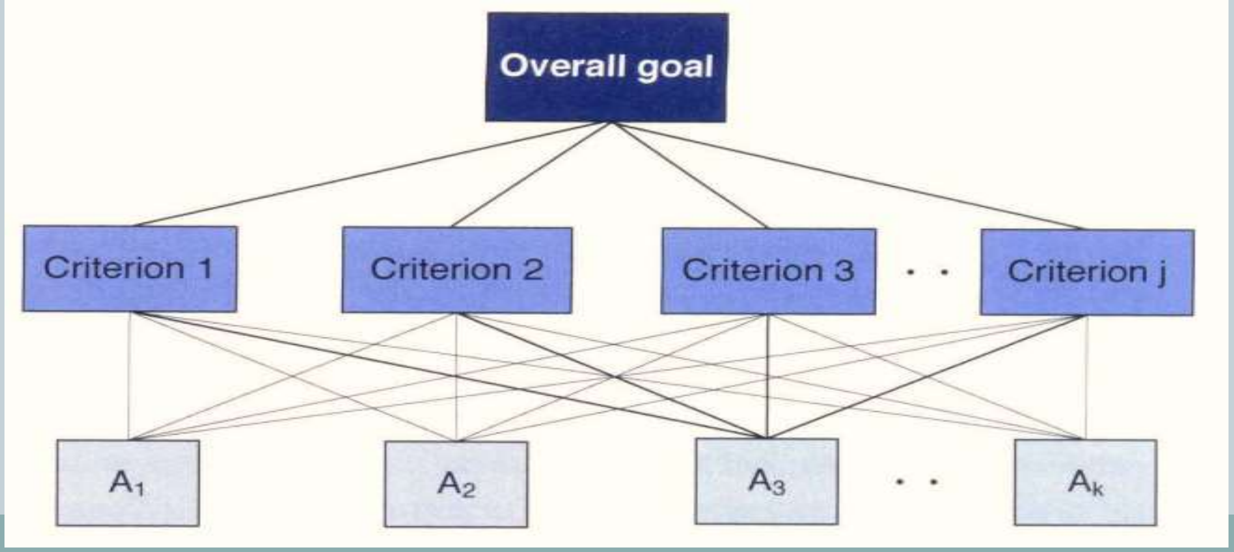
AHP

Μ.Σπηλιώτης
Επ. Καθ.



Πίνακας δεικτών σύγκρισης και πλήθος συγκρίσεων

Πίνακας 1

Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j	Δείκτης σύγκρισης
ίδια	1
μέτρια	3
πολύ	5
πάρα πολύ	7
εξαιρετικά περισσότερο	9

Επιτρέπεται η χρήση και ενδιάμεσων τιμών

Πίνακας 2

Πλήθος στοιχείων	1	2	3	4	5	6	7	n
Πλήθος συγκρίσεων	0	1	3	6	10	15	21	$\frac{n(n-1)}{2}$

Πίνακας συγκρίσεων

Πίνακας 3

	A	B	C
A	1	1/3	5
B		1	7
C			1

Για τη συμπλήρωση του πίνακα 3 χρησιμοποιούνται αντίστροφες τιμές σε σχέση με τη διαγώνιο:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

Σχέση 1

βλ. Πίνακα 4

Πίνακας 4

	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η έννοια της ιδιοτιμής λ ενός πίνακα nxn

- Για έναν τετραγωνικό πίνακα ***A*** nxn υπάρχει ένα διάνυσμα x, που ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα, τέτοιο ώστε αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα ***A***, το ***Ax*** που θα προκύψει είναι βαθμωτό μέγεθος πολλαπλάσιο του ***x*** , για κάποιο βαθμωτό *λ* δηλαδή ισχύει:

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda \boldsymbol{x}$$

Το βαθμωτό μέγεθος *λ* ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A, $\lambda \in \mathbb{R}$

π.χ. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=3\boldsymbol{x}$ οπότε $\lambda=3$

Εύρεση ιδιοτιμών λ σε ένα πίνακα *nxn*

Ξαναγράφεται η εξίσωση $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ => $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{Ix}$ όπου $\boldsymbol{I}$=ο μοναδιαίος πίνακας

ή ισοδύναμα $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

Ποιες όμως από όλες τις λύσεις που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα θεωρούνται ιδιοτιμές?

- Οι **μη τετριμμένες λύσεις** που λαμβάνονται αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω **χαρακτηριστική εξίσωση:**

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$$ όπου $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$=>η ορίζουσα του πίνακα $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$

- Ανάπτυξη της $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ οδηγεί στο **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (πολυώνυμο του λ):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

Σε πίνακα nxn υπάρχουν **n ιδιοτιμές λ**

! ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου λ^n ισούται με τη μονάδα (α_n=1)

ΚΛΑΣΙΚΗ AHP

AHP και ο ρόλος της ιδιοτιμής λ(max) (1)

- AHP: Βασίζεται σε δυαδικές συγκρίσεις, όπου ο αποφασίζων εκφράζει τις προτιμήσεις του με προκαθορισμένη κλίμακα.

