

Γραμμικές και μη γραμμικές συναρτήσεις

- Γραμμικές συναρτήσεις
 - Προσφορά - ζήτηση
- Λύση συστήματος εξισώσεων
- Συναρτήσεις 2ου βαθμού
- Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού
- Εκθετικές – λογαριθμικές

Γραμμικές συναρτήσεις

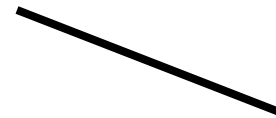
- Πρόκειται για συναρτήσεις πρώτου βαθμού της μορφής
 - $f(x)=ax+\beta$

Ευθεία με «κλίση» a

Αν $a>0$ αύξουσα («ανεβαίνει»)

Αν $a<0$ φθίνουσα («κατεβαίνει»)

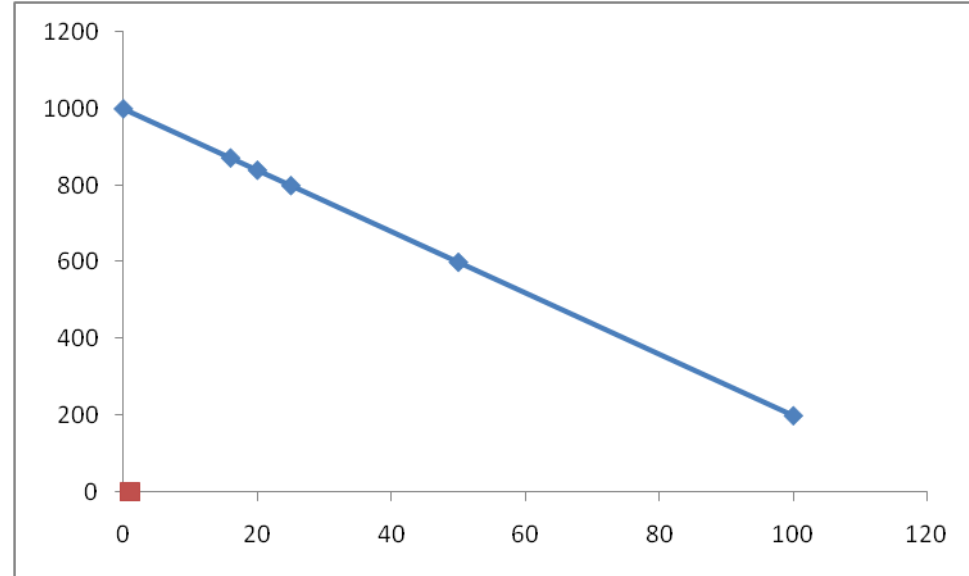
Αν $a=0$ σταθερή (οριζόντια)



Συνάρτηση ζήτησης

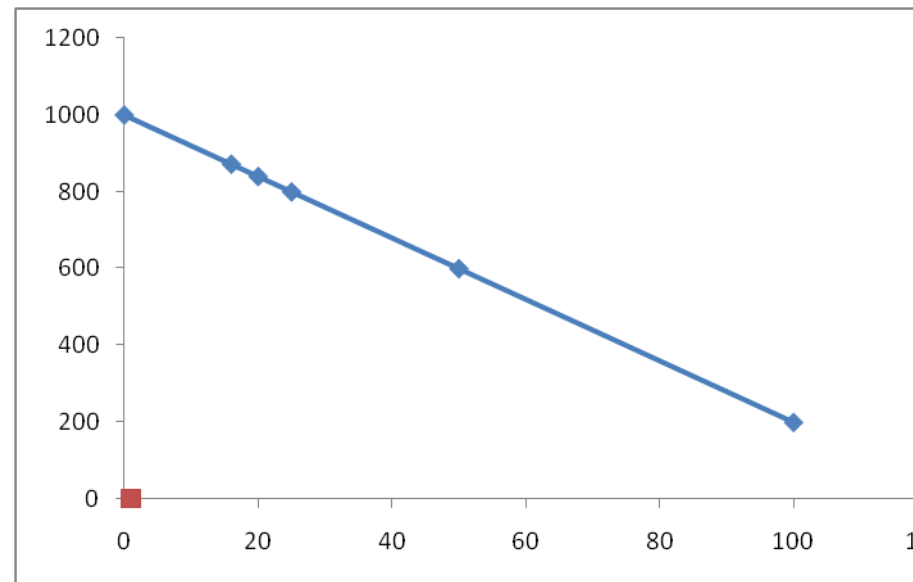
- Έχει αρνητική κλίση, φθίνουσα η ποσότητα ως προς την τιμή
- Συμβολίζεται $Q_d(P)=b-aP$
-

