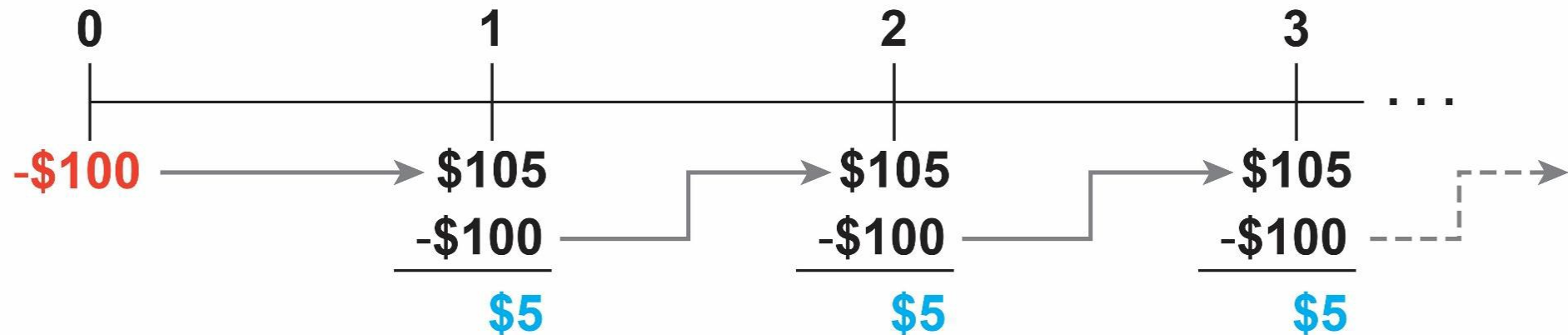
Στο τέλος του πρώτου χρόνου θα διαθέτετε \$105 στην τράπεζα: τα αρχικά \$100 και τα \$5 του τόκου.

Διηνεκής ράντα

Ας υποθέσουμε ότι αποσύρετε τα \$5 και επανεπενδύετε τα \$100 για τον δεύτερο χρόνο.

Μετά από ένα χρόνο θα έχετε και πάλι \$105 και μπορείτε και πάλι να αποσύρετε τα \$5 και να επανεπενδύσετε τα \$100 για ακόμη έναν χρόνο.

Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία χρόνο με το χρόνο, μπορείτε να αποσύρετε \$5 κάθε χρόνο στο διηνεκές:



Διηνεκής ράντα

Γενικεύοντας, ας υποθέσουμε ότι επενδύουμε μια ποσότητα P σε έναν τραπεζικό λογαριασμό με ένα επιτόκιο r .

Κάθε χρόνο μπορούμε να αποσύρουμε τον τόκο που κερδίσαμε, $C = r \times P$, αφήνοντας το αρχικό κεφάλαιο P στην τράπεζα. Επειδή το κόστος για τη δημιουργία της διηνεκούς ράντας είναι μόνον η **αρχική επένδυση του κεφαλαίου (P)**, η **αξία του να λαμβάνουμε C στο διηνεκές είναι ως εκ τούτου ένα προκαταβολικό κόστος P** .

Αν αναδιατάξουμε τους όρους της εξίσωσης $C = r \times P$ για να λύσουμε ως προς P έχουμε:

$$P = \frac{C}{r}$$

Άρα, η παρούσα αξία μιας διηνεκούς ράντας, υπολογίζεται:

$$PV(C \text{ στο διηνεκες}) = \frac{C}{r}$$

1^ο Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα

Πρόβλημα προς Λύση:

Θέλετε να αφήσετε ένα κληροδότημα για ένα ετήσιο πάρτι αποφοίτησης στο πανεπιστήμιό σας. Θέλετε το πάρτι να είναι ένα αξιομνημόνευτο γεγονός και έτσι κληροδοτείτε \$30.000 ανά έτος για πάντα. Αν το πανεπιστήμιο κερδίζει 8% ανά έτος από τις επενδύσεις του, και αν το πρώτο πάρτι θα διοργανωθεί σε ένα χρόνο από τώρα, πόσα θα πρέπει να δωρίσετε για να χρηματοδοτήσετε το πάρτι;

Σχέδιο Λύσης:

Το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών που θέλετε να παρέχετε είναι:



Αυτή είναι μια συνηθισμένη διηνεκής ράντα των \$30.000 ανά έτος. Το κεφάλαιο που θα χρειαστεί να δωρίσετε στο πανεπιστήμιο στο διηνεκές είναι η παρούσα αξία αυτής της ακολουθίας ταμειακών ροών.