✓ Ο πίνακας των αρχικών διμερών συγκρίσεων αποτελεί μία προσέγγιση των λόγων των βαρών μεταξύ των κριτηρίων.

τα βάρη προ-υπάρχουν στο χώρο του ιδεατού, τα οποία αναζητάμε να τα προσδιορίσουμε

Για κάθε διμερής σύγκριση υποθέτω (ιδεατή κατάσταση) $a_{ij}=w_i/w_j$

AHP και ο ρόλος της ιδιότιμης λ(max) (2)

Ισχύει: $\boldsymbol{Aw}=\lambda\boldsymbol{w}$

- Υπάρχουν n ιδιοτιμές λ που αν πολλαπλασιαστούν με το διάνυσμα των βαρών $\boldsymbol{w}$ θα ισούνται με το γινόμενο του πίνακα $\boldsymbol{A}$ των διμερών συγκρίσεων με το διάνυσμα των βαρών $\boldsymbol{w}$.
- Από τη θεωρία των ιδιοτιμών (eigen value theory) ισχύει ότι μια μικρή διατάραξη γύρω από μια απλή ιδιοτιμή λ ενός συνεπούς πίνακα $\boldsymbol{A}$ nxn, οδηγεί στη μορφή:

$$\boldsymbol{Aw}=\lambda_{max}\boldsymbol{w}$$

όπου ο $\boldsymbol{A}$ παραμένει αντίστροφος πίνακας όμως πλέον μπορεί να μην είναι συνεπής (Saaty,1990)

$$\mathbf{Aw} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n\mathbf{w}.$$

Κατά Saaty (1990) => $\lambda_{max}=n$ (για συνεπή πίνακα) και $\lambda_{max} \geq$ n (για ασυνεπή πίνακα)

❖ **Αυτό γιατί στην πράξη η απαίτηση $a_{ij}=w_i/w_j$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για όλα τα στοιχεία του πίνακα, θέλουμε όμως η λ_{max} να τείνει στο n.**

Σε έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων $\boldsymbol{A}$ nxn, αποδεικνύεται **ότι στην ιδεατή περίπτωση**, δηλαδή στην περίπτωση που οι αρχικές διμερείς συγκρίσεις εκφράζουν απόλυτα τους λόγους μεταξύ των βαρών των κριτηρίων w_i/w_j ισχύει:

$$\lambda_{max}=n$$

Στο χώρο του ιδεατού η $\lambda_{max}=n$

$$\boldsymbol{Aw} = \lambda_{\max}\boldsymbol{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \frac{w_1}{w_4} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} & \frac{w_2}{w_4} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} & \frac{w_3}{w_4} \\ \frac{w_4}{w_1} & \frac{w_4}{w_2} & \frac{w_4}{w_3} & \frac{w_4}{w_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Στην πράξη η $\lambda_{max}>n$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4w_1 \\ 4w_2 \\ 4w_3 \\ 4w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{\max} = 4 = \mathrm{n}$$

<u>Αξιολόγηση της AHP με το δείκτης συνέπειας CI και το λόγο συνέπειας CR</u>

$CI=(\lambda_{max}-n)/(n-1)$ όπου n=αριθμός κριτηρίων

$CR=CI/RI$

όπου RI=τυχαίος δείκτης συνέπειας :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Saaty, 1987

<u>Βήματα προσδιορισμού των βαρών από έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων</u>

1**) Με πρόσθεση στηλών και γραμμών**

α)πρόσθεση όλων των κελιών κάθε στήλης των αρχικών διμερών συγκρίσεων

β)δημιουργία νέου πίνακα όπου τα κελιά κάθε στήλης προκύπτουν από το λόγο $\alpha_{ij}/\Sigma\alpha_{ij}$

γ)πρόσθεση όλων των κελιών κάθε γραμμής του νέου πίνακα. Τα αποτελέσματα είναι τα βάρη σε μη κανονικοποιημένη μορφή

δ)κανονικοποίηση των βαρών

2)Με πολλαπλασιασμό γραμμών (Podvezko, 2009)

α)πολλαπλασιασμός των κελιών κάθε γραμμής του πίνακα των διμερών συγκρίσεων

β)εύρεση της νιοστής ρίζας των γινομένων που προέκυψαν για κάθε γραμμή, όπου n=αριθμός κριτηρίων

γ)τα αποτελέσματα από το βήμα β αντιστοιχούν στις τιμές των μη κανονικοποιημένων βαρών, συνεπώς σε αυτό το βήμα κανονικοποιούνται τα βάρη

Αυτή η μέθοδος 2 έχει υποστεί κριτικές

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 \end{bmatrix}$$

«επαλύθευση μεθόδου για αγγελικά - μαθηματικά πλασμένα βάρη

$$(w_2+w_1)/w_1 \qquad (w_2+w_1)/w_2$$

Αθροίζω στήλες

$$\begin{bmatrix} \dfrac{w_1/w_1}{(w_2+w_1)/w_1} & \dfrac{w_1/w_2}{(w_2+w_1)/w_2} \\ \dfrac{w_2/w_1}{(w_2+w_1)/w_1} & \dfrac{w_2/w_2}{(w_2+w_1)/w_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{w_1}{(w_2+w_1)} & \dfrac{w_1}{(w_2+w_1)} \\ \dfrac{w_2}{(w_2+w_1)} & \dfrac{w_2}{(w_2+w_1)} \end{bmatrix}$$