Πχ $Q_d(P)=1000-8P$



Συνάρτηση ζήτησης- πεδίο ορισμού

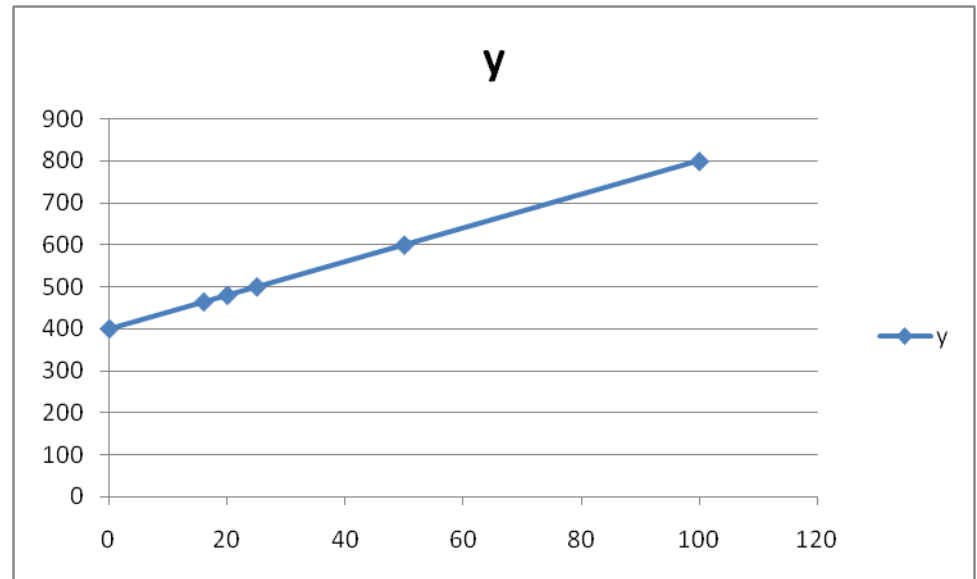
- Θετικές τιμές για την τιμή P και την ποσότητα Q_d
-
- Πχ $Q_d(P)=1000-8P$
- $Q_d(P) > 0 \Leftrightarrow 1000-8P > 0$
- $1000 > 8P \Leftrightarrow P < 125$
- Άρα
- Πεδίο ορισμού $[0,125]$



Συνάρτηση προσφοράς

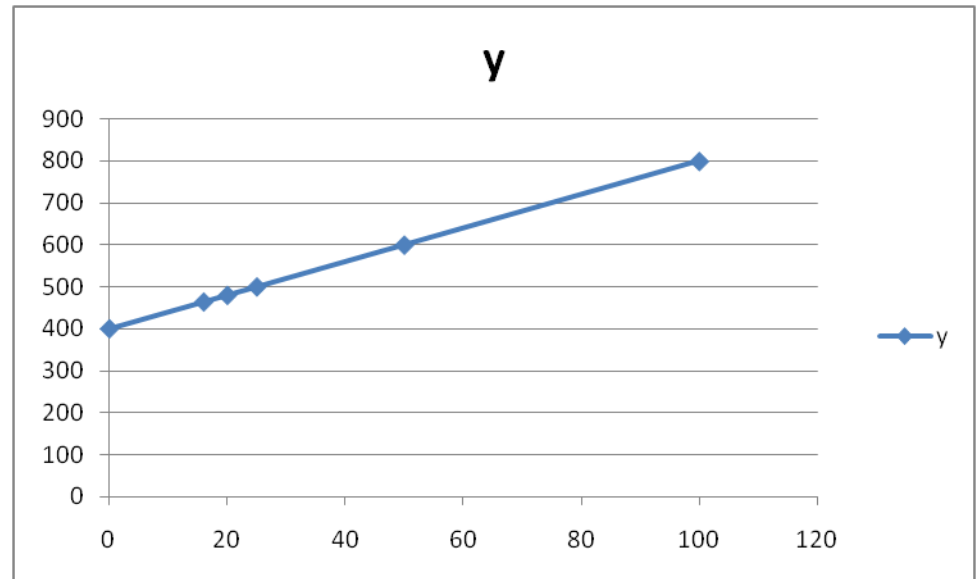
- Έχει θετική κλίση, αύξουσα η ποσότητα ως προς την τιμή
- Συμβολίζεται $Q_s(P)=d+cP$
-