1ο Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση για τη διηνεκή ράντα:

$$PV = \frac{C}{r}$$
$$= \frac{\$30.000}{0,08} = \$375.000 \text{ σήμερα}$$

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Αν δωρίσετε \$375.000 σήμερα και αν το πανεπιστήμιο τα επενδύει με επιτόκιο 8% για πάντα, τότε οι απόφοιτοι θα έχουν στη διάθεσή τους \$30.000 κάθε χρόνο για να χρηματοδοτήσουν το πάρτι της αποφοίτησής τους

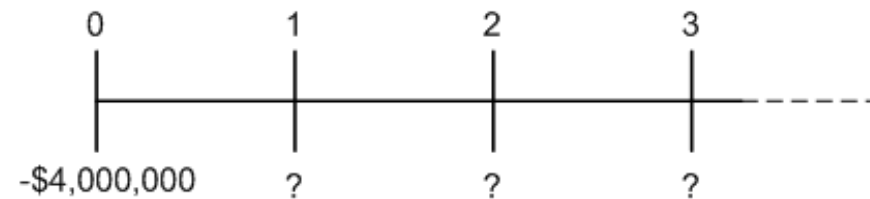
2° Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα

Πρόβλημα προς Λύση:

Κερδίσατε το λαχείο, και θέλετε να κληροδοτήσετε χρήματα για μια θέση καθηγητή στο πανεπιστήμιό σας. Είστε πρόθυμοι να δώσετε 4 εκατομμύρια δολάρια από τα κέρδη σας για το σκοπό αυτό. Αν το πανεπιστήμιο κερδίζει 5% ετησίως από τις επενδύσεις του και ο καθηγητής θα λάβει την πρώτη του πληρωμή μέσα σε ένα χρόνο, πόσο θα το καταβάλει η δωρεά σας κάθε χρόνο;

Σχέδιο Λύσης:

Το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών που θέλετε να παρέχετε είναι:



Αυτή είναι μια συνηθισμένη διηνεκής ράντα. Το ποσό που μπορεί να αποσυρθεί κάθε χρόνο και να παραμείνει το κεφάλαιο ανέπαφο είναι η ταμειακή ροή.

1^ο Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση για τη διηνεκή ράντα:

$$PV = \frac{C}{r}, \text{ οπότε } C = PV \times r$$

$$C = \$4.000.000 \times 0,05 = \$200.000$$

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

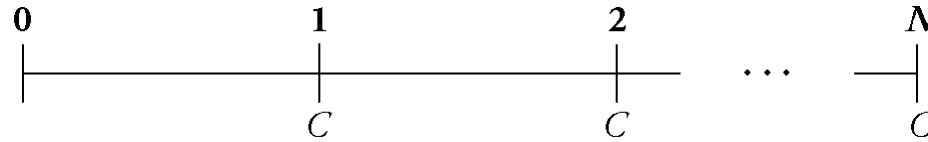
Αν δωρίσετε σήμερα \$4 000 000 και αν το πανεπιστήμιο τα επενδύσει με 5% ανά έτος για πάντα, τότε ο καθηγητής που θα επιλεγεί θα εισπράττει \$200 000 κάθε χρόνο

Ενότητα 3

Ετήσια ράντα

Ετήσια ράντα

Μια ετήσια ράντα είναι μια ακολουθία που αποτελείται από ένα σταθερό αριθμό ισόποσων ταμειακών ροών που καταβάλλονται σε τακτικά διαστήματα.



Η διαφορά μεταξύ μιας ετήσιας ράντας και μιας διηνεκούς είναι ότι η ετήσια ράντα λήγει μετά από έναν ορισμένο αριθμό καταβολών.

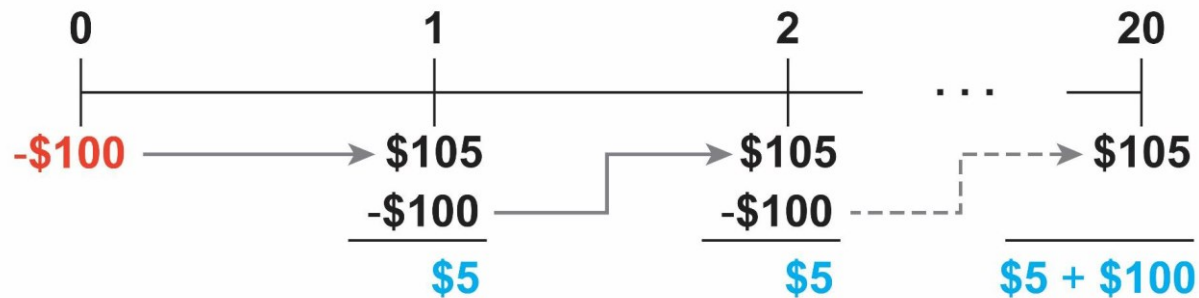
Παρατηρήστε ότι ακριβώς όπως και στην περίπτωση της διηνεκούς ράντας, υιοθετούμε την υπόθεση ότι η πρώτη πληρωμή λαμβάνει χώρα την ημερομηνία 1, σε μια περίοδο από σήμερα.