δημιουργία νέου πίνακα όπου τα κελιά κάθε στήλης προκύπτουν από το λόγο $\alpha_{ij}/\Sigma\alpha_{ij}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2w_1}{(w_2+w_1)} \\ \dfrac{2w_2}{(w_2+w_1)} \end{bmatrix}$$

πρόσθεση όλων των κελιών κάθε γραμμής του νέου πίνακα. Τα αποτελέσματα είναι τα βάρη σε μη κανονικοποιημένη μορφή

$$2\frac{(w_1+w_2)}{(w_2+w_1)}=2$$

Άθροισμα στήλης για κανονικοποίηση

$$\begin{bmatrix} \dfrac{w_1}{(w_2+w_1)} \\ \dfrac{w_2}{(w_2+w_1)} \end{bmatrix}$$

Πίνακας δεικτών σύγκρισης και πλήθος συγκρίσεων

Πίνακας 1

Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j	Δείκτης σύγκρισης
ίδια	1
μέτρια	3
πολύ	5
πάρα πολύ	7
εξαιρετικά περισσότερο	9

Επιτρέπεται η χρήση και ενδιάμεσων τιμών

Πίνακας 2

Πλήθος στοιχείων	1	2	3	4	5	6	7	n
Πλήθος συγκρίσεων	0	1	3	6	10	15	21	$\frac{n(n-1)}{2}$

Πίνακας συγκρίσεων

Πίνακας 3

	A	B	C
A	1	1/3	5
B		1	7
C			1

Για τη συμπλήρωση του πίνακα 3 χρησιμοποιούνται αντίστροφες τιμές σε σχέση με τη διαγώνιο:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

Σχέση 1

βλ. Πίνακα 4

Πίνακας 4

	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1

Άνυσμα προτεραιότητας

Άθροισμα όλων των κελιών ανά στήλη στον πίνακα συγκρίσεων:

Πίνακας 5

	A	B	C
A	1	1/3	5
B	3	1	7
C	1/5	1/7	1
SUM	21/5	31/21	13

Άνυσμα προτεραιότητας

Πίνακας 6

	A	B	C	Normalized principal Eigen vector
A	5/21	7/31	5/13	0.2828
B	15/21	21/31	7/13	0.6434
C	1/21	3/31	1/13	0.0738

Διαίρεση κάθε στοιχείου με το άθροισμα της στήλης του (weight normalization):

Σημαίνει ότι το B υπερτερεί του A κατά 0,6434/0,2828=2,27 φορές.

Λόγω της κανονικοποίησης το άθροισμα των ιδιοδιανυσμάτων ισούται πάντα με την μονάδα.

Βήματα προσδιορισμού της λ_{max}, του *CI* και του *CR*

- έλεγχος το κατά πόσο ο πίνακας ***A*** των αρχικών διμερών συγκρίσεων είναι 'συνεπής' (consistent) με τα πραγματικά βάρη που διέπουν τα κριτήρια:

προσδιορισμός λ_{max} => *υπολογισμός CI* => *υπολογισμός CR*

α) Πολλαπλασιάζεται ο πίνακας των διμερών συγκρίσεων *nxn* με το διάνυσμα των βαρών *nx1* που προσδιορίστηκε και προκύπτει έτσι ένα νέο διάνυσμα *nx1*.

β) Διαιρείται το νέο διάνυσμα με το διάνυσμα των βαρών και προκύπτει τελικό διάνυσμα *nx1* όπου κάθε κελί αντιστοιχεί σε μία τιμή λ.

γ) Ως λ_{max} , λαμβάνεται η μέση τιμή των κελιών του τελικού διανύσματος.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \ldots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \cdots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} =>$$

$$\boldsymbol{Aw} = \lambda_{max}\boldsymbol{w}$$

$$=> \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \ldots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \cdots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Παίρνω τον μέσο όρο από το διάνυσμα $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

όπου $a_{ij}=w_i/w_j$

Θέματα για περαιτέρω έρευνα

- Χρήση ασαφών αριθμών στις διμερείς συγκρίσεις
- Εξαγωγή κλασσικών ή ασαφών βαρών
- Χρήση εύκαμπτου προγραμματισμού για την ερμηνεία των ασαφών διμερών συγκρίσεων.

Βιβλιογραφικές πηγές

- Saaty, T. L., How to make a decision: The analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, vol. 48, p.p. 9-26, 1990.
- Saaty, T. L., & Vargas, L. G., *Models, methods, concepts and applications of the hierarchy process (Kluwer aca.),* USA, 2000.
- Triantaphyllou E. and Mann S.H., Using the analytic hierarchy process for decisionmaking in engineering applications: some challenges. *Journal of Industrial Engineering: Applications and practice*, Vol. 2, No. 1, pp 35-44, 1995.

Σας ευχαριστώ