Πχ $Q_s(P)=400+4P$



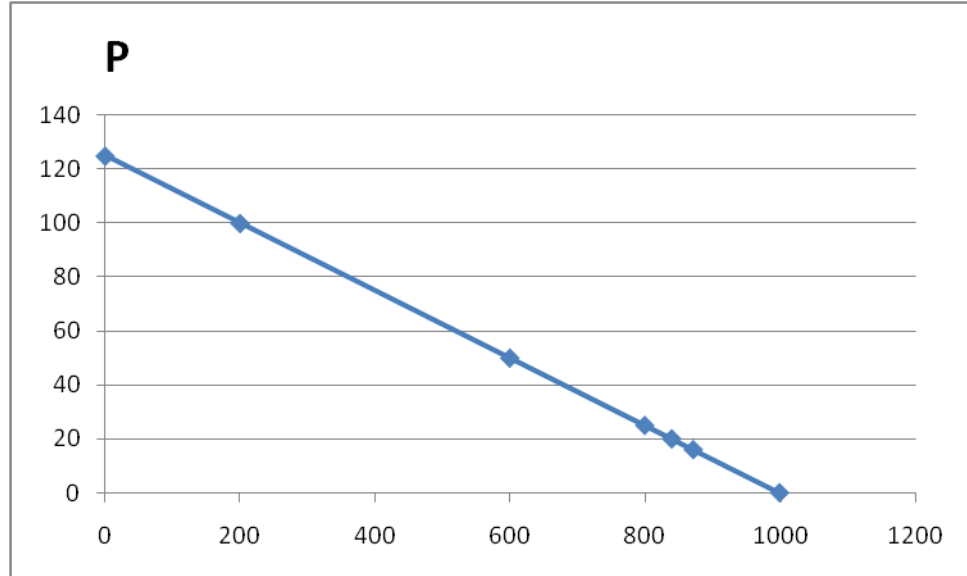
Συνάρτηση προσφοράς πεδίο ορισμού

- Έχει θετική κλίση, αύξουσα η ποσότητα ως προς την τιμή
-
- $Q_s(P)=400+4P$
- Η τιμή $P > 0$
- Τότε και $Q_s(P) > 0$



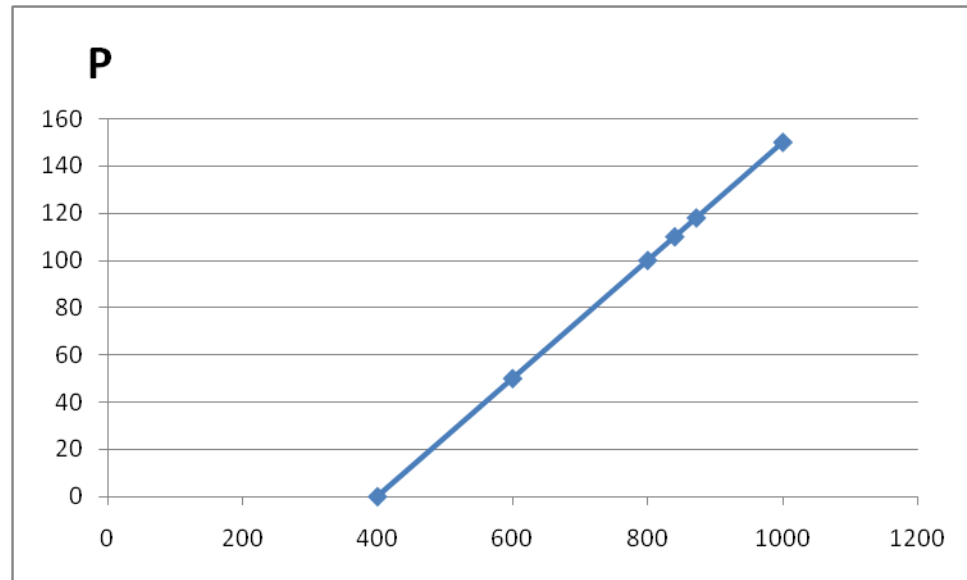
Συνάρτηση ζήτησης (με Q στον οριζόντιο άξονα)