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C}{(1+r)^N}$$

Για να βρούμε έναν πιο απλό τύπο, χρησιμοποιούμε την ίδια προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε με τη διηνεκή ράντα: *δημιουργούμε τη δική μας ετήσια ράντα!*

Ετήσια ράντα

Με μια αρχική επένδυση των \$100 και επιτόκιο στο 5%, μπορείτε να δημιουργήσετε μια 20ετή ετήσια ράντα των \$5 ανά έτος, ενώ θα λάβετε επιπλέον \$100 όταν κλείσετε το λογαριασμό σας στο τέλος των 20 χρόνων



Σύμφωνα με τον Νόμο της Μίας Τιμής της αρχής αποτίμησης, αυτά που παράγουν ακριβώς τις ίδιες ταμειακές ροές πρέπει να έχουν την ίδια αξία. Επειδή χρειάστηκε μόνο η αρχική επένδυση των \$100 για να δημιουργηθούν οι ταμειακές ροές του χρονοδιαγράμματος, η παρούσα αξία αυτών των ταμειακών ροών είναι \$100 ή

$$\begin{aligned} \$100 = & PV(\text{ετήσια ράντα 20 ετών των } \$5 \text{ ανά έτος}) + \\ & PV(\$100 \text{ σε 20 χρόνια}) \end{aligned}$$

Ετήσια ράντα

Αναδιατάσσοντας

$$\begin{aligned} PV(\text{ετήσια ράντα } 20 \text{ ετών των } \$5 \text{ ανά έτος}) &= \$100 - PV(\$100 \text{ σε } 20 \text{ χρόνια}) = 100 - \frac{100}{(1,05)^{20}} \\ &= \$100 - \$37,69 = \$62,3 \end{aligned}$$

Συνήθως θέλουμε να γνωρίζουμε την PV ως συνάρτηση των C, r και N

Εφόσον το C μπορεί να γραφεί ως $\$100(0.05) = \5 ,
αναδιατάσσουμε

$$\begin{aligned} PV(\text{ετήσια ράντα } 20 \text{ ετών των } \$5 \text{ ανά έτος}) &= \frac{\$5}{0,5} - \frac{\frac{\$5}{0,5}}{(1,05)^{20}} = \frac{\$5}{0,5} \left(1 - \frac{1}{(1,05)^{20}} \right) \\ &= \$5 \times \frac{1}{0,5} \left(1 - \frac{1}{(1,05)^{20}} \right) \end{aligned}$$

Γενικά

$$PV(\text{Ετήσια ράντα για } C \text{ για } N \text{ περιόδους με επιτόκιο } r) = C \times \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1 + r)^N} \right)$$

1^ο Παράδειγμα: Παρούσα αξία μιας ετήσια ράντας ως έπαθλο μιας λαχειοφόρου αγοράς

Πρόβλημα:

Είστε ο τυχερός που κερδίσατε σε μια κρατική λαχειοφόρο αγορά \$30 εκατομμύρια. Μπορεί να λάβετε το έπαθλό σας είτε ως (a) 30 δόσεις του \$1 εκατομμυρίου ανά έτος (ξεκινώντας από σήμερα) ή (b) \$15 εκατομμυρίων σήμερα. Αν το επιτόκιο είναι 8%, ποια επιλογή πρέπει να επιλέξετε;

Σχέδιο Λύσης:

Η επιλογή (a) παρέχει \$30 εκατομμύρια, τα οποία όμως καταβάλλονται σε ένα χρονικό ορίζοντα. Για αξιολογήσουμε σωστά αυτήν την επιλογή, πρέπει να τη μετατρέψουμε στην παρούσα αξία της. Ακολουθεί το χρονοδιάγραμμα.



1^ο Παράδειγμα: Παρούσα αξία μιας ετήσια ράντας ως έπαθλο μιας λαχειοφόρου αγοράς

Σχέδιο Λύσης:

Επειδή η πρώτη πληρωμή καταβάλλεται σήμερα, η τελευταία πληρωμή θα προκύψει σε 29 χρόνια (συνολικά 30 καταβολές). Η δόση του \$1 εκατομμυρίου στην ημερομηνία 0 είναι ήδη διατυπωμένη σε όρους παρούσας αξίας, αλλά πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των υπόλοιπων καταβολών. Ευτυχώς, αυτή η περίπτωση μοιάζει με μια ετήσια ράντα 29 ετών με \$1 εκατομμύριο ανά έτος, και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της ετήσιας ράντας. Μια ετήσια ράντα στην οποία η πρώτη καταβολή προκύπτει άμεσα ονομάζεται μερικές φορές οφειλόμενη ετήσια ράντα. Σε αυτό το βιβλίο χρησιμοποιούμε πάντα τον όρο «ετήσια ράντα» για να σηματοδοτήσουμε μία που καταβάλλεται ληξιπρόθεσμα.

Εκτέλεση Λύσης:

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση ετήσιας ράντας

$$\begin{aligned} PV(\text{ετήσια ράντα 29 ετών του } \$1 \text{ εκατομμυρίου ανά έτος}) &= \$1 \text{ εκατομμύριο} \times \frac{1}{0,08} \left(1 - \frac{1}{(1,08)^{29}} \right) \\ &= \$1 \text{ εκατομμύριο} \times 11,16 = \$11,16 \text{ εκατομμύρια σήμερα} \end{aligned}$$

Έτσι, η συνολική παρούσα αξία των ταμειακών ροών είναι \$1 εκατομμύριο + \$11,6 εκατομμύρια = \$12,6 εκατομμύρια. Σε μορφή χρονοδιαγράμματος

1^ο Παράδειγμα: Παρούσα αξία μιας ετήσια ράντας ως έπαθλο μιας λαχειοφόρου αγοράς

Σχέδιο Λύσης:



Η επιλογή (b), όπου καταβάλλονται \$15 εκατομμύρια προκαταβολικά, είναι καλύτερη, παρά το γεγονός ότι η συνολική ποσότητα των χρημάτων είναι μισή σε σύγκριση με την επιλογή (a).

