



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης ΠΜΣ Διαχείριση Υδρομετεωρολογικών Καταστροφών

Στατιστική ανάλυση ακραίων υδροκλιματικών διεργασιών Υδρομετεωρολογία – Υδρολογία και Κλιματική Αλλαγή

Τσουκαλάς Γιάννης - Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ

Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΔΠΘ

e-mail: itsoukal@civil.duth.gr

Στατιστική, αλλά... με τα ακραία - πως;

Θεωρία ακραίων τιμών - Extreme Value Theory (EVT)

Γιατί?

- Οι συνήθεις κατανομές (π.χ., Gamma, Gauss) δεν επαρκούν για τη περιγραφή των ακραίων.
- Ενδείκνυνται διαφορετικές κατανομές για την (ακριβέστερη) περιγραφή των ακραίων τιμών μιας διεργασίας.
- Η θεωρία ακραίων τιμών αφορά κατά κανόνα τη μοντελοποίηση γεγονότων χαμηλής πιθανότητας και μεγάλου αντίκτυπου.

Γιατί στατιστική ανάλυση ακραίων τιμών;

Ακραία γεγονότα

- Πιθανοτική αντιμετώπιση - άμεσα συνδεδεμένα με στατιστικές έννοιες (π.χ., τυχαία μεταβλητή, ουρά κατανομής)
- Γεγονότα χαμηλής πιθανότητας εμφάνισης και μεγάλης αβεβαιότητας (αλλά συνήθως με μεγάλο αντίκτυπο).

Συνήθεις εφαρμογές

- Επάρκεια/προσαρμογή έναντι φυσικών, ή μη, κινδύνων (π.χ., πλημμύρες, ξηρασία, κλιματική αλλαγή, χρεωκοπία).
- Σχεδιασμός και διαχείριση έργων υποδομής.
- Χρηματοοικονομική αξιολόγηση ρίσκου για έργα και επενδύσεις.
- ... και άλλοι πολλοί ακόμα λόγοι.

1. *Man can believe the impossible, but man can never believe the improbable* ~ Oscar Wilde (Intentions, 1891)

2. *Il est impossible que l'improbable n'arrive jamais* ~ Emil J. Gumbel (1891-1966)

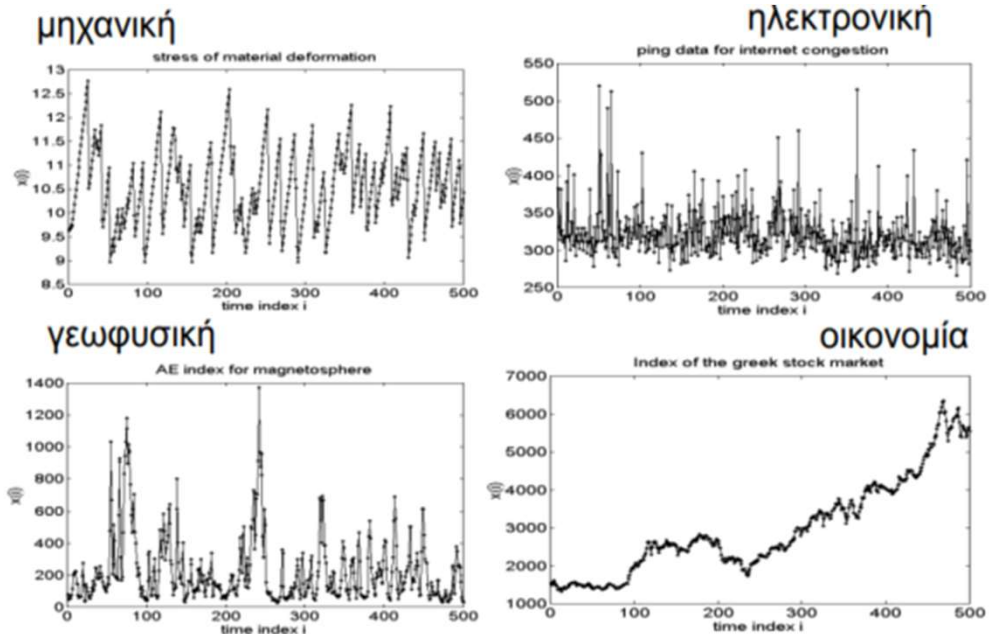
EN: *It is impossible that the improbable never happens*

Υπενθύμιση βασικών εννοιών στατιστικής

Τυχαίες μεταβλητές – και άλλα παραδείγματα

Τυχαίες μεταβλητές

- Υδροκλιματικές διεργασίες
 - βροχόπτωση,
 - απορροή,
 - Θερμοκρασία,
 - Χρόνος μεταξύ συμβάντων πλημμύρων,
 - Εξάτμιση,
 - Στάθμη υπόγειων υδάτων
- Οικονομία
 - Οικονομικοί δείκτες
 - Μετοχές
- Μηχανική
 - Συχνότητα και μέγεθος σεισμών
 - Καταπόνηση και παραμόρφωση υλικών



Κουγιουμτζής Δ., Χρονοσειρές, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, Α.Π.Θ.

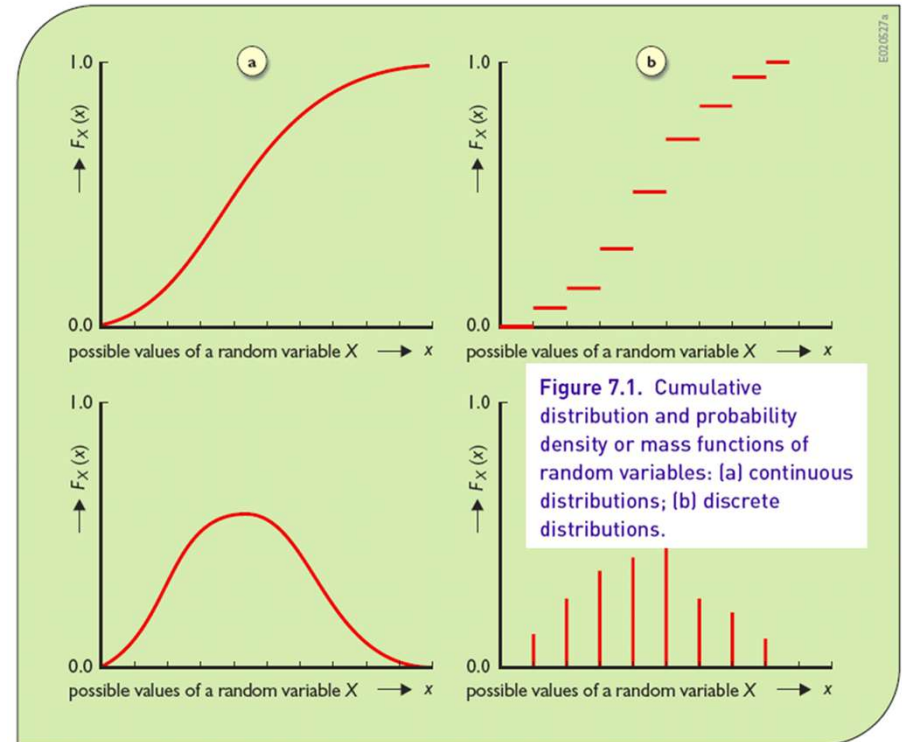
Συνεχείς και διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Διακριτές τ.μ.: Όταν το σύνολο από το οποίο μπορεί να πάρει τιμές η τ.μ. μπορεί να θεωρηθεί πεπερασμένο (ή μετρήσιμα άπειρο).

- αριθμός βροχερών ημερών σε ένα μήνα (0,1,2....30)
- Χρόνος (πλήθος ετών) μεταξύ δύο πλημμυρικών επεισοδίων (1,2....)

Συνεχείς τ.μ.: Όταν το σύνολο από το οποίο μπορεί να πάρει τιμές η τ.μ. μπορεί να θεωρηθεί άπειρο (η τ.μ. μπορεί να πάρει τιμές σε συνεχή κλίμακα)

- βροχόπτωση
- Απορροή
- βροχόπτωση «άνω κατωφλίου»
- Θερμοκρασία



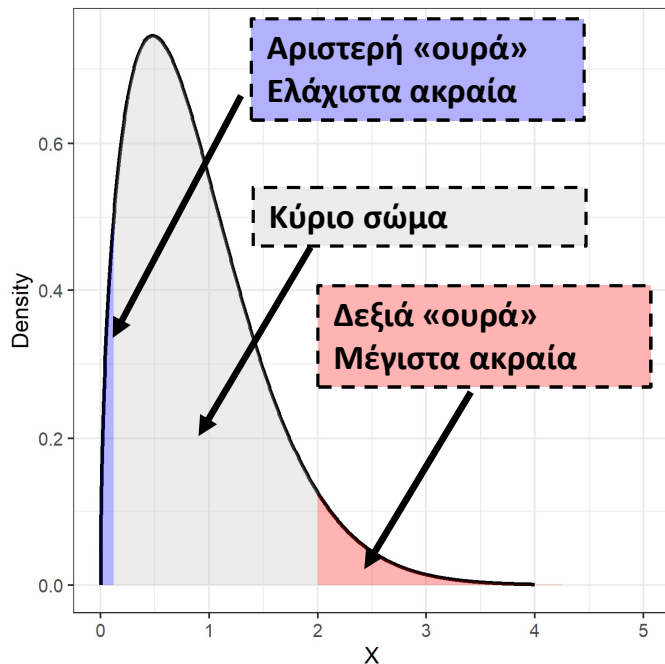
Loucks, D. P., E. van Beek, J. R. Stedinger, J. P. M. Dijkman and M. T. Villars, (2005), Water Resources Systems Planning and Management: An Introduction to Methods, Models and Applications, UNESCO, Paris, 676 p, <http://hdl.handle.net/1813/2804>

Τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) - Συνάρτηση κατανομής

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = dF_X(x)/dx$$

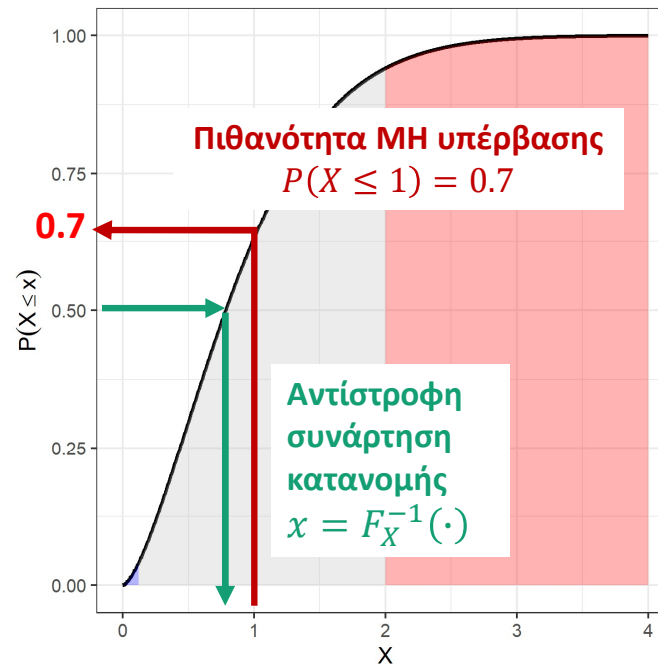
(Probability Density function – PDF)



(Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

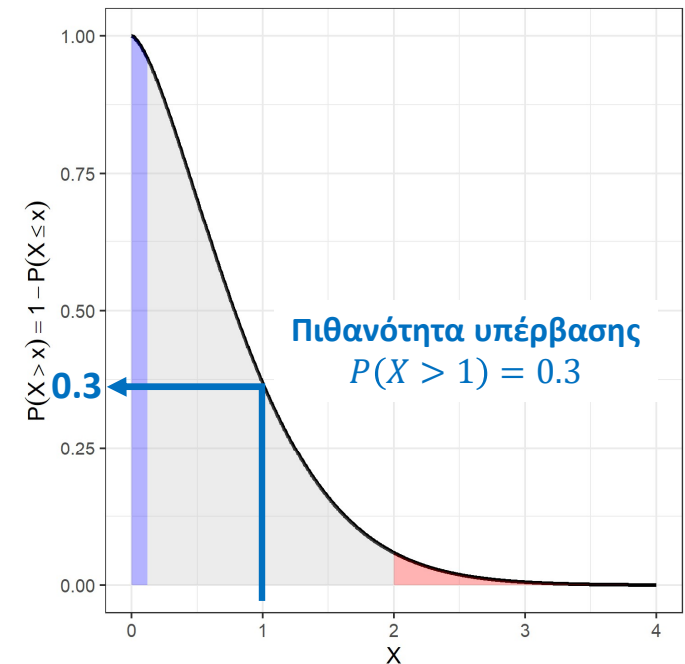
(Cumulative Distribution function - CDF)



Συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

(Survival function - SF)



Μια τυχαία μεταβλητή X περιγράφεται πλήρως από την **συνάρτηση κατανομής** – από την οποία και **προκύπτουν** όλες οι **ιδιότητες** και **χαρακτηριστικά** της **μεγέθ**η (π.χ., ακραία, ροπές τύπου δύναμης).

Συνάρτηση επιβίωσης = συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής = πιθανότητα υπέρβασης

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) \rightarrow \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

Το ποσοστημόριο x_u (ή αλλιώς αντίστροφη συνάρτηση κατανομής)

Inverse cumulative distribution function (ICDF) ή Quantile Function (QF)

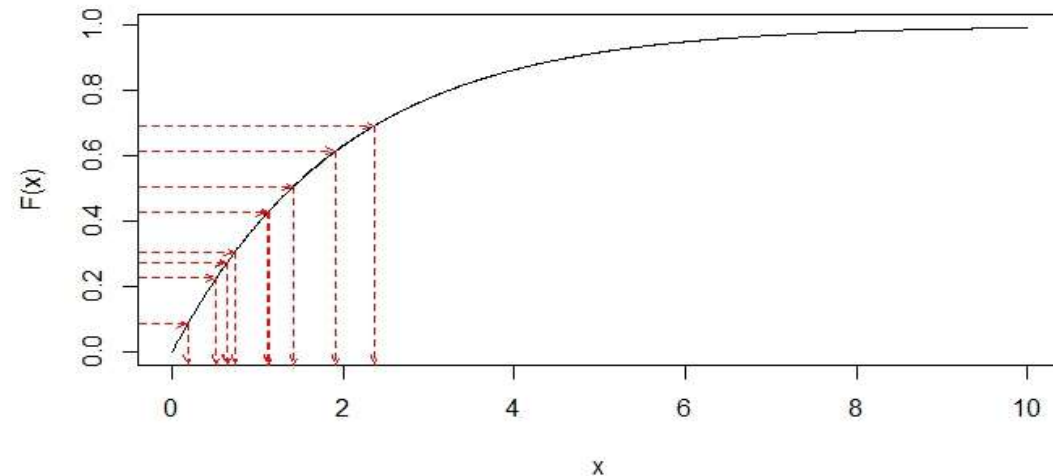
❑ Οποιοδήποτε σημείο x_u τέτοιο ώστε:

$$0 \leq u \leq 1$$

λέγεται u -ποσοστημόριο ή ποσοστιαίο σημείο της τ.μ. $\underline{x}$ ή της κατανομής της.

❑ Όταν η τ.μ. $\underline{x}$ είναι συνεχής, το u -ποσοστημόριο είναι κάθε σημείο x_u που ικανοποιεί την εξίσωση $F_{\underline{x}}(x_u) = u \rightarrow x_u = F_{\underline{x}}^{-1}(u)$.

❑ Το u -ποσοστημόριο για $u = 0.50$ λέγεται διάμεσος, ενώ για $u = 0.25$ και $u = 0.75$ τα σημεία λέγονται πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.



Παράδειγμα:

Η ICDF (QF) της κατανομής Weibull δίνεται από την σχέση:

$$x_u = F_{\underline{x}}^{-1}(u) = Q_{\underline{x}}(u) = b(-\ln(1-u))^{\frac{1}{a}}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Ιστογράμματα συχνοτήτων

- Κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση $\hat{f}_X(x) = \frac{n_i}{n\Delta}$, $c_i \leq x \leq c_{i+1}$ για $i = 1, \dots, k$ όπου k το πλήθος διαστημάτων, μεγέθους Δ , στα οποία έχει χωριστεί το δείγμα.



Εμπειρική συνάρτηση κατανομής

- ❑ Κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

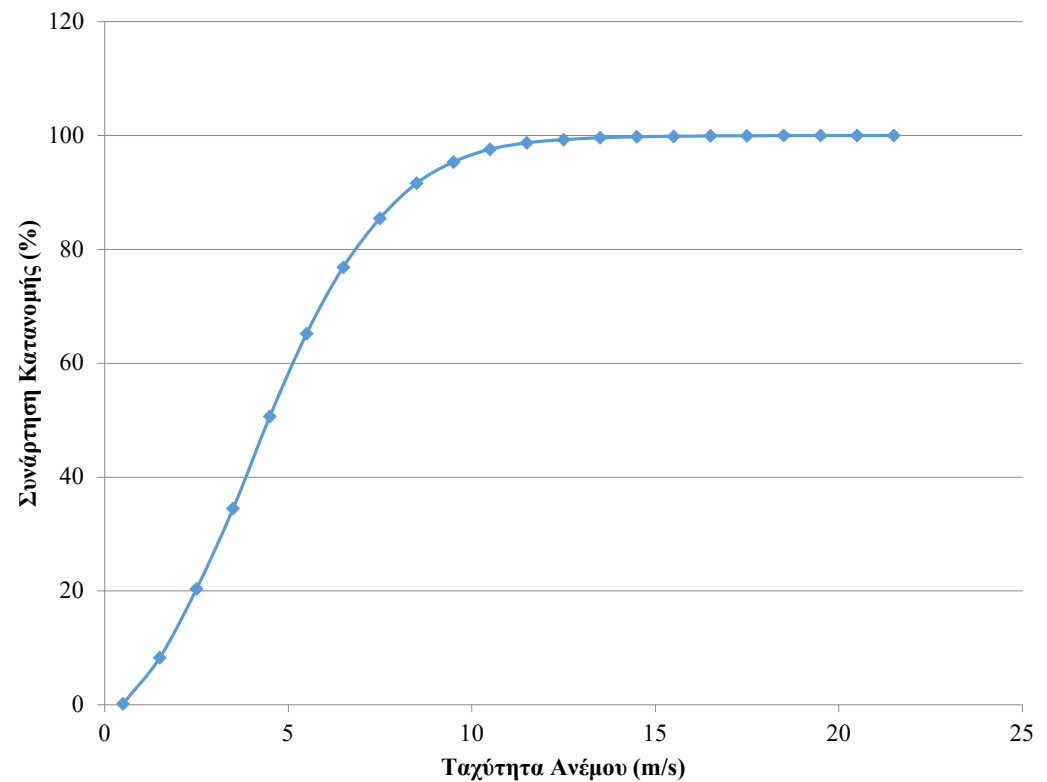
$$\hat{F}_X(x) = \frac{n_x}{n}$$

όπου n_x το πλήθος των σημείων του δείγματος που είναι μικρότερα ή ίσα με την τιμή x , και n το συνολικό πλήθος του δείγματος.

- ❑ Για την αμερόληπτη εκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης χρησιμοποιείται συχνά η κατάταξη τύπου Weibull (plotting position):

$$\hat{F}_X(x) = \frac{n_x}{n + 1}$$

Εμπειρική κατανομή ωριαίων ταχυτήτων ανέμου

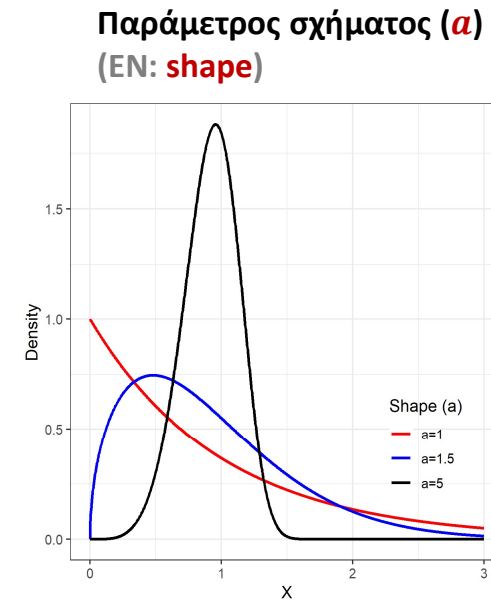
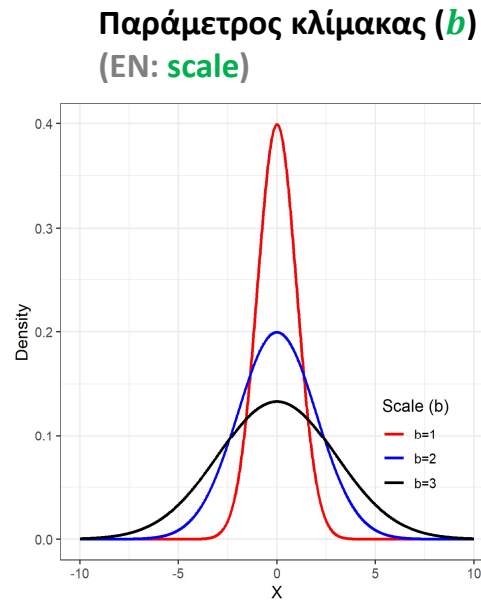
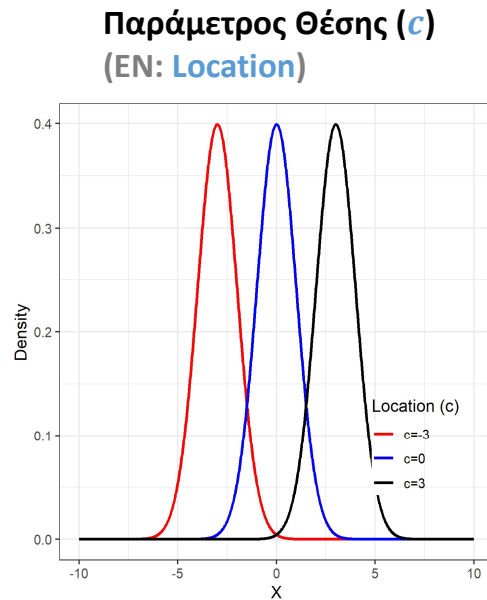


Συνάρτηση κατανομής – Βασικές παράμετροι

Κύριοι τύποι παραμέτρων:

Παράδειγμα: CDF Weibull (3 παραμέτρων)

$$F(x; a, b, c) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x - c}{b}\right)^a\right)$$

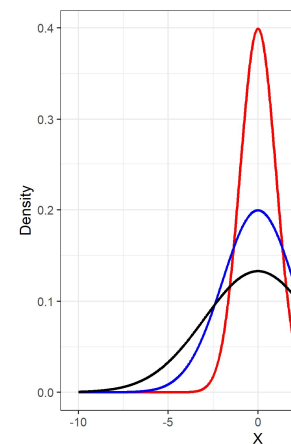


Σημείωση: 1) Η παράμετρος σχήματος (a) είναι εκείνη που καθορίζει τη συμπεριφορά της κατανομής στα άκρα (extremes – δεξιά ή αριστερή ουρά). 2) Υπάρχουν κατανομές με περισσότερες από μία παραμέτρους σχήματος (π.χ., Burr type XII, Generalized Gamma, κ.α.).