- Οικονομολόγοι (απλούστερες συνήθειες)
- Η «εξίσωση» ζήτησης $Q_d = 1000 - 8P$ γράφεται και $P = (1000 - Q)/8 = 125 - 1/8Q$

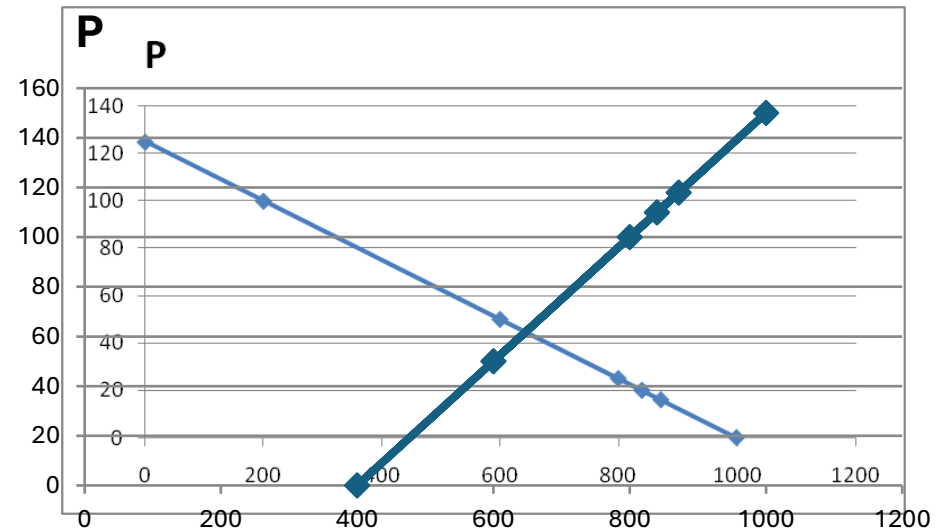


Συνάρτηση προσφοράς (με Q στον οριζόντιο άξονα)

- Οικονομολόγοι (απλούστερες συνήθειες)
- Η «εξίσωση» προσφοράς $Q=400+4P$
- γράφεται και $P=(Q-400)/4=1/4Q-100$



Ισορροπία αγοράς



Ισορροπία ζήτησης προσφοράς

- $Q_d = 1000 - 8P$
- $Q_s = 400 + 4P$
- $Q_d = Q_s \Leftrightarrow 1000 - 8P = 400 + 4P \Leftrightarrow$
 $600 = 12P \Leftrightarrow P = 600/12 = 50$
- τότε $Q_d = 1000 - 8 \cdot 50 = 600$ και
 $Q_s = 400 + 4P = 400 + 4 \cdot 50 = 600$

Εύρεση γραμμικής συνάρτησης

1. Αν ξέρουμε ένα σημείο με συντεταγμένες (κ, λ)

για $x=\kappa$, $y=\lambda$ και την κλίση της a

Τότε η ευθεία είναι

$$y - \lambda = a(x - \kappa) \Leftrightarrow y = ax - a\kappa + \lambda$$

2. Αν ξέρουμε δύο σημεία της με συντεταγμένες (κ, λ) και (μ, ν)

Τότε η ευθεία είναι

$$y - \lambda = \frac{\nu - \lambda}{\mu - \kappa} (x - \kappa)$$

παράδειγμα

Αν η ζήτηση είναι 80 μονάδες για την τιμή 5, ενώ για την τιμή 8 είναι 65 μονάδες, να προσδιορισθεί η εξίσωση της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης.