Οι χρηματοοικονομικές αριθμομηχανές ή το Excel μπορούν να διαχειριστούν με ευκολία τις ετήσιες ράντες, καθώς το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να εισάγουμε την ταμειακή ροή στην ετήσια ράντα ως την PMT.

1^ο Παράδειγμα: Παρούσα αξία μιας ετήσια ράντας ως έπαθλο μιας λαχειοφόρου αγοράς

Σχέδιο Λύσης:

	N	I/Y	PV	PMT	FV
Given:	29	8		1.000.000	0
Solve for:			-11.158.406		
Excel Formula: =PV(RATE,NPER,PMT,FV)=PV(0,08,29,1000000,0)					

Τύπος Excel: **PV(RATE,NPER,PMT,FV)PV(0.08,29,1000000,0)**

Τόσο οι χρηματοοικονομικές αριθμομηχανές, όσο και το Excel θα σας δώσουν την παρούσα αξία των 29 καταβολών (\$11.158.406 ή 11,16 εκατομμύρια), στις οποίες πρέπει να προσθέσετε την πρώτη καταβολή του \$1 εκατομμυρίου.

1^ο Παράδειγμα: Παρούσα αξία μιας ετήσια ράντας ως έπαθλο μιας λαχειοφόρου αγοράς

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Ο λόγος για τη διαφορά είναι η διαχρονική αξία του χρήματος. Αν διαθέτετε τα \$15 εκατομμύρια σήμερα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το \$1 εκατομμύριο άμεσα και να επενδύσετε τα υπόλοιπα \$14 εκατομμύρια με ένα επιτόκιο 8%. Αυτή η στρατηγική θα σας εξασφαλίσει $\$14 \text{ εκατομμύρια} \times 8\% = \$1,12 \text{ εκατομμύρια}$ ανά έτος στο διηνεκές. Εναλλακτικά, μπορείτε να ξοδέψετε \$15 εκατομμύρια --\$11,6 εκατομμύρια = \$3,84 εκατομμύρια σήμερα και να επενδύσετε τα υπόλοιπα \$11,16 εκατομμύρια, τα οποία και πάλι θα σας επιτρέψουν να αποσύρετε \$1 εκατομμύριο ανά έτος για τα επόμενα 29 χρόνια πριν να εξαντληθεί ο λογαριασμός σας.

2^ο Παράδειγμα: Παρούσα Αξία μιας Ετήσιας Ράντας που Ξεκινάει Τώρα

Πρόβλημα:

Οι γονείς σας , σας κάνουν μια προσφορά που δεν μπορείτε να αρνηθείτε. Σκοπεύουν να σας δώσουν μέρος της κληρονομιάς σας νωρίς.

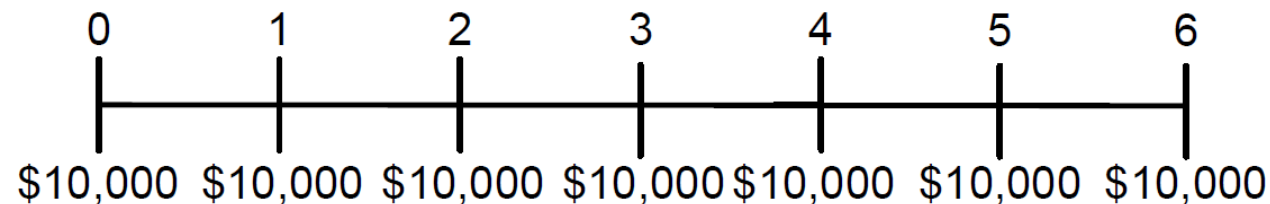
Σας έδωσαν μια επιλογή.

Θα σας πληρώνουν \$10.000 ετησίως για επτά χρόνια (αρχής γενομένης σήμερα) ή θα σας δώσουν μια BMW M5 Convertible του 2018, την οποία μπορείτε να πουλήσετε σήμερα για \$61.000 (εγγυημένα).

Εάν μπορείτε να κερδίσετε 7% ετησίως για τις επενδύσεις σας, ποια πρέπει να επιλέξετε;

Σχέδιο Λύσης:

Η Επιλογή (α) παρέχει \$10.000 διαχρονικά. Για να αξιολογήσουμε σωστά, πρέπει να την μετατρέψουμε στην παρούσα αξία. Το χρονοδιάγραμμα είναι το εξής:



2ο Παράδειγμα: Παρούσα Αξία μιας Ετήσιας Ράντας που Ξεκινάει Τώρα

Σχέδιο Λύσης:

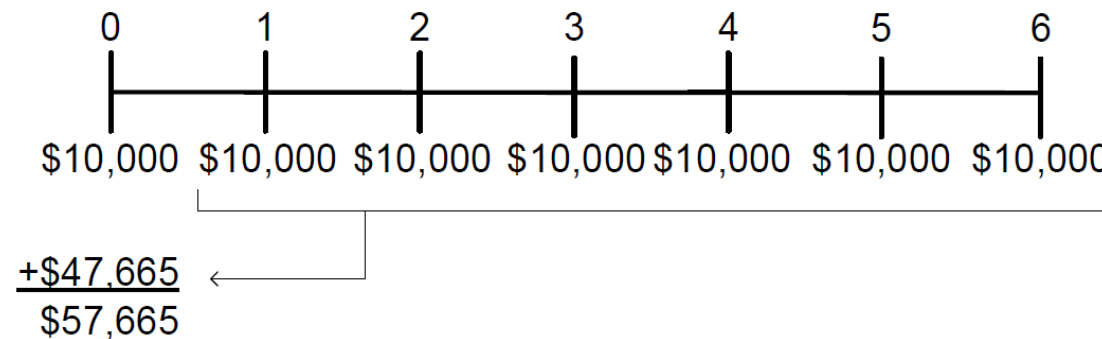
Οι \$10 000 στην ημερομηνία 0 παρουσιάζονται ήδη σε όρους παρούσας αξίας , αλλά πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των υπολοίπων πληρωμών.

Ευτυχώς , αυτή η υπόθεση μοιάζει με την 6 ετή ετήσια ράντα των \$10 000 ανά έτος , οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της ετήσιας ράντας:

$$PV(6ετής ετήσια ράντα) = \$10.000 \times \frac{1}{0,07} \left(1 - \frac{1}{1,07^6} \right)$$

$$PV(6ετής ετήσια ράντα) = \$47.665$$

Επομένως, η συνολική παρούσα αξία των ταμειακών ροών είναι \$10.000 + \$47.665. Σε μορφή χρονοδιαγράμματος:



2ο Παράδειγμα: Παρούσα Αξία μιας Ετήσιας Ράντας που Ξεκινάει Τώρα

Σχέδιο Λύσης:

Οι χρηματοοικονομικές αριθμομηχανές ή το Excel μπορούν να επεξεργαστούν τις ετήσιες ράντες με ευκολία απλώς εισάγουμε την ταμειακή ροή στην ετήσια ράντα ως PMT:

	N	I/Y	PV	PMT	FV
Given:	6	7		10,000	0
Solve for:			-47,665		

Τύπος Excel: =PV(RATE,NPER, PMT, FV) = PV(0.07,6,10000,0)

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Είστε τυχεροί !

Ακόμα και αν δεν θέλετε να την κρατήσετε, το γεγονός ότι μπορείτε να την πουλήσετε περισσότερο από την αξία της ετήσιας ράντας σημαίνει ότι θα είστε καλύτερα αν πάρετε την BMW.

Ετήσια Ράντα

Μελλοντική Αξία της Ετήσιας Ράντας:

$$FV(\text{ετήσια ράντα}) = PV \times (1 + r)^N = \frac{C}{r} \left(1 - \frac{1}{(1 + r)^N}\right) \times (1 + r)^N = C \times \frac{1}{r} ((1 + r)^N - 1)$$

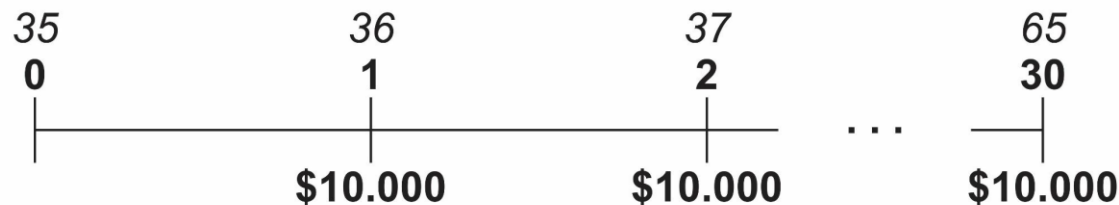
3^ο Παράδειγμα: Ετήσια ράντα συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου

Πρόβλημα:

Η Ellen είναι 35 χρονών και αποφάσισε ότι είναι ώρα να σχεδιάσει την συνταξιοδότησή της. Στο τέλος κάθε χρόνου μέχρι να γίνει 65 θα αποταμιεύει \$10.000 σε ένα συνταξιοδοτικό λογαριασμό. Αν ο λογαριασμός αποδίδει 10% ανά έτος, πόσα θα έχει η Ellen στο λογαριασμό της;

Σχέδιο Λύσης:

Όπως κάθε φορά ξεκινάμε με ένα χρονοδιάγραμμα. Σε αυτήν την περίπτωση είναι χρήσιμο να παρακολουθούμε τόσο τις ημερομηνίες, όσο και την ηλικία της Ellen.



Το αποταμιευτικό πλάνο της Ellen μοιάζει με μια ετήσια ράντα των \$10.000 ανά έτος για 30 χρόνια. (Βοήθεια: είναι εύκολο να μπερδευτούμε όταν εξετάζουμε μόνο την ηλικία. Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να σκεφτούμε ότι θα υπάρχουν μόνο 65 36=29 καταβολές. Αν παρακολουθούμε τόσο τις ημερομηνίες, όσο και την ηλικία της Ellen μας βοηθά να αποφύγουμε το πρόβλημα.)

3^ο Παράδειγμα: Ετήσια ράντα συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου

Λύση:

$$FV = \$10.000 \times \frac{1}{0,10} (1,10^{30} - 1) = \$10.000 \times 164,49 = \$1,645 \text{ εκατομμύρια στην ηλικία των 65}$$

Χρησιμοποιώντας μια χρηματοοικονομική αριθμομηχανή ή το Excel:

	N	I/Y	PV	PMT	FV
Given:	30	10	0	-10.000	
Solve for:					1.644.940
Excel Formula: =FV(RATE,NPER, PMT, PV)=FV(0,10,30,-10000,0)					

Τύπος Excel: FV(RATE,NPER, PMT, PV) = FV(0.10,30,-10000,0)

Αξιολόγηση Αποτελέσματος:

Επενδύοντας \$10.000 ανά έτος για 30 χρόνια (συνολικά, \$300.000) και κερδίζοντας τόκο σε αυτές τις επενδύσεις, ο ανατοκισμός θα επιτρέψει στην Ellen να συνταξιοδοτηθεί με \$1,645 εκατομμύρια.

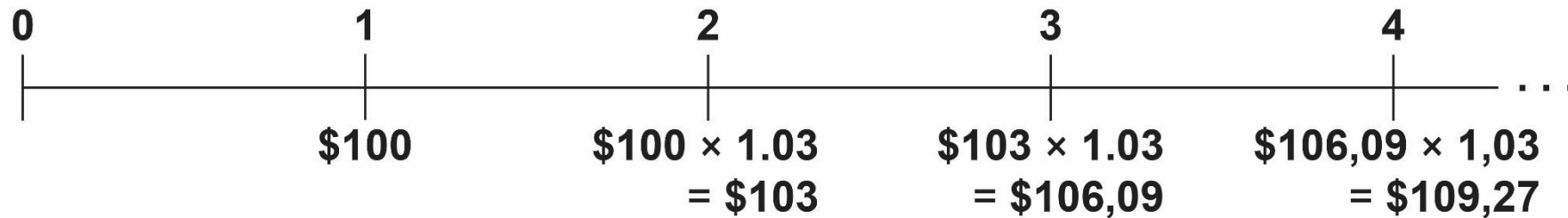
Ενότητα 4

Αύξηση ταμειακών ροών

Αύξηση ταμειακών ροών

Μια αυξανόμενη διηλεκτική ράντα είναι μια ακολουθία ταμειακών ροών που προκύπτει σε τακτά χρονικά διαστήματα και αναπτύσσεται με έναν σταθερό ρυθμό για πάντα.

Μια αυξανόμενη διηλεκτική ράντα, για παράδειγμα, με πρώτη καταβολή \$100 που αναπτύσσεται με έναν ρυθμό 3% έχει το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα.



Παρούσα αξία μιας αυξανόμενης διηλεκτικής ράντας

$$PV (\text{αυξανόμενη διηλεκτική ράντα}) = C/(r-g)$$

1^ο Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα

Πρόβλημα:

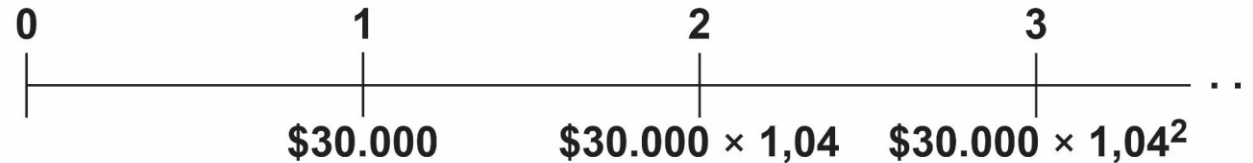
Σχεδιάζατε να δωρίσετε χρήματα στο πανεπιστήμιό σας για να χρηματοδοτήσετε ένα ετήσιο πάρτι αποφοίτησης με \$30.000. Δεδομένου ενός επιτοκίου 8% ανά έτος, το απαιτούμενο ποσό ήταν η παρούσα αξία των:

$$PV = \$30.000 / 0,08 = \$375.000 \text{ σήμερα}$$

Ωστόσο, πριν να αποδεχτεί η φοιτητική ένωση τα χρήματά σας σάς ζήτησε να αυξήσετε την δωρεά σας, ώστε να καλύψετε την επίπτωση του πληθωρισμού στο κόστος του πάρτι στο μέλλον. Παρά το γεγονός ότι \$30.000 είναι αρκετά για το πάρτι του επόμενου έτους, οι φοιτητές εκτιμούν ότι το κόστος του πάρτι θα αυξάνεται κατά 4% ανά έτος από εκεί και ύστερα. Για να ικανοποιήσετε το αίτημά τους, ποιο ποσό πρέπει να δωρίσετε τώρα;

1^ο Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα

Λύση:



Για να χρηματοδοτήσουμε το αυξανόμενο κόστος, πρέπει να παρέχουμε την παρούσα αξία των:

$$PV = \$30.000 / (0,08 - 0,04) = \$750.000 \text{ σήμερα}$$

Αξιολόγηση:

Πρέπει να διπλασιάσετε το ποσό που θα δωρίσετε

2° Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα

Πρόβλημα:

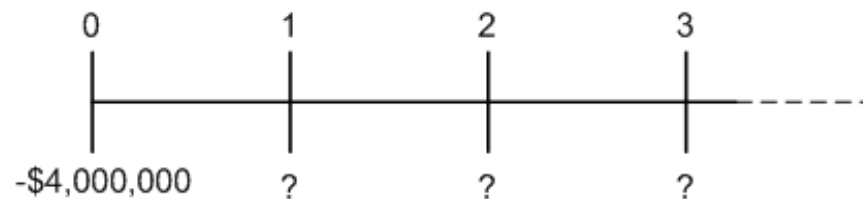
Στο Παράρτημα 4.3α, σχεδιάσατε να δώσετε \$4εκατομμύρια στο πανεπιστήμιό σας για να χρηματοδοτήσετε ένα Καθηγητή.

Δεδομένου ότι το επιτόκιο είναι 7% ετησίως, ο καθηγητής θα είναι σε θέση να εισπράξει \$200.000 ετησίως λόγω της γενναιοδωρίας σας.

Ο πληθωρισμός αναμένεται να είναι 2% ετησίως.

Πόσα χρήματα μπορούν να καταβληθούν στον καθηγητή κατά το πρώτο έτος, ώστε ο ετήσιος μισθός να μπορεί να αυξηθεί κατά 2% ετησίως και να διατηρηθεί ανέπαφο το κεφάλαιο;

Λύση:



Μπορεί να αποσύρει μόνο \$120.000 κατά το πρώτο έτος

$$CF = \$4.000.000 \times (0,07 - 0,02) = \$120.000$$

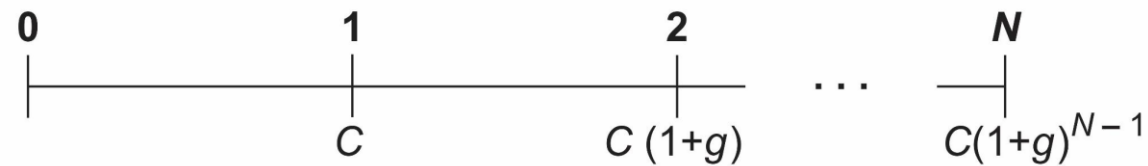
Το δεύτερο χρόνο, η πληρωμή της θα είναι $\$120.000 \times 1,02 = \122.400 και οι πληρωμές θα συνεχίσουν να αυξάνονται κάθε χρόνο

Χρηματοοικονομική Διοίκηση (επιλογής χειμερινό)

Αύξηση ταμειακών ροών

- Παρούσα αξία μιας αυξανόμενης διηνεκούς ράντας.
- Μια αυξανόμενη ετήσια ράντα είναι μια ακολουθία αυξανόμενων N ταμειακών ροών που καταβάλλονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
- Είναι μια αυξανόμενη διηνεκής ράντα που κάποια στιγμή ολοκληρώνεται.

Το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα δείχνει μια αυξανόμενη ετήσια ράντα με αρχική ταμειακή ροή C , η οποία αυξάνεται με ρυθμό g σε κάθε περίοδο μέχρι την περίοδο N



Παρούσα Αξία μιας Αυξανόμενης Ετήσιας Ράντας

$$PV = C \times \frac{1}{r - g} \left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^N \right)$$

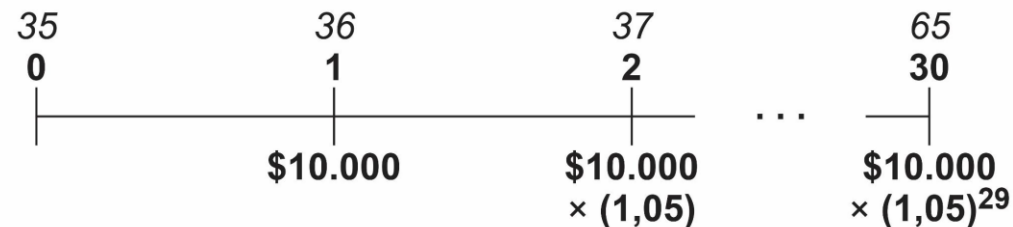
3^ο Παράδειγμα: Συνταξιοδοτική αποταμίευση με μια αυξανόμενη ετήσια ράντα

Πρόβλημα:

Η Ellen σκεφτόταν να αποταμιεύει \$10.000 ανά έτος για τη συνταξιοδότησή της. Παρά το γεγονός ότι τα \$10.000 είναι το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να αποταμιεύσει τον πρώτο χρόνο, αναμένει ότι ο μισθός της θα αυξάνεται κάθε χρόνο, κι έτσι θα μπορέσει να αυξήσει το ποσό κατά 5% ανά έτος. Με αυτό το πλάνο, αν κερδίζει 10% ανά έτος στην αποταμίευσή της, ποιο θα είναι το ποσό που θα έχει η Ellen στον λογαριασμό της στην ηλικία των 65;

Λύση:

Το νέο αποταμιευτικό σχέδιο αναπαρίσταται με το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα.



Η παρούσα αξία της αυξανόμενης ετήσιας ράντας της Ellen είναι:

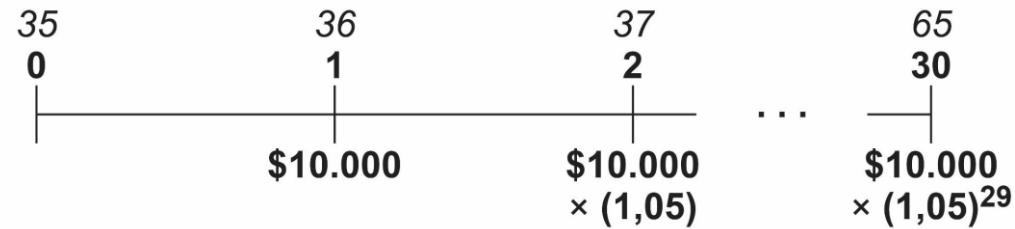
$$PV = \$10.000 \times 1 / (0,10 - 0,05) (1 - (1,05 / 1,10)^{30}) = \$10.000 \times 15,0463 = \$150.463$$

σήμερα

3^ο Παράδειγμα: Συνταξιοδοτική αποταμίευση με μια αυξανόμενη ετήσια ράντα

Λύση:

Το νέο αποταμιευτικό σχέδιο αναπαρίσταται με το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα.



Η παρούσα αξία της αυξανόμενης ετήσιας ράντας της Ellen είναι:

$$PV = \$10.000 \times 1 / (0,10 - 0,05) (1 - (1,05 / 1,10)^{30}) = \$10.000 \times 15,0463 = \$150.463$$

σήμερα

Το προτεινόμενο συνταξιοδοτικό πλάνο της Ellen ισοδυναμεί με \$150.463 στην τράπεζα σήμερα. Για να καθορίσουμε το ποσό που θα έχει στην ηλικία των 65, πρέπει να μετακινήσουμε αυτό το ποσό 30 χρόνια μετά:

$$FV = \$150.463 \times 1,10^3 = \$2,625$$

εκατομμύρια σε 30 χρόνια

Ενότητα 5

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

Όλα όσα έχουμε μάθει για τις ετήσιες ακολουθίες ταμειακών ροών μπορούν να εφαρμοστούν και στις μηνιαίες ακολουθίες ταμειακών ροών εφόσον:

1. Το επιτόκιο διατυπώνεται ως μηνιαίο επιτόκιο.
2. Ο αριθμός των περιόδων εκφράζεται σε μήνες.

Πρόβλημα:

Ετοιμάζετε να αγοράσετε ένα νέο αυτοκίνητο και διαθέτετε δύο επιλογές πληρωμής. Μπορείτε να πληρώσετε \$20.000 σε μετρητά άμεσα ή μπορείτε να λάβετε ένα δάνειο που απαιτεί καταβολή \$500 κάθε μήνα για τους επόμενους 48 μήνες (τέσσερα χρόνια). Αν το μηνιαίο επιτόκιο που κερδίζετε στα χρήματά σας είναι 0,5%, ποια επιλογή θα πρέπει να προτιμήσετε;

Λύση:

Ας ξεκινήσουμε με το χρονοδιάγραμμα των δανειακών καταβολών:



Μη ετήσιες ταμειακές ροές

Σύμφωνα με το χρονοδιάγραμμα, το δάνειο είναι μια ετήσια ράντα 48 περιόδων. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ετήσιας ράντας, η παρούσα αξία είναι:

$$PV(\text{ετήσια ράντα } \$500 \text{ 48 περιόδων}) = \$500 \times \frac{1}{0,005} \left(1 - \frac{1}{1,005^{48}} \right) = \$21.290$$

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

Πρόβλημα:

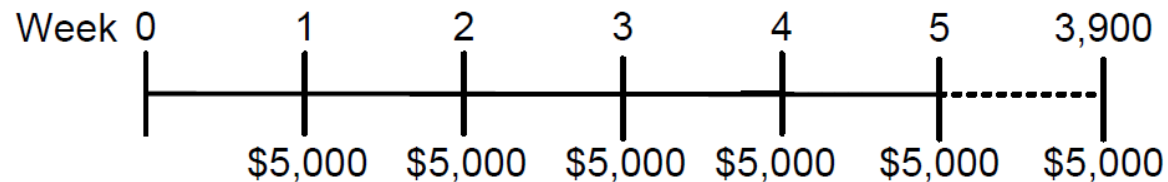
Μόλις κερδίσατε ένα βραβείο και έχετε δύο εναλλακτικές πληρωμές.

Μπορείτε να λαμβάνετε \$5 000 ανά εβδομάδα για τα επόμενα 75 χρόνια ή μπορείτε να λάβετε ένα εφ' άπαξ ποσό των \$5 000 000.

Εάν το εβδομαδιαίο επιτόκιο που μπορείτε να κερδίσετε είναι 0 096%, ποια είναι η επιλογή που θα κάνετε;

Λύση:

Το χρονοδιάγραμμα αυτού του προβλήματος είναι



Χρησιμοποιώντας τον τύπο της ετήσιας ράντας, η παρούσα αξία είναι

$$PV(3.900 - \text{περιοδική ετήσια ράντα } \$5.000) = \$5.000 \times \frac{1}{0,00096} \left(1 - \frac{1}{1,00096^{3,900}} \right) = \$5.084.886$$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

Ερωτήσεις - Συζήτηση

Δρ. Αγγελική Ζαχαράκη (agzachar@pme.duth.gr)

Μηχανικός Παραγωγής και Διοίκησης