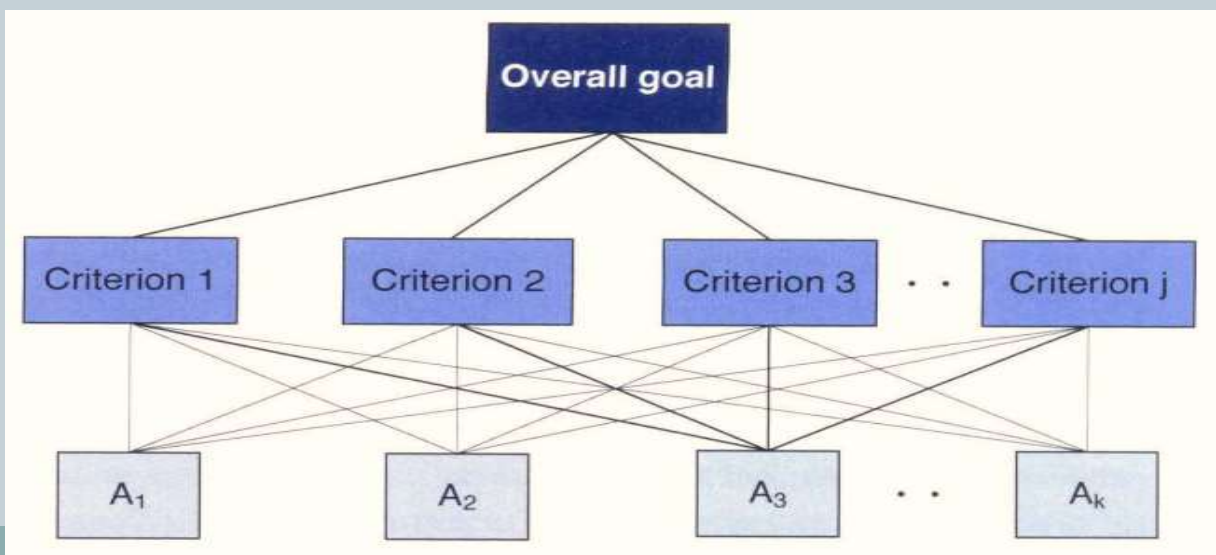




AHP

Μ.Σπηλιώτης
Επ. Καθ.



Πίνακας δεικτών σύγκρισης και πλήθος συγκρίσεων

Πίνακας 1

Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j	Δείκτης σύγκρισης
ίδια	1
μέτρια	3
πολύ	5
πάρα πολύ	7
εξαιρετικά περισσότερο	9

Επιτρέπεται η χρήση και ενδιάμεσων τιμών

Πίνακας 2

Πλήθος στοιχείων	1	2	3	4	5	6	7	n
Πλήθος συγκρίσεων	0	1	3	6	10	15	21	$\frac{n(n-1)}{2}$

Πίνακας συγκρίσεων

Πίνακας 3

	A	B	C
A	1	1/3	5
B		1	7
C			1

Για τη συμπλήρωση του πίνακα 3
χρησιμοποιούνται αντίστροφες τιμές σε
σχέση με τη διαγώνιο:

βλ. Πίνακα 4

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad \text{Σχέση 1}$$

Πίνακας 4

	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



Η έννοια της ιδιοτιμής λ ενός πίνακα $n \times n$

- Για έναν τετραγωνικό πίνακα A $n \times n$ υπάρχει ένα διάνυσμα x , που ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα, τέτοιο ώστε αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα A , το Ax που θα προκύψει είναι βαθμωτό μέγεθος πολλαπλάσιο του x , για κάποιο βαθμωτό λ δηλαδή ισχύει:


$$Ax = \lambda x$$

Το βαθμωτό μέγεθος λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A , $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{π.χ. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x \quad \text{οπότε } \lambda = 3$$

Εύρεση ιδιοτιμών λ σε ένα πίνακα $n \times n$

Ξαναγράφεται η εξίσωση $Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda Ix$ όπου $I = \text{o μοναδιαίος πίνακας}$



ή ισοδύναμα $(\lambda I - A)x = 0$

Ποιες όμως από όλες τις λύσεις που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα θεωρούνται ιδιοτιμές?

- Οι **μη τετριμμένες λύσεις** που λαμβάνονται αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω **χαρακτηριστική εξίσωση**:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{όπου } \det(\lambda I - A) = \text{η ορίζουσα του πίνακα } (\lambda I - A)$$

- Ανάπτυξη της $\det(\lambda I - A)$ οδηγεί στο **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (πολυώνυμο του λ):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Σε πίνακα $n \times n$ υπάρχουν
 n ιδιοτιμές λ



ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου λ^n ισούται με τη μονάδα ($a_n = 1$)

ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΗΡ



ΑHP και ο ρόλος της ιδιοτιμής $\lambda(\max)$ (1)



➤ ΑHP: Βασίζεται σε δυαδικές συγκρίσεις, όπου ο αποφασίζων εκφράζει τις προτιμήσεις του με προκαθορισμένη κλίμακα.

✓ Ο πίνακας των αρχικών διμερών συγκρίσεων αποτελεί μία προσέγγιση των λόγων των βαρών μεταξύ των κριτηρίων.

τα βάρη προ-υπάρχουν
στο χώρο του ιδεατού, τα
οποία αναζητάμε να τα
προσδιορίσουμε

! Για κάθε διμερή σύγκριση υποθέτω
(ιδεατή κατάσταση) $a_{ij} = w_i / w_j$

ΑΗΡ και ο ρόλος της ιδιότητας $\lambda(\max)$ (2)

Ισχύει: $Aw = \lambda w$



- Υπάρχουν n ιδιοτιμές λ που αν πολλαπλασιαστούν με το διάνυσμα των βαρών w θα ισούνται με το γινόμενο του πίνακα A των διμερών συγκρίσεων με το διάνυσμα των βαρών w .
- Από τη θεωρία των ιδιοτιμών (eigen value theory) ισχύει ότι μια μικρή διατάραξη γύρω από μια απλή ιδιοτιμή λ ενός συνεπούς πίνακα A $n \times n$, οδηγεί στη μορφή:

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

όπου ο A παραμένει αντίστροφος πίνακας όμως πλέον μπορεί να μην είναι συνεπής (Saaty, 1990)

$$Aw = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = nw.$$

Κατά Saaty (1990) $\Rightarrow \lambda_{\max} = n$ (για συνεπή πίνακα) και $\lambda_{\max} \geq n$ (για ασυνεπή πίνακα)

❖ Αυτό γιατί στην πράξη η απαίτηση $a_{ij} = w_i/w_j$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για όλα τα στοιχεία του πίνακα, θέλουμε όμως η $\lambda_{\max}$ να τείνει στο n .



Σε έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων $A_{n \times n}$, αποδεικνύεται **ότι στην ιδεατή περίπτωση**, δηλαδή στην περίπτωση που οι αρχικές διμερείς συγκρίσεις εκφράζουν απόλυτα τους λόγους μεταξύ των βαρών των κριτηρίων w_i/w_j ισχύει:

$$\lambda_{\max} = n$$

Στο χώρο του
ιδεατού η $\lambda_{\max} = n$

$$Aw = \lambda_{\max} w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \frac{w_1}{w_4} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} & \frac{w_2}{w_4} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} & \frac{w_3}{w_4} \\ \frac{w_4}{w_1} & \frac{w_4}{w_2} & \frac{w_4}{w_3} & \frac{w_4}{w_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Στην πράξη η $\lambda_{\max} > n$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4w_1 \\ 4w_2 \\ 4w_3 \\ 4w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{\max} = 4 = n$$

Αξιολόγηση της ΑΗΡ με το δείκτη συνέπειας CI και το λόγο συνέπειας CR

$CI = (\lambda_{max} - n) / (n - 1)$ όπου n = αριθμός κριτηρίων

$CR = CI / RI$

όπου RI = τυχαίος δείκτης συνέπειας :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Saaty, 1987

Βήματα προσδιορισμού των βαρών από έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων

1) Με πρόσθεση στηλών και γραμμών

- α)πρόσθεση όλων των κελιών κάθε στήλης των αρχικών διμερών συγκρίσεων
- β)δημιουργία νέου πίνακα όπου τα κελιά κάθε στήλης προκύπτουν από το λόγο $\alpha_{ij}/\Sigma\alpha_{ij}$
- γ)πρόσθεση όλων των κελιών κάθε γραμμής του νέου πίνακα. Τα αποτελέσματα είναι τα βάρη σε μη κανονικοποιημένη μορφή
- δ)κανονικοποίηση των βαρών

2)Με πολλαπλασιασμό γραμμών (Podvezko, 2009)

- α)πολλαπλασιασμός των κελιών κάθε γραμμής του πίνακα των διμερών συγκρίσεων
 - β)εύρεση της νιοστής ρίζας των γινομένων που προέκυψαν για κάθε γραμμή, όπου n =αριθμός κριτηρίων
 - γ)τα αποτελέσματα από το βήμα β αντιστοιχούν στις τιμές των μη κανονικοποιημένων βαρών, συνεπώς σε αυτό το βήμα κανονικοποιούνται τα βάρη
- Αυτή η μέθοδος 2 έχει υποστεί κριτικές*

$$A = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 \end{bmatrix}$$

«επαλύθευση μεθόδου για
αγγελικά - μαθηματικά
πλασμένα βάρη

$$(w_2 + w_1)/w_1 \quad (w_2 + w_1)/w_2$$

Αθροίζω στήλες

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1/w_1}{(w_2 + w_1)/w_1} & \frac{w_1/w_2}{(w_2 + w_1)/w_2} \\ \frac{w_2/w_1}{(w_2 + w_1)/w_1} & \frac{w_2/w_2}{(w_2 + w_1)/w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{(w_2 + w_1)} & \frac{w_1}{(w_2 + w_1)} \\ \frac{w_2}{(w_2 + w_1)} & \frac{w_2}{(w_2 + w_1)} \end{bmatrix}$$

δημιουργία νέου πίνακα
όπου τα κελιά κάθε
στήλης προκύπτουν από
το λόγο $a_{ij}/\sum a_{ij}$

$$\begin{bmatrix} \frac{2w_1}{(w_2 + w_1)} \\ \frac{2w_2}{(w_2 + w_1)} \end{bmatrix}$$

πρόσθεση όλων των κελιών κάθε
γραμμής του νέου πίνακα. Τα
αποτελέσματα είναι τα βάρη
σε μη κανονικοποιημένη
μορφή

$$2 \frac{(w_1 + w_2)}{(w_2 + w_1)} = 2$$

Άθροισμα στήλης για
κανονικοποίηση

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{(w_2 + w_1)} \\ \frac{w_2}{(w_2 + w_1)} \end{bmatrix}$$

Πίνακας δεικτών σύγκρισης και πλήθος συγκρίσεων

Πίνακας 1

Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j	Δείκτης σύγκρισης
ίδια	1
μέτρια	3
πολύ	5
πάρα πολύ	7
εξαιρετικά περισσότερο	9

Επιτρέπεται η χρήση και ενδιάμεσων τιμών

Πίνακας 2

Πλήθος στοιχείων	1	2	3	4	5	6	7	n
Πλήθος συγκρίσεων	0	1	3	6	10	15	21	$\frac{n(n-1)}{2}$

Πίνακας συγκρίσεων

Πίνακας 3

	A	B	C
A	1	1/3	5
B		1	7
C			1

Για τη συμπλήρωση του πίνακα 3
χρησιμοποιούνται αντίστροφες τιμές σε
σχέση με τη διαγώνιο:

βλ. Πίνακα 4

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad \text{Σχέση 1}$$

Πίνακας 4

	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1

Άνυσμα προτεραιότητας

Άθροισμα όλων των κελιών ανά στήλη στον πίνακα συγκρίσεων:

Πίνακας 5

	A	B	C
A	1	$\frac{1}{3}$	5
B	3	1	7
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1
SUM	$\frac{21}{5}$	$\frac{31}{21}$	13

Άνυσμα προτεραιότητας

Πίνακας 6

	A	B	C	Normalized principal Eigen vector
A	5/21	7/31	5/13	0.2828
B	15/21	21/31	7/13	0.6434
C	1/21	3/31	1/13	0.0738

Διαίρεση κάθε στοιχείου με το άθροισμα της στήλης του (weight normalization):

Σημαίνει ότι το B υπερτερεί του A κατά $0,6434/0,2828=2,27$ φορές.

Λόγω της κανονικοποίησης το άθροισμα των ιδιοδιανυσμάτων ισούται πάντα με την μονάδα.

Βήματα προσδιορισμού της λ_{max} , του CI και του CR

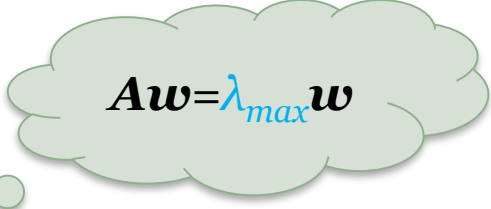
- έλεγχος το κατά πόσο ο πίνακας A των αρχικών διμερών συγκρίσεων είναι 'συνεπής' (consistent) με τα πραγματικά βάρη που διέπουν τα κριτήρια:

προσδιορισμός $\lambda_{max} \Rightarrow$ υπολογισμός $CI \Rightarrow$ υπολογισμός CR

- α)** Πολλαπλασιάζεται ο πίνακας των διμερών συγκρίσεων $n \times n$ με το διάνυσμα των βαρών $n \times 1$ που προσδιορίστηκε και προκύπτει έτσι ένα νέο διάνυσμα $n \times 1$.
- β)** Διαιρείται το νέο διάνυσμα με το διάνυσμα των βαρών και προκύπτει τελικό διάνυσμα $n \times 1$ όπου κάθε κελί αντιστοιχεί σε μία τιμή λ .
- γ)** Ως λ_{max} , λαμβάνεται η μέση τιμή των κελιών του τελικού διανύσματος.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \dots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \dots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$


$$Aw = \lambda_{max} w$$

Παίρνω τον μέσο όρο από το διάνυσμα $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

όπου $a_{ij} = w_i / w_j$

Θέματα για περαιτέρω έρευνα



- Χρήση ασαφών αριθμών στις διμερείς συγκρίσεις
- Εξαγωγή κλασσικών ή ασαφών βαρών
- Χρήση εύκαμπτου προγραμματισμού για την ερμηνεία των ασαφών διμερών συγκρίσεων.

Βιβλιογραφικές πηγές

20

- Saaty, T. L., How to make a decision: The analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, vol. 48, p.p. 9-26, 1990.
- Saaty, T. L., & Vargas, L. G., *Models, methods, concepts and applications of the hierarchy process (Kluwer aca.)*, USA, 2000.
- Triantaphyllou E. and Mann S.H., Using the analytic hierarchy process for decisionmaking in engineering applications: some challenges. *Journal of Industrial Engineering: Applications and practice*, Vol. 2, No. 1, pp 35-44, 1995.

Σας ευχαριστώ

21

**Analytic
Hierarchy
Process**