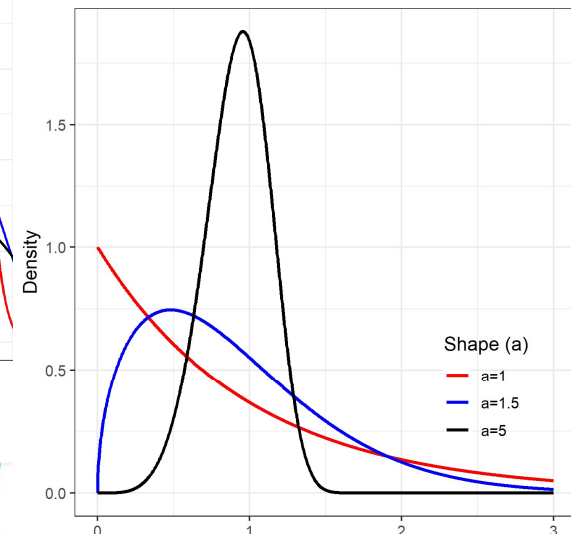
«Κλασσικές» συναρτήσεις κατανομών

- Ομοιόμορφη (Uniform)
- Κανονική/Γκαουσιανή (Normal/Gaussian)
- Exponential
- Gamma
- Weibull
- Log-Normal
- Logistic
- Beta (φραγμένη στο (0,1))
- Kumaraswamy (φραγμένη στο (0,1))
- Bernoulli (διακριτή)
- Poisson (διακριτή)
- Binomial (διακριτή)

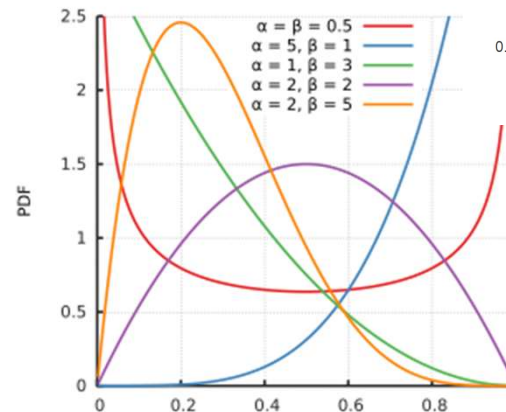
Gaussian



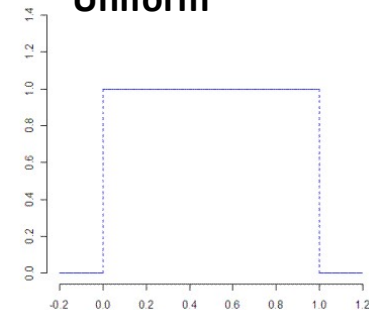
Weibull



Beta



Uniform^X



Ροπές (τύπου δύναμης) συνεχούς κατανομής – Θεωρητικά μεγέθη

Έστω τ.μ. $\underline{x}$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) $f_{\underline{x}}$ τότε, ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη:

Ροπή περί την αρχή τάξης r ($= 1, 2, \dots$)

$$\mu'_{\underline{x}}(r) := E[\underline{x}^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}^r f_{\underline{x}}(x) dx = \int_0^1 \left(F_{\underline{x}}^{-1}(u)\right)^r du$$

Σημείωση: $\mu'_{\underline{x}}(0) = 1$ και $\mu'_{\underline{x}}(1) = E[\underline{x}] = \int x f_{\underline{x}}(x) dx$, το οποίο είναι και μέση τιμή της τ.μ. $\underline{x}$, και συμβολίζεται με $\mu_{\underline{x}}$. Επίσης, $\mu_{\underline{x}}(0) = 1$ και $\mu_{\underline{x}}(1) = 0$.

Κεντρική ροπή τάξης r ($= 1, 2, \dots$)

$$\mu_{\underline{x}}(r) := E[(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^r f_{\underline{x}}(x) dx$$

Συνήθως, αναφερόμαστε σε αυτές όταν μιλάμε για ροπές κατανομής

Χρήσιμες μετατροπές

$$\mu_X(r) = E[(X - \mu_X)^r] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mu'_X(j) \mu_X^{r-j}$$

$$\mu'_X(r) = E[(X)^r] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \mu_X(j) \mu_X^{r-j}$$

Όπου, $\binom{r}{j}$ ο διωνυμικός συντελεστής (binomial coefficient)

Ροπές (τύπου δύναμης) συνεχούς κατανομής – Θεωρητικά μεγέθη

Ειδικές περιπτώσεις

- Μέση τιμή:

$$\mu_{\underline{x}} = \mu'_{\underline{x}}(1)$$

- Διασπορά ($r = 2$):

$$\text{Var}[\underline{x}] = \sigma_{\underline{x}}^2 = \mu_{\underline{x}}(2) = E[(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^2]$$

- Τρίτη κεντρική ροπή:

$$\mu_{\underline{x}}(3) = E[(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^3]$$

- Τέταρτη κεντρική ροπή:

$$\mu_{\underline{x}}(4) = E[(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^4]$$

Αδιάστατοι συντελεστές

- Συντελεστής μεταβλητότητας:

$$C_{v_{\underline{x}}} = \frac{\sigma_{\underline{x}}}{\mu_{\underline{x}}}$$

- Συντελεστής ασυμμετρίας:

$$C_{s_{\underline{x}}} = E\left[\left(\frac{\underline{x} - \mu_{\underline{x}}}{\sigma_{\underline{x}}}\right)^3\right] = \frac{\mu_{\underline{x}}(3)}{\sigma_{\underline{x}}^3}$$

- Συντελεστής κύρτωσης:

$$C_{k_{\underline{x}}} = E\left[\left(\frac{\underline{x} - \mu_{\underline{x}}}{\sigma_{\underline{x}}}\right)^4\right] = \frac{\mu_{\underline{x}}(4)}{\sigma_{\underline{x}}^4}$$

- Συντελεστής υπερβάλλουσας κύρτωσης:

$$C_{ex.k_{\underline{x}}} = C_{k_{\underline{x}}} - 3$$

$$\sigma_{\underline{x}}^2 = \mu'_{\underline{x}}(2) - (\mu_{\underline{x}})^2$$

$$\mu_{\underline{x}}(3) = \mu'_{\underline{x}}(3) - 3\mu'_{\underline{x}}(2)\mu_{\underline{x}} + 2(\mu_{\underline{x}})^3$$

$$\mu_{\underline{x}}(4) = \mu'_{\underline{x}}(4) - 4\mu'_{\underline{x}}(3)\mu_{\underline{x}} + 6\mu'_{\underline{x}}(2)(\mu_{\underline{x}})^2 - 3(\mu_{\underline{x}})^4$$

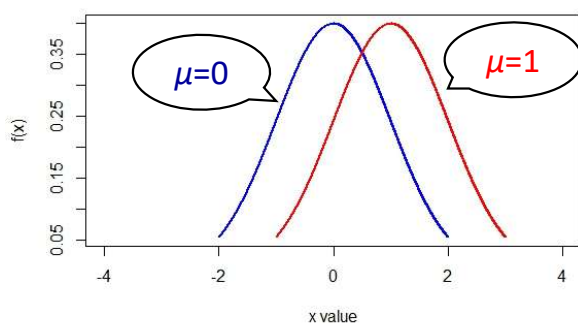
Εκτός από τις ροπές
τύπου δύναμης,
υπάρχουν και άλλα
είδη ροπών...
(βλ. παρακάτω slides)

Εκτιμήσεις ροπών – Δειγματικά/εμπειρικά μεγέθη

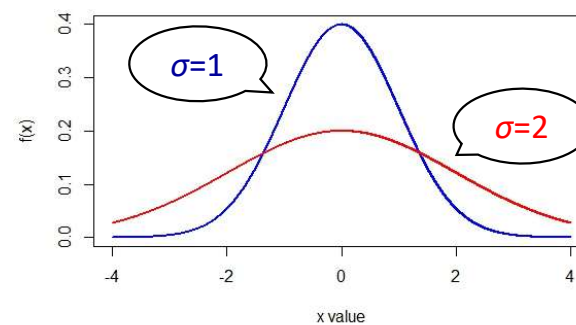
Μέση τιμή	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Διασπορά	$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$
Τυπική απόκλιση	$s_x \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_v = (s_x / \bar{x}) \left(\sqrt{\frac{n}{n - 1}} \right)$
Μεροληπτική εκτιμήτρια 3 ^{ης} ροπής	$\mu_x^{(3)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \frac{n^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(\mu_x^{(2)})^{3/2} (n - 1)(n - 2)}$
Μεροληπτική εκτιμήτρια 4 ^{ης} ροπής	$\mu_x^{(4)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n}$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_k = \frac{n^3 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\mu_x^{(2)} (n - 1)(n - 2)(n - 3)}$

Ροπές Vs σχήμα κατανομής

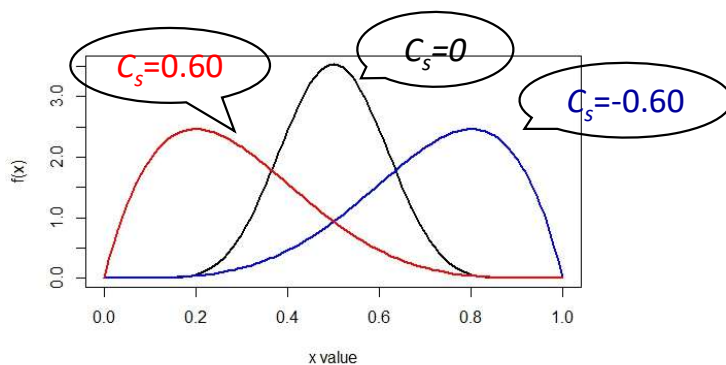
Επίδραση μέσης τιμής



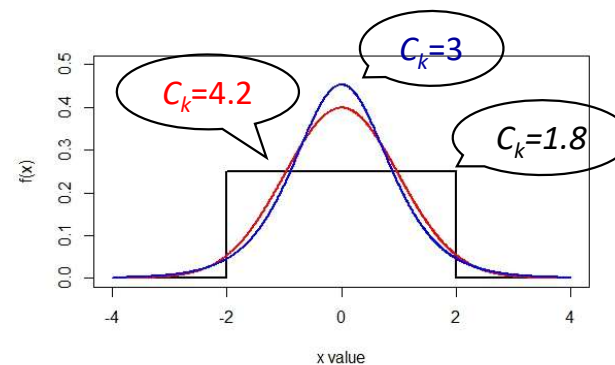
Επίδραση (διακύμανσης) τυπικής απόκλισης



Επίδραση συντελεστή ασυμμετρίας



Επίδραση συντελεστή κύρτωσης



Προσαρμογή κατανομών – εύρεση παραμέτρων

Πρόβλημα: Επιλογή συνάρτησης κατανομής ($F_X(x|\theta)$) και εύρεση παραμέτρων (θ) με βάση εμπειρικά δεδομένα/δείγμα $x = [x_1, \dots, x_n]$.