Αν η τιμή γίνει 9, πόση θα είναι η ζήτηση;

Λύση

Η εξίσωση της ευθείας αφού γνωρίζουμε δύο σημεία της (5,80) και (8,65) είναι

$$Q-80=(65-80)/(8-5) (P-5) \Leftrightarrow$$

$$Q = -15/3 (P-5) + 80 \Leftrightarrow Q = -5P + 25 + 80$$

$$Q = -5P + 105$$

Για $P=9$ θα είναι

$$Q = -5 \cdot 9 + 105 = 60 \text{ μονάδες}$$

παράδειγμα

Αν μια ασφαλιστική εταιρεία είχε το 2009, 25.000 ασφαλισμένους και η τάση της είναι γραμμική με ετήσιο ρυθμό αύξησης 2.800 ασφαλισμένους να προσδιορισθεί η εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την τάση αύξησης και κατόπιν ο αριθμός των ασφαλισμένων το 2014.

Λύση

Για ευκολία μας, θεωρούμε ως αρχή των ετών το 2008 (=0) και το 2009 αντιστοιχεί στο 1, ενώ το 2014 στο 6.

Η εξίσωση της ευθείας αφού γνωρίζουμε την κλίση (2.800) και ένα σημείο της (1,25.000) είναι

$$y - 25.000 = 2.800(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 2.800x - 2.800 + 25.000 \Leftrightarrow y = 2.800x + 22.200$$

Το 2014 είναι $x=6$ οπότε θα είναι

$$Y = 2.800 \cdot 6 + 22.200 = 39.000 \text{ ασφαλισμένοι}$$

Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

$$\text{Π.χ. } Y=5x-6$$

$$3y=2x-5$$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

$$Y=5x-6 \quad y-5x+6=0 \quad (*-3)$$

$$3y=2x-5 \Leftrightarrow 3y-2x+5=0$$

$$-3y+15x-18=0 \quad y-5x+6=0$$

$$3y-2x+5=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-3y+3y+15x-2x-18+5=0$$

$$13x-13=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{και} \quad y-5*1+6=0$$

- $X=1$

- $Y=-1$

Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

$$\left. \begin{array}{l} \text{Π.χ. } Y=5x-6 \\ 3y=2x-5 \end{array} \right\}$$

- Μέθοδος αντικατάστασης

$$Y=5x-6 \qquad y=5x-6$$

$$3(5x-6)=2x-5 \Leftrightarrow 13x=13$$

$$\left. \begin{array}{l} y=5x-6 \quad y=5 \cdot 1-6=-1 \\ X=1 \Leftrightarrow \quad x=1 \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

Συναρτήσεις 2ου βαθμού (τριώνυμο)

- Πρόκειται για συναρτήσεις δευτέρου βαθμού της μορφής

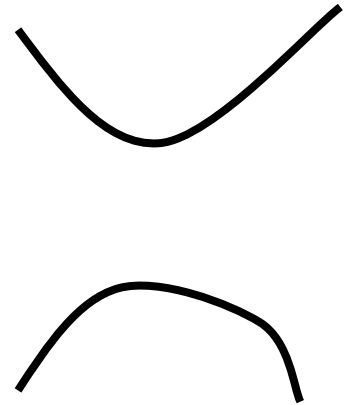
- $f(x)=ax^2+bx+c$

Παραβολή

Αν $a>0$ ελάχιστο («προς τα πάνω»)

Αν $a<0$ μέγιστο («προς τα κάτω»)

Αν $a=0$ ευθεία με κλίση b



Παραδείγματα οικονομικών συναρτήσεων 2^{ου} βαθμού

- Ζήτηση
- $P=2Q^2-10Q+40$
- Κόστος
- $C=0.3Q^2+3Q+400$

- Κέρδος = $-5Q^2+6Q-40$

Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού

- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta < 0$ δεν έχει λύσεις
- Αν $\Delta = 0$ μία λύση $X = -\beta/2\alpha$
- Αν $\Delta > 0$ δύο λύσεις

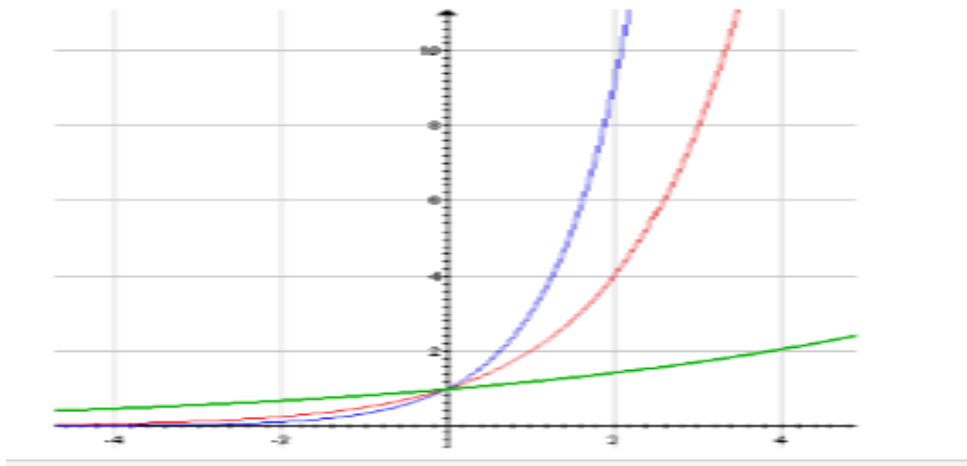
$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

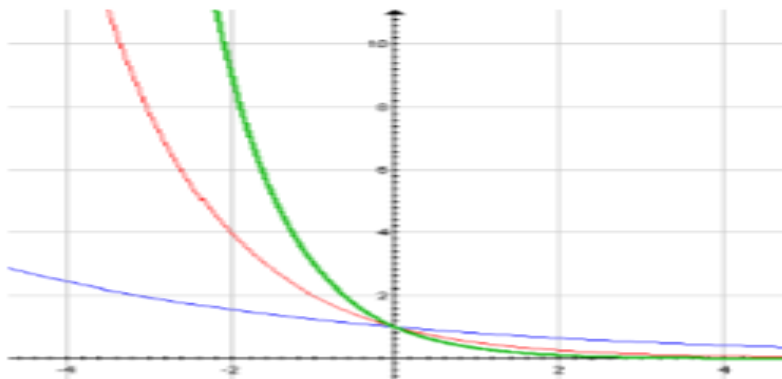
Εκθετικές συναρτήσεις

- Είναι οι συναρτήσεις στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται στον εκθέτη.
- Συνήθως εκφράζουν οικονομικά μεγέθη που οι τιμές τους μεταβάλλονται στον χρόνο, και αυξάνουν ή φθίνουν με ένα σταθερό ρυθμό στη μονάδα του χρόνου.
- Π.χ. $Y(t) = a b^t$ όπου, $a, b > 0$
- Μετατρέπεται σε $Y(t) = a e^{yt}$

Μορφή εκθετικής συνάρτησης $f(x)=a^x$



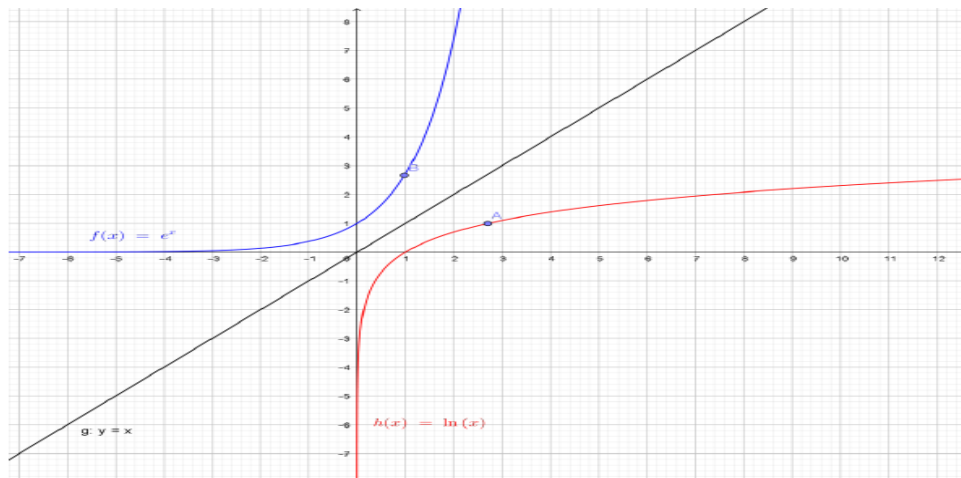
- $a > 1$



- $0 < a < 1$

λογαριθμικές συναρτήσεις

- Είναι οι συναρτήσεις οι αντίστροφες των εκθετικών συναρτήσεων.
- Παίρνουν διάφορες μορφές με πιο συνηθισμένη $y = \ln x$



Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (4,15) και έχει κλίση -4.
Βρείτε και την παράλληλη της ευθείας που περνάει από το σημείο (1,30).
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (2,25) και (8,40).
Αν η τιμή $x=15$ ποια θα είναι η τιμή y της ευθείας ;
3. Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων
 - α) $x^2-8x+9=0$
 - β) $6x^2-5x-6=0$
 - γ) $x^4-5x^2+4=0$
4. Αν ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι παραβολή βρείτε την εξίσωση που την περιγράφει, όταν δίνονται: για την τιμή $P=1$ η ζήτηση είναι $Q=20$, για τιμή $P=5$ η ζήτηση είναι $Q=10$ και όταν $P=0$ η ζήτηση είναι $Q=60$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
5. Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος είναι $Q_s=P^2+5P+1$ και η συνάρτηση ζήτησης $Q_d=9-2P^2$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού τους και η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας της αγοράς.

Ασκήσεις

6. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για δύο αλληλεξαρτώμενα προϊόντα δίνονται από τις εξισώσεις:

$$Q_{d1}=6-3P_1+P_2 \qquad Q_{s1}= -6+2P_1$$

$$Q_{d2}= 24+P_1-P_2 \qquad Q_{s2}= -4 +3P_2$$

Να βρεθούν οι τιμές και οι ποσότητες στην κατάσταση ισορροπίας.

7. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $Q_d=100-P$.

Αν η συνάρτηση κόστους παραγωγής του αγαθού είναι $TC=2Q^2+4Q+156$,

α) να προσδιορισθεί το σημείο παραγωγής Q_0 , στο οποίο η επιχείρηση δεν έχει ούτε ζημιές ούτε κέρδη (νεκρό σημείο)

β) Πόσα θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης αν η παραγωγή είναι 20 μονάδες;

8. Η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$Q=180-20P-P^2$$

Για ποια ή ποιες τιμές η ζητούμενη ποσότητα μηδενίζεται;

Να παρουσιασθεί γραφικά η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης.

Ασκήσεις

9. Να βρεθεί η εξίσωση περιορισμού του προϋπολογισμού για τις ποσότητες X και Y δύο αγαθών όταν η τιμή του X είναι 2, η τιμή του Y είναι 4 και ο μέγιστος διαθέσιμος προϋπολογισμός είναι 140 μονάδες

Να βρεθούν οι μέγιστες δυνατές ποσότητες κάθε αγαθού.

Τι θα συμβεί αν μειωθεί η τιμή του X από 2 σε 1,4;

Να βρεθούν οι μέγιστες δυνατές ποσότητες κάθε αγαθού όταν ο μέγιστος διαθέσιμος προϋπολογισμός γίνει 200 μονάδες αντί για 140.

10. Ο πληθυσμός σε ένα χωριό ήταν 553 άτομα το 2001

Ο πληθυσμός τα μελλοντικά έτη αναμένεται να αυξηθεί σύμφωνα με την εξίσωση:

$$Π = 553 e^{0.02t}$$

Να σχεδιαστεί ο προβλεπόμενος πληθυσμός από $t = 0$ (2001) έως $t = 30$ (2031). Σε ποιο έτος θα φτάσει ο πληθυσμός τα 2500 άτομα;