- **Μέθοδος των ροπών (π.χ., τύπου δύναμης ή L-ροπών)**

Εύρεση των παραμέτρων θ μέσω της εξίσωσης των εμπειρικών ροπών με τις αντίστοιχες θεωρητικές.

- **Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας**

Εύρεση των παραμέτρων θ μέσω της μεγιστοποίησης της (λογαριθμικής συνήθως) συνάρτησης πιθανοφάνειας.

- ... και **πολλές ακόμα**, βασισμένες στην **ελαχιστοποίηση/βελτιστοποίηση** κάποιου μέτρου/κριτηρίου επίδοσης (Goodness of Fit).

Ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης? ΌΧΙ, δεδομένου ότι απαιτεί:

- Καλή γνώση των ιδιοτήτων (και συμπεριφοράς) της μεταβλητής υπό μελέτη,
- Καλή γνώση των συναρτήσεων κατανομών, και
- Καλή γνώση των μεθόδων προσαρμογής.

Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων κατανομής

Μέθοδος των ροπών (κλασσικών ή L-moments)

Βασική ιδέα: Δεδομένων των δειγματικών ροπών $\hat{m}_r$ ($\hat{\alpha}_r, \hat{\beta}_r$ ή $\hat{\lambda}_r$) να βρεθούν οι παράμετροι ($\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]$) της κατανομής ($F_X(x|\theta)$) που αποδίδουν ταυτόσημες θεωρητικές ροπές.

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^m (m_i(\theta) - \hat{m}_i(x_1, \dots, x_n))^2$$

Σημείωση 1: Για αρκετές περιπτώσεις κατανομών είναι διαθέσιμες αναλυτικές σχέσεις.

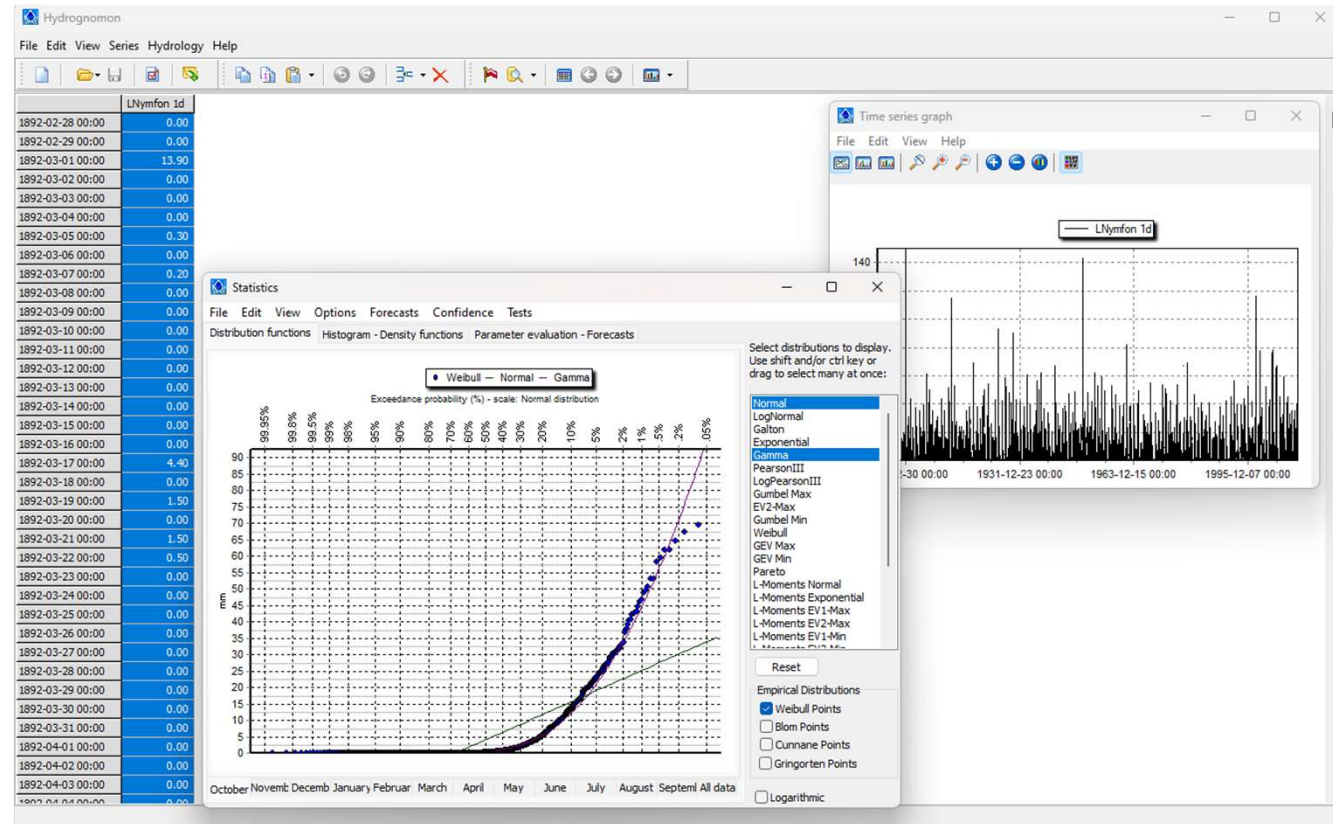
Σημείωση 2: Ανεξάρτητα από τη μέθοδο εκτίμησης, πάντα καταλήγουμε σε m εξισώσεις ($r = 1, \dots, m$) με αγνώστους τις m παραμέτρους $\theta_1, \dots, \theta_m$.

Σημείωση 3: Για την προσαρμογή κατανομών με τη μέθοδο κλασσικών ή L-moments στο περιβάλλον προγραμματισμού της γλώσσας R, βλ. πακέτα `fitdistrplus` και `lmom` αντίστοιχα.

Σημείωση 4: Η γλώσσα προγραμματισμού R συνοδεύεται από πολλά πακέτα/βιβλιοθήκες με πληθώρα κατανομών (π.χ., `actuar`, `lmomco`, `anySim` κ.α.).

Το λογισμικό Υδρογνώμων – Εργαλείο επεξεργασίας υδρολογικών χρονοσειρών

- Διαθέσιμο από εδώ:
<https://hydrognomon.openmeteo.org/>
- Θεωρητική τεκμηρίωση για το λογισμικό Υδρογνώμων (έκδοση 4)
<https://www.itia.ntua.gr/el/docinfo/928/>
- Υδρογνώμων έκδοση 4 - Οδηγός χρήστη
<https://www.itia.ntua.gr/el/docinfo/934/>



Ακολουθεί demonstration...

Επιπλέον υλικό

Πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές (Probability Weighted Moments - PWMs) συνεχούς κατανομής (Greenwood et al. 1979)

Πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές (Probability Weighted Moments - PWMs) συνεχούς κατανομής (Greenwood et al. 1979)

Έστω τ.μ. X με πεπερασμένη πρώτη ροπή, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) f_X και συνάρτηση κατανομής (CDF) F_X .

Πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές (Probability Weighted Moments – PWMs):

$$M_X(p, r, s) = \int_0^1 \left(F_X^{-1}(u)\right)^p u^r (1-u)^s du$$

PWMs τύπου α και β (τάξης s ή r ($= 0, 1, 2, \dots$))

$$\alpha(s) = M_X(1, 0, s) = \int_0^1 \left(F_X^{-1}(u)\right) (1-u)^s du \quad \beta(r) = M_X(1, r, 0) = \int_0^1 \left(F_X^{-1}(u)\right) u^r du$$

Μετασχηματισμοί μεταξύ PWMs τύπου α και β

$$\alpha(s) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} \beta(i) \quad \beta(r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \alpha(i)$$

PWMs και L ροπές (L-moments) (Hosking, 1990)

Σύνδεση PWMs με L-ροπές (L-Moments)

$$\lambda_{r+1} = \sum_{m=0}^r p_{r,m}^* \beta(m) = (-1)^r \sum_{m=0}^r p_{r,m}^* \alpha(m)$$

$$\text{Όπου, } p_{r,m}^* = (-1)^{r-m} \binom{r}{m} \binom{r+m}{m}$$

Συγκεκριμένα, για τις 4 πρώτες ροπές ισχύει,

$$\lambda_1 = \alpha(0) = \beta(0)$$

$$\lambda_2 = \alpha(0) - \alpha(1) = 2\beta_X(1) - \beta_X(0)$$

$$\lambda_3 = \alpha(0) - 6\alpha(1) + 6\alpha(2) = 6\beta(2) - 6\beta(1) + \beta(0)$$

$$\lambda_4 = \alpha(0) - 12\alpha(1) + 30\alpha(2) - 20\alpha(3) = 20\beta(3) - 30\beta(2) + 12\beta(1) - \beta(0)$$

Χαρακτηριστικά αδιάστατα μεγέθη (σημείωση $\lambda_1 = \mu_{\underline{x}}$)

$$\text{L- Συντ. Μεταβλητότητας: } \tau_2 = \lambda_2 / \lambda_1$$

$$\text{L- Συντ. Ασυμμετρίας: } \tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2$$

$$\text{L- Συντ. Κύρτωσης: } \tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$$

PWMs και L ροπές (L-moments) (Hosking, 1990)

Μεροληπτικές εκτιμήσεις (Landwehret al. [1979b) (plotting position estimator):

$$\hat{a}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - \hat{F}_{x(j)})^r x_{(j)} \quad \text{Όπου, } \hat{F}_{x(j)} = \frac{j-0.35}{n}$$

Αμερόληπτες εκτιμήσεις (Landwehret al. [1979a):

$$\hat{a}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)(n-j-1) \dots (n-j-r+1)}{(n-1)(n-2) \dots (n-r)} x_{(j)}$$

Ειδικές περιπτώσεις

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{(j)}$$

Μεροληπτικές εκτιμήσεις
(plotting position estimator)
(Landwehret al. [1979b)

$$\left[\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right) x_{(j)} \\ \hat{a}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right)^2 x_{(j)} \\ \hat{a}_3 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right)^3 x_{(j)} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} \hat{a}_1^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n-1} x_{(j)} \\ \hat{a}_2^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n-1} \frac{n-j-1}{n-2} x_{(j)} \\ \hat{a}_3^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n-1} \frac{n-j-1}{n-2} \frac{n-j-2}{n-3} x_{(j)} \end{aligned} \right]$$

Όπου n το μέγεθος του δείγματος (πλήθος των δεδομένων) και $x_{(j)}$ το δείγμα διατεγμένο απο το μικρότερο στο μεγαλύτερο, ήτοι $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Αμερόληπτες εκτιμήσεις
(Landwehret al. [1979a)

Θεωρία ακραίων τιμών - Extreme Value Theory (EVT)

Θεωρία ακραίων τιμών - Extreme Value Theory (EVT)

Στόχος: Ανάλυση και μοντελοποίηση (στατιστική ή στοχαστική) **προβλημάτων** συναφών με την εμφάνιση «πολύ μεγάλων» ή «πολύ μικρών» τιμών σε τυχαία πειράματα (μεταβλητές ή διεργασίες).

Τα ακραία, κυρίως τα μέγιστα, **παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον**, μιας και κατά κανόνα **πρόκειται** για γεγονότα, **μικρής πιθανότητας (υπέρβασης) αλλά μεγάλων επιπτώσεων** (π.χ., βροχοπτώσεις, πλημμύρες, χρηματιστηριακές απώλειες ή ζημιές).

Δύο κύριες προσεγγίσεις:

A) Μεγίστων παρατηρήσεων ανά μπλοκ (Block Maxima)

Γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (ΓΑΤ) – Generalized Extreme Value (GEV)

A) Σειρά υπεράνω κατωφλίου (Peak over threshold)

Γενικευμένη κατανομή Pareto – Generalized Pareto Distribution (GPD)

Τεχνικές στατιστικής ανάλυσης ακραίων τιμών

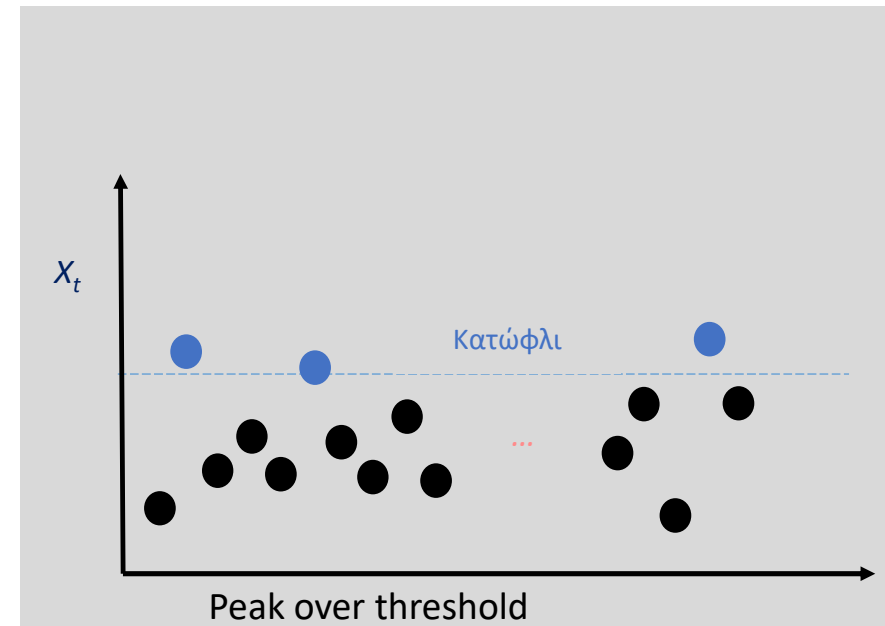
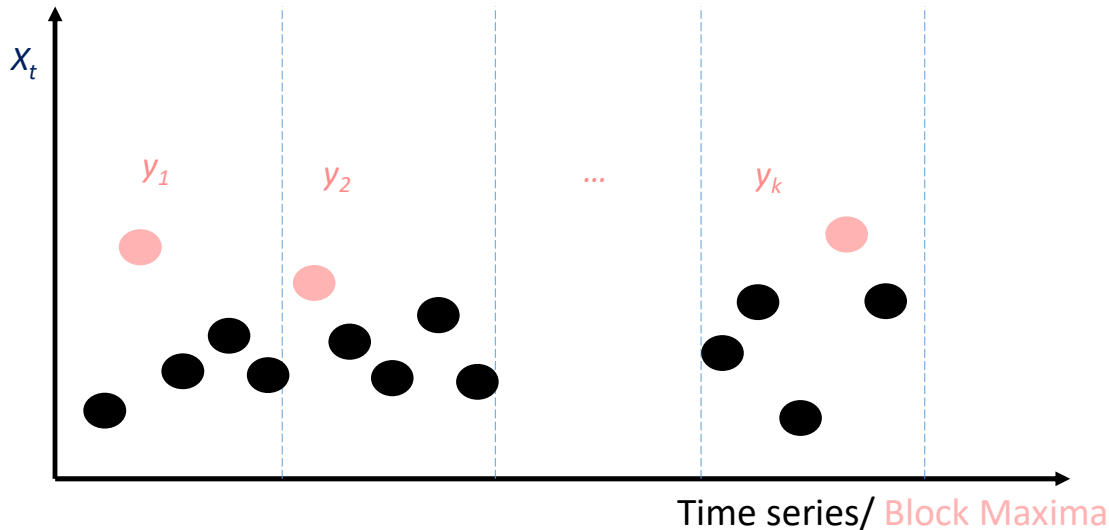
Ανάλυση μεγίστων παρατηρήσεων ανά μπλοκ (Block Maxima – υποσύνολο μεγίστων)

Έστω, $X_1, \dots, X_m$, $m = nk$, μια αλληλουχία **ανεξάρτητων και πανομοιότυπα κατανομημένων** (iid) τ.μ. με κατανομή F_X . Η κατανομή $M_X(y)$ των k μεγίστων $y_i = \max\{X_{(i-1)n+1}, X_{(i-1)n+2}, \dots, X_{(i-1)n+m}\}$, $i = 1, \dots, k$ σε ένα μπλοκ μεγέθους n μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς από τη σχέση:

$$M_X(X \leq y) = P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq y) = (F_X(y))^n$$

Ενώ, η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής δίνεται από:

$$y = F_X^{-1}(u^{1/n})$$



Τεχνικές στατιστικής ανάλυσης ακραίων τιμών

Ανάλυση μεγίστων παρατηρήσεων ανά μπλοκ (Block Maxima – υποσύνολο μεγίστων)

Αν και η κατανομή των ακραίων μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά - σπάνια γίνεται κάτι τέτοιο - **συνηθέστερη προσέγγιση** είναι χρήση και **προσαρμογή** της κατανομής Generalized Extreme Value (**GEV**) στα δεδομένων των **μεγίστων παρατηρήσεων**.

Η **GEV** βασίζεται στο (ασυμπτωτικό) θεώρημα των Fisher–Tippett–Gnedenko ($n \rightarrow \infty \rightarrow M_X \sim GEV$)

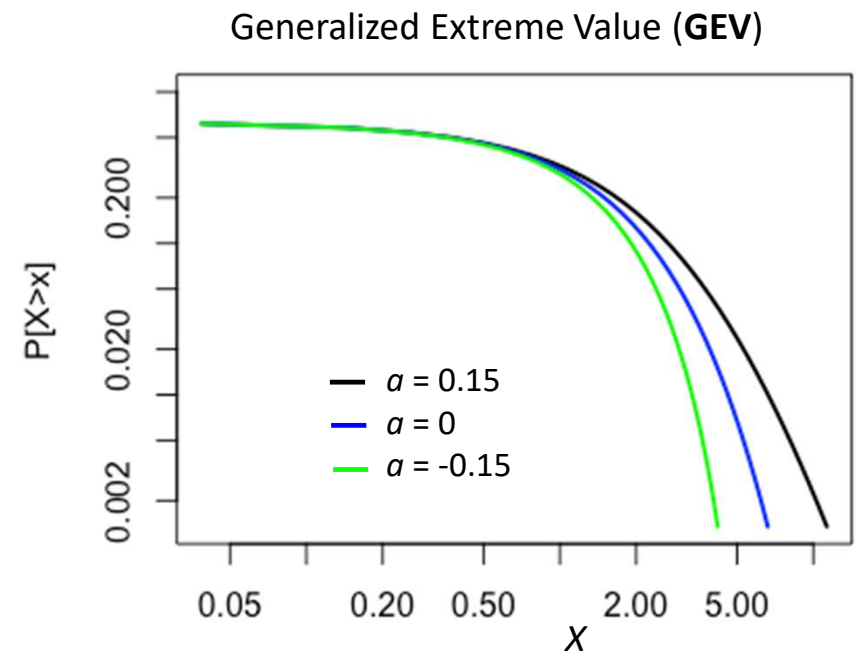
... Συνήθης παραμετροποίηση

$$F_{GEV}(x|a, b, c) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + a\frac{x-c}{b}\right)^{-\frac{1}{a}}\right), & a \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-c}{b}\right)\right), & a = 0 \end{cases}$$

$a, c \in R,$
 $b > 0$

Περιλαμβάνει τρεις (3) ασυμπτωτικούς νόμους:

- Fréchet: $a > 0, x \in (c - b/a, +\infty),$
- Gumbel: $a = 0, x \in (-\infty, +\infty)$
- Reversed Weibull: $a < 0, x \in (-\infty, c - b/a)$



Η κατανομή GEV

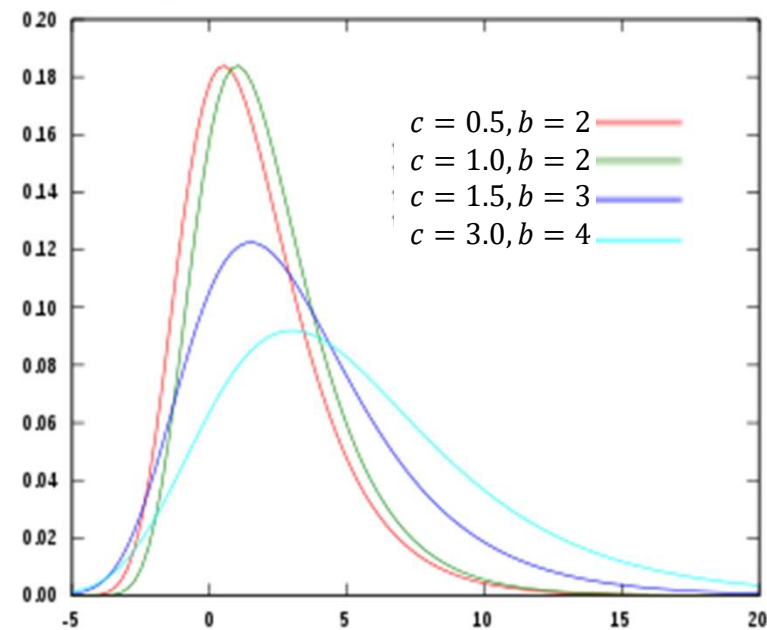
... Εναλλακτική παραμετροποίηση ($b = \lambda, a = \kappa, \text{ και } c = \lambda\psi - \beta\lambda$. Κουτσογιάννης, 1999)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left[1 + \kappa \left(\frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa - 1} \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} [(-\ln u)^{-\kappa} - 1] \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]^{1+\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	Γενικά: $\kappa x \geq \kappa \lambda (\psi - 1/\kappa)$ Για $\kappa > 0$: $\lambda (\psi - 1/\kappa) \leq x < \infty$ (Κατανομή AT2-M) Για $\kappa < 0$: $-\infty < x \leq \lambda (\psi - 1/\kappa)$ (Κατανομή AT3-M)
Παράμετροι	ψ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας κ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} [\Gamma(1 - \kappa) - 1] = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi + \Gamma(1 - \kappa) - 1]$
Διασπορά	$\sigma^2 = \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)]$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \text{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)}{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{3/2}}$

Η κατανομή Gumbel (GEV με $\kappa = 0$)

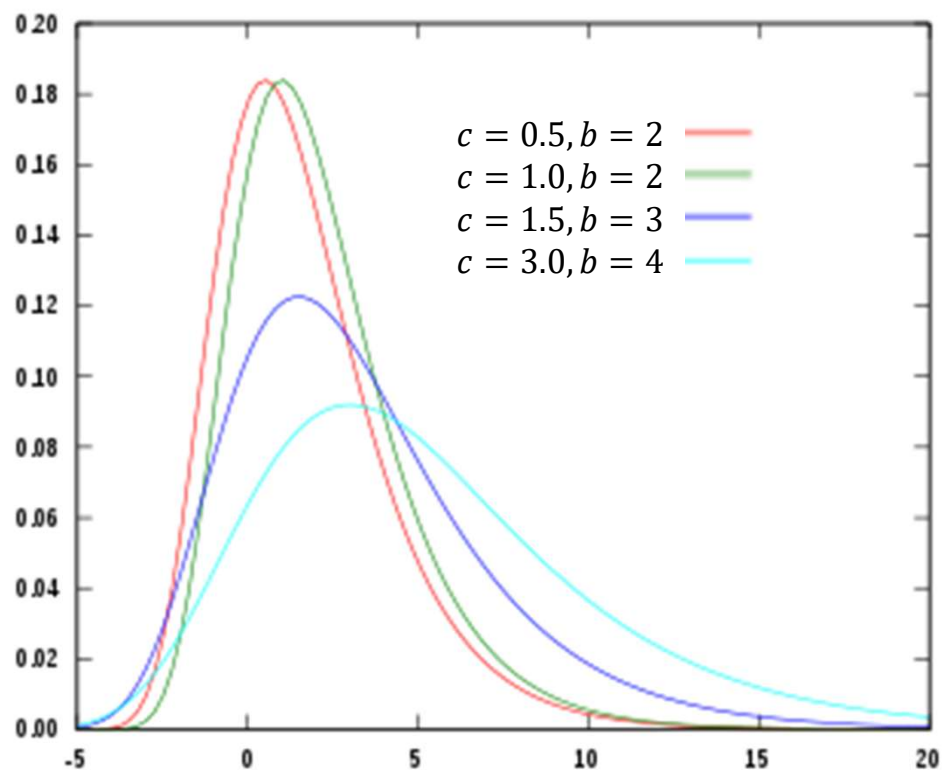
Ακραίων τιμών τύπου 1 – μεγίστων (AT1-M)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda} + \psi\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x}{\lambda} + \psi\right)\right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x}{\lambda} + \psi\right)\right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi - \lambda \ln(-\ln u) \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$
Παράμετροι	ψ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$m = \lambda (\psi + \gamma) \quad (\gamma = 0.5772 = \text{σταθερά Euler})$
Διασπορά	$\sigma^2 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} = 1.645 \lambda^2$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = 2.404 \lambda^3$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = 1.1396$

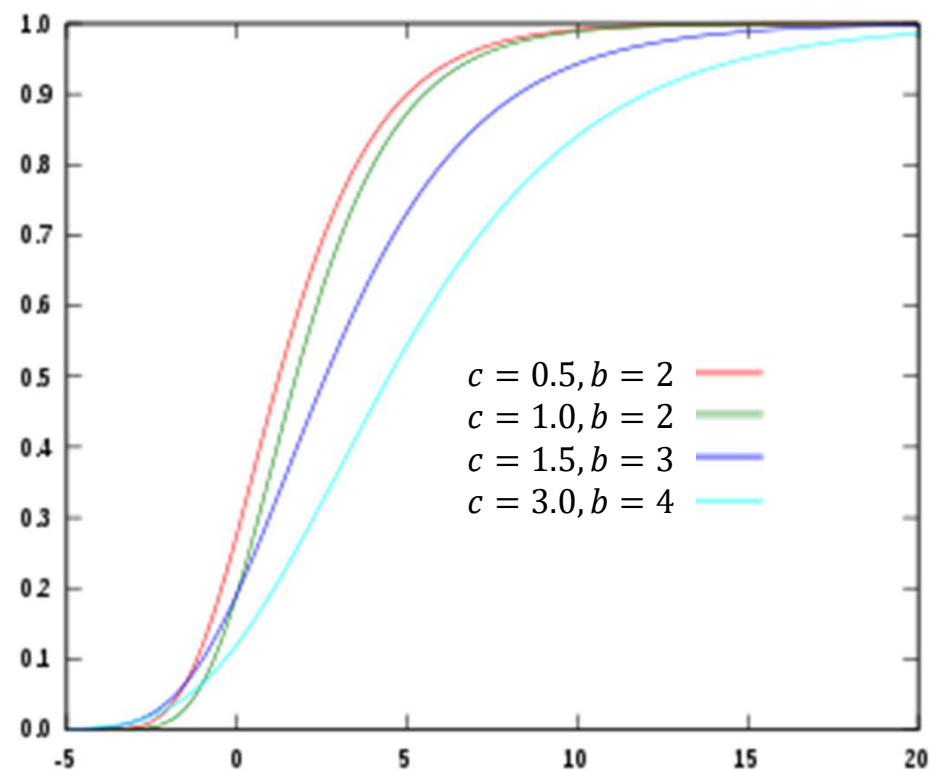


Η κατανομή Gumbel (GEV με $\kappa = 0$)

PDF



CDF



Η κατανομή Frechet (GEV με $\kappa \geq 0$)

Για $\kappa > 0$ και $\psi = 1/\kappa$ προκύπτει η ειδική περίπτωση της κατανομής ακραίων τιμών τύπου 2 – μεγίστων (AT2-M) με πεδίο ορισμού το $[0, \infty)$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa - 1} \exp \left[- \left(\kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp \left[- \left(\kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \frac{\lambda}{\kappa} [(-\ln u)^{-\kappa}] \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]^{1+\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	$0 \leq x < \infty$
Παράμετροι	$\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$: παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa)$
Διασπορά	$\sigma^2 = \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)]$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_v = \frac{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{1/2}}{\Gamma(1 - \kappa)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \frac{\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)}{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{3/2}}$

L ροπές κατανομής GEV

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

GEV

Frechet

Gumbel

	ΓΑΤ-M	ΑΤ2-M (2 παραμέτρων)	ΑΤ1-M
Μέση τιμή (1η L ροπή)	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi - 1 + \Gamma(1 - \kappa)]$	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa)$	$\lambda_1 = m = \lambda (\psi + \gamma)$ ($\gamma = 0.5772$)
2η L ροπή	$\lambda_2 = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa) (2^\kappa - 1)$		$\lambda_2 = \lambda \ln 2$
L συντελεστής ασυμμετρίας	$\tau_3 = 2 \frac{3^\kappa - 1}{2^\kappa - 1} - 3$		$\tau_3 = 2 \frac{\ln 3}{\ln 2} - 3 = 0.1699$
L συντελεστής κύρτωσης	$\tau_4 = \frac{5(4^\kappa) - 10(3^\kappa) + 6(2^\kappa) - 1}{2^\kappa - 1}$		$\tau_4 = \frac{5 \ln 4 - 10 \ln 3 + 6 \ln 2}{\ln 2}$ $= 0.1504$

Εκτίμηση παραμέτρων: Μέθοδος των (κλασσικών) ροπών

ΓΑΤ-Μ (Γενική περίπτωση – τρεις άγνωστες παράμετροι)

$$\operatorname{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1-3\kappa) - 3\Gamma(1-2\kappa)\Gamma(1-\kappa) + 2\Gamma^3(1-\kappa)}{[\Gamma(1-2\kappa) - \Gamma^2(1-\kappa)]^{3/2}} = C_s$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια ± 0.01 για $-1 < \kappa < 1/3$ ή $-2 < C_s < ?$):

$$\kappa = \frac{1}{3} - \frac{1}{0.31 + 0.91 C_s + \sqrt{(0.91 C_s)^2 + 1.8}}$$

$$\lambda = \frac{|\kappa| \sigma}{\sqrt{\Gamma(1-2\kappa) - \Gamma^2(1-\kappa)}}$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} - \frac{\Gamma(1-\kappa) - 1}{\kappa}$$

Στη θέση των m , σ , C_v και C_s χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα εμπειρικά μεγέθη που προκύπτουν από το διαθέσιμο δείγμα.

Εκτίμηση παραμέτρων: Μέθοδος των (κλασσικών) ροπών

AT1-M (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\lambda = 0.78 \sigma$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} - 0.5772$$

AT2-M (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\frac{\Gamma(1-2\kappa)}{\Gamma^2(1-\kappa)} = C_v^2 + 1$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια ± 0.004 για $0 < \kappa < 0.5$ ή $0 < C_v < ?$):

$$\kappa = \frac{1}{2} - \frac{1}{\exp\{2.59 [\ln(C_v^2 + 1)]^{0.475}\} + 1}$$

$$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1-\kappa)}$$

Πως προκύπτουν οι σχέσεις αυτές?

Επίλυση των ροπών ως προς τις παραμέτρους

Για παράδειγμα...

Μέση τιμή	$m = \lambda (\psi + \gamma)$	$(\gamma = 0.5772 = \text{σταθερά Euler})$
Διασπορά	$\sigma^2 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} = 1.645 \lambda^2$	

$$\frac{m}{\lambda} = \psi + \gamma \rightarrow \psi = \frac{m}{\lambda} - \gamma \quad \lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{1.645}} \rightarrow \lambda = 0.78\sigma$$

Στη θέση των m , σ , C_v και C_s χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα εμπειρικά μεγέθη που προκύπτουν από το διαθέσιμο δείγμα.

Εκτίμηση παραμέτρων: Μέθοδος των L-ροπών

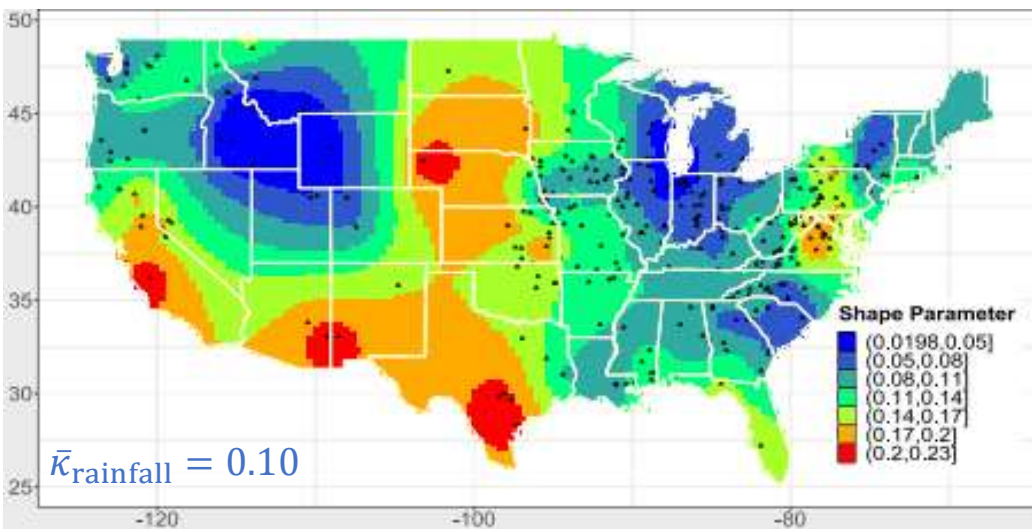
ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

Παρά- μετρος	ΓΑΤ-M	ΑΤ1-M	ΑΤ2-M (2 παραμέτρων)
κ	$\kappa = 7.8 c - 1.43 c^2$ όπου $c := \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{2}{3 + \tau_3}$	$(\kappa = 0)$	$\kappa = \frac{\ln(1 + \tau_2)}{\ln 2}$
λ	$\lambda = \frac{\kappa \lambda_2}{\Gamma(1 - \kappa) (2^\kappa - 1)}$	$\lambda = \frac{\lambda_2}{\ln 2}$	$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1 - \kappa)}$
ψ	$\psi = \frac{m}{\lambda} - \frac{\Gamma(1 - \kappa) - 1}{\kappa}$	$\psi = \frac{m}{\lambda} - 0.5772$	$(\psi = 1/\kappa)$

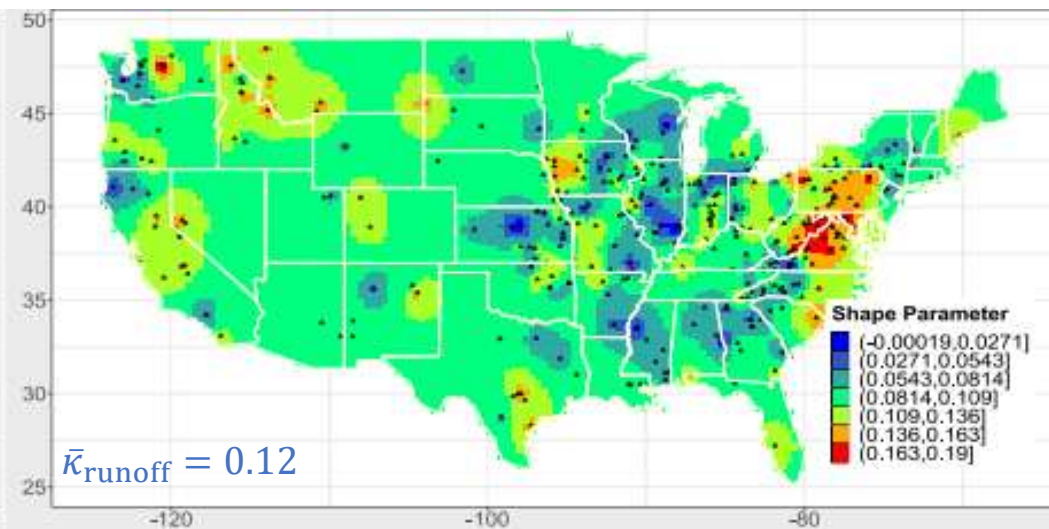
Στη θέση των m , λ_2 , τ_2 , και τ_3 χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα εμπειρικά μεγέθη που προκύπτουν από το διαθέσιμο δείγμα.

Ένα παράδειγμα...

Μέγιστη ημερήσια βροχόπτωση (παράμετρος GEV: κ)



Μέγιστη ημερήσια απορροή (παράμετρος GEV: κ)



Βάση δεδομένων MOPEX (ΗΠΑ)

439 χρονοσειρές επιφανειακής ημερήσιας βροχόπτωσης και απορροής.

Ανάλυση μεγίστων ετήσιων βροχοπτώσεων και απορροών [Nezi et al., 2020].

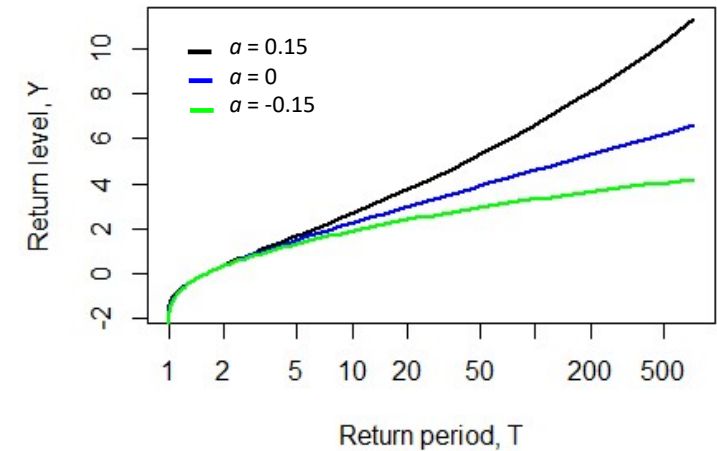
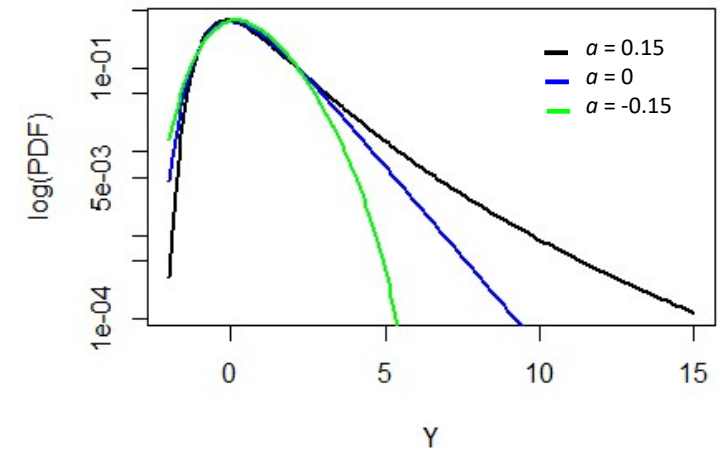
Περίοδος επαναφοράς & διακινδύνευση

Ως **περίοδος επαναφοράς** (συνήθως αναφερόμενη σε έτη), T , μιας δεδομένης τιμής x της τ.μ. X ορίζεται ο **μέσος** αριθμός χρονικών διαστημάτων που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών εμφανίσεων της τ.μ. με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της τιμής x .

Στην περίπτωση ετήσιων μέγιστων :

$$T = \frac{1}{1 - F_X(x)} \iff F_X(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

Generalized Extreme Value (GEV)



Περίοδος επαναφοράς & διακινδύνευση

Περίοδος επαναφοράς, $T=1/p$	Πιθανότητα υπέρβασης, $p=1/T$	Πιθανότητα ΜΗ υπέρβασης, $u=1-p$
5	$1/5 = 0.2$	0.8
10	$1/10 = 0.1$	0.9
20	$1/20 = 0.05$	0.95
50	$1/50 = 0.02$	0.98
100	$1/100 = 0.01$	0.99
1000	$1/1000 = 0.001$	0.999

$$T = \frac{1}{P(X > x)} = \frac{1}{(1 - P(X \leq x))} = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - u}$$

Περίοδος επαναφοράς Vs Τεχνικά έργα

Ανάλογα το είδος του έργου επιλέγεται η περίοδος επαναφοράς

- Αντιπλημμυρικά έργα $\rightarrow T=50-100$ έτη
 - Δίκτυο ομβρίων $\rightarrow T=10-25$ έτη
 - Οριοθέτηση ρέματος $\rightarrow T=50$ έτη
 - Σχεδιασμός γέφυρας $\rightarrow T=500$ έτη
 - Σχεδιασμός φράγματος (Κατηγορία 1) $\rightarrow T=10000$ έτη
 - Σχεδιασμός φράγματος βαρύτητας (Κατηγορία 2) $\rightarrow T=1000$ έτη
 - Σχεδιασμός γεωφράγματος (Κατηγορία 2) $\rightarrow T=5000$ έτη
 - Σχεδιασμός φράγματος βαρύτητας (Κατηγορία 3) $\rightarrow T=200$ έτη
 - Σχεδιασμός γεωφράγματος (Κατηγορία 2) $\rightarrow T=500$ έτη
-

Περίοδος επαναφοράς: Βροχόπτωση Vs Πλημμύρα

Προσοχή!

Συνήθως είναι διαθέσιμα δεδομένα βροχόπτωσης και όχι απορροής →

- Η περίοδος επαναφοράς αφορά τη βροχόπτωση
 - Η περίοδος επαναφοράς της πλημμύρας δε ταυτίζεται με αυτή της βροχόπτωσης!
 - Η εγκατάσταση ενός βροχομετρικού δικτύου είναι οικονομικότερη σε σχέση με το υδρομετρικό.
 - Σπάνια υπάρχουν επαρκείς μετρήσεις απορροής για τη στατιστική ανάλυση της πλημμύρας.
-

Παράδειγμα

Πίν. 6.10 Δείγμα μέγιστης ημερήσιας παροχής (σε m^3/s) του ποταμού Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγανίου.

Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή
1970-71	884	1977-78	365	1984-85	317
1971-72	305	1978-79	502	1985-86	374
1972-73	215	1979-80	381	1986-87	188
1973-74	378	1980-81	387	1987-88	192
1974-75	176	1981-82	525	1988-89	448
1975-76	430	1982-83	412	1989-90	70
1976-77	713	1983-84	439		

Ερωτήματα

- A) Να βρεθούν οι εμπειρικές περίοδοι επαναφοράς των δεδομένων.
- B) Να προσαρμοστεί η κατανομή Gumbel (AT1-M) με βάση την μέθοδο των (κλασσικών) ροπών.
- Γ) Να υπολογιστεί η μέγιστη παροχή που αντιστοιχεί σε $T = \{50, 100, 1000\}$ έτη.

Όμβριες καμπύλες ή Intensity – Duration – Frequency (IDF) Curves

Μοντέλα (συνήθως αναλυτικής μορφής) τα οποία εκφράζουν την πιθανοτική συμπεριφορά των ακραίων, λαμβάνοντας υπόψιν τους:

- Την ένταση της βροχόπτωσης, $i(d, T)$ (mm/h).
- Την διάρκεια του γεγονότος, d (hours) - βλ. κλίμακα συνάθροισης.
- Την περίοδο επαναφοράς, T (έτη).

Γενική μορφή

$$i(d, T) = \frac{a(T)}{b(d)}$$

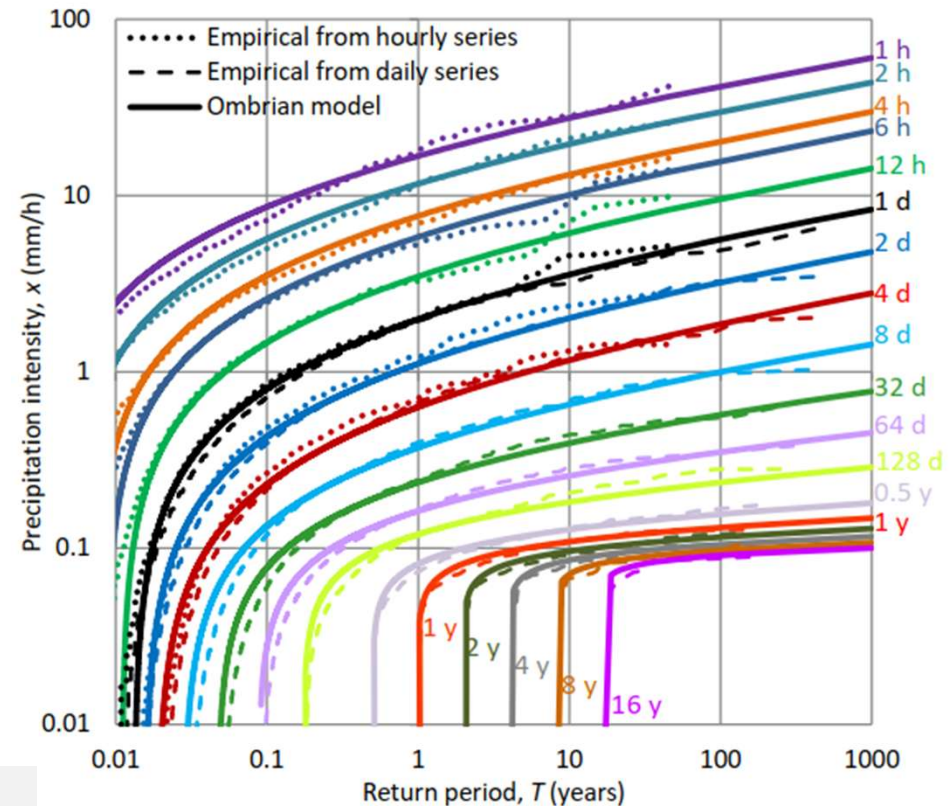
Όπου: i η ένταση βροχής διάρκειας d για περίοδο επαναφοράς T , και $a(T)$ και $b(d)$ κατάλληλες συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς και της διάρκειας, αντίστοιχα.

Παράδειγμα (Koutsoyiannis et al., 1998)

χρήση της GEV για το $a(T)$ και εμπειρικής σχέσης για το $b(d)$

$$i(d, T) = \frac{\lambda' \left(\left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\kappa} + \psi' \right)}{(1 + d/\theta)^\eta}$$

Όπου (βλ. πίνακα σελ. 7):
 $\lambda' = \lambda/\kappa$ και $\psi' = \kappa\psi - 1$
 $\theta > 0$ και $0 < \eta < 1$



Koutsoyiannis D (2020) Stochastics of Hydroclimatic Extremes – A Cool Look at Risk, Edition 0. National Technical University of Athens, Athens, Greece

Όμβριες καμπύλες στην Ελλάδα (1^{ος} κύκλος)

- Όμβριες καμπύλες (5 παραμέτρων) με βάση την ΓΑΤ
- Δίνονται παράμετροι για σταθμούς σε όλη την Ελλάδα
- Πληροφορίες: <https://floods.ypeka.gr/sdkp-lap/omvries-1round/>

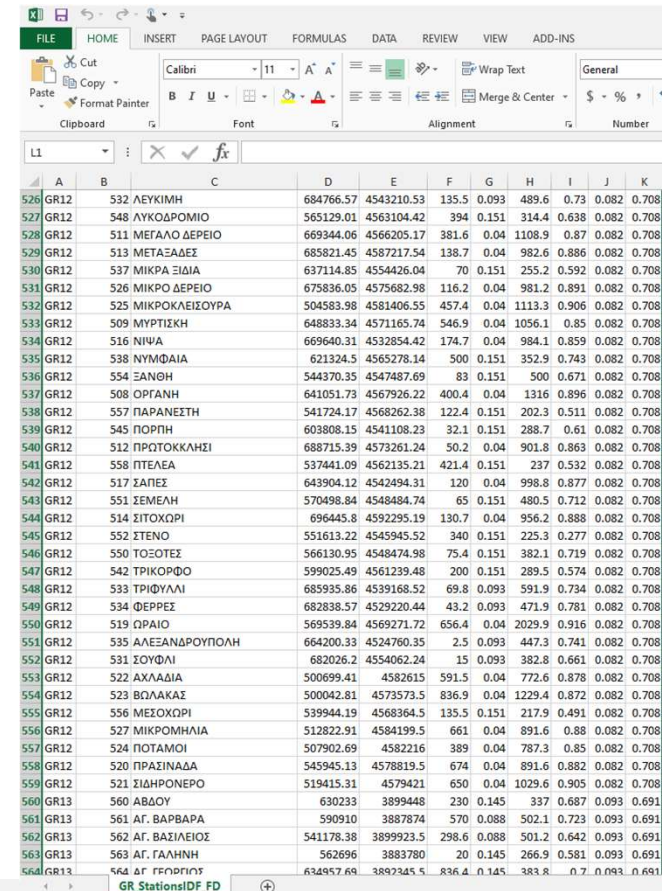
Βασική έκφραση:

$$i(d, T) = \frac{\lambda(T^{\kappa} - \psi)}{\left(1 + \frac{d}{\theta}\right)^{\eta}}$$

T : έτη, d : ώρες και i : mm/h

Προσοχή: πλέον έχουν αναρτηθεί (και είναι σε ισχύ) οι νέες (2^{ος} κύκλος, 2023) για την Ελλάδα.

https://floods.ypeka.gr/wp-content/uploads/2023/10/IDF_Report_V4.pdf
https://floods.ypeka.gr/wp-content/uploads/2023/10/GR_StationsIDF_FD.xlsx
https://floods.ypeka.gr/wp-content/uploads/2023/10/GR_StationsIDF_FD.zip



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
526	GR12	532	ΛΕΥΚΙΜΗ	684766.57	4543210.53	135.5	0.093	489.6	0.73	0.082	0.708
527	GR12	548	ΛΥΚΟΔΡΟΜΙΟ	565129.01	4563104.42	394	0.151	314.4	0.638	0.082	0.708
528	GR12	511	ΜΕΓΑΛΟ ΔΕΡΕΙΟ	669344.06	4566205.17	381.6	0.04	1108.9	0.87	0.082	0.708
529	GR12	513	ΜΕΤΑΣΤΑΣ	685821.45	4587217.54	138.7	0.04	982.6	0.886	0.082	0.708
530	GR12	537	ΜΙΚΡΑ ΣΙΔΙΑ	637114.85	4554426.04	70	0.151	255.2	0.592	0.082	0.708
531	GR12	526	ΜΙΚΡΟ ΔΕΡΕΙΟ	675836.05	4575682.98	116.2	0.04	981.2	0.891	0.082	0.708
532	GR12	525	ΜΙΚΡΟΚΛΕΙΣΟΥΡΑ	504583.98	4581406.55	457.4	0.04	1113.3	0.906	0.082	0.708
533	GR12	509	ΜΥΡΤΣΙΚΗ	648833.34	4571165.74	546.9	0.04	1056.1	0.85	0.082	0.708
534	GR12	516	ΝΙΨΑ	669640.31	4532854.42	174.7	0.04	984.1	0.859	0.082	0.708
535	GR12	538	ΝΥΜΦΑΙΑ	621324.5	4565278.14	500	0.151	352.9	0.743	0.082	0.708
536	GR12	554	ΞΑΝΘΗ	544370.35	4547487.69	83	0.151	500	0.671	0.082	0.708
537	GR12	508	ΟΡΓΑΝΗ	641051.73	4567926.22	400.4	0.04	1316	0.896	0.082	0.708
538	GR12	557	ΠΑΡΑΝΕΣΤΗ	541724.17	4568262.38	122.4	0.151	202.3	0.511	0.082	0.708
539	GR12	545	ΠΟΡΠΗ	603808.15	4541108.23	32.1	0.151	288.7	0.61	0.082	0.708
540	GR12	512	ΠΡΩΤΟΚΛΗΣΗ	688715.39	4573261.24	50.2	0.04	901.8	0.863	0.082	0.708
541	GR12	558	ΠΤΕΛΕΑ	537441.09	4562135.21	421.4	0.151	237	0.532	0.082	0.708
542	GR12	517	ΣΑΠΕΣ	643904.12	4542494.31	120	0.04	998.8	0.877	0.082	0.708
543	GR12	551	ΣΕΜΕΛΗ	570498.84	4548484.74	65	0.151	480.5	0.712	0.082	0.708
544	GR12	514	ΣΙΤΟΧΩΡΙ	696445.8	4592295.19	130.7	0.04	956.2	0.888	0.082	0.708
545	GR12	552	ΣΤΕΝΟ	551613.22	4545945.52	340	0.151	225.3	0.277	0.082	0.708
546	GR12	550	ΤΟΞΟΤΕΣ	566130.95	4548474.98	75.4	0.151	382.1	0.719	0.082	0.708
547	GR12	542	ΤΡΙΚΟΡΦΟ	599025.49	4561239.48	200	0.151	289.5	0.574	0.082	0.708
548	GR12	533	ΤΡΙΦΥΛΛΙ	685935.86	4539168.52	69.8	0.093	591.9	0.734	0.082	0.708
549	GR12	534	ΦΕΡΡΕΣ	682838.57	4529220.44	43.2	0.093	471.9	0.781	0.082	0.708
550	GR12	519	ΩΡΑΙΟ	569539.84	4569271.72	656.4	0.04	2029.9	0.916	0.082	0.708
551	GR12	535	ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ	664200.33	4524760.35	2.5	0.093	447.3	0.741	0.082	0.708
552	GR12	531	ΣΟΥΦΛΙ	682026.2	4554062.24	15	0.093	382.8	0.661	0.082	0.708
553	GR12	522	ΑΧΛΑΔΙΑ	500699.41	4582615	591.5	0.04	772.6	0.878	0.082	0.708
554	GR12	523	ΒΟΛΑΚΑΣ	500042.81	4573573.5	836.9	0.04	1229.4	0.872	0.082	0.708
555	GR12	556	ΜΕΣΟΧΩΡΙ	539944.19	4568364.5	135.5	0.151	217.9	0.491	0.082	0.708
556	GR12	527	ΜΙΚΡΟΜΗΛΙΑ	512822.91	4584199.5	661	0.04	891.6	0.88	0.082	0.708
557	GR12	524	ΠΟΤΑΜΟΙ	507902.69	4582216	389	0.04	787.3	0.85	0.082	0.708
558	GR12	520	ΠΡΑΣΙΝΑΔΑ	545945.13	4578819.5	674	0.04	891.6	0.882	0.082	0.708
559	GR12	521	ΣΙΔΗΡΟΠΕΡΟ	519415.31	4579421	650	0.04	1029.6	0.905	0.082	0.708
560	GR13	560	ΑΒΔΟΥ	630233	3899448	230	0.145	337	0.687	0.093	0.691
561	GR13	561	ΑΓ. ΒΑΡΒΑΡΑ	590910	3887874	570	0.088	502.1	0.723	0.093	0.691
562	GR13	562	ΑΓ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ	541178.38	3899923.5	298.6	0.088	501.2	0.642	0.093	0.691
563	GR13	563	ΑΓ. ΓΑΛΗΝΗ	562696	3883780	20	0.145	266.9	0.581	0.093	0.691
564	GR13	564	ΑΓ. ΓΕΩΡΓΙΟΣ	634957.69	3882345.5	836.4	0.145	383.8	0.7	0.093	0.691

Όμβριες καμπύλες στην Ελλάδα (2^{ος} κύκλος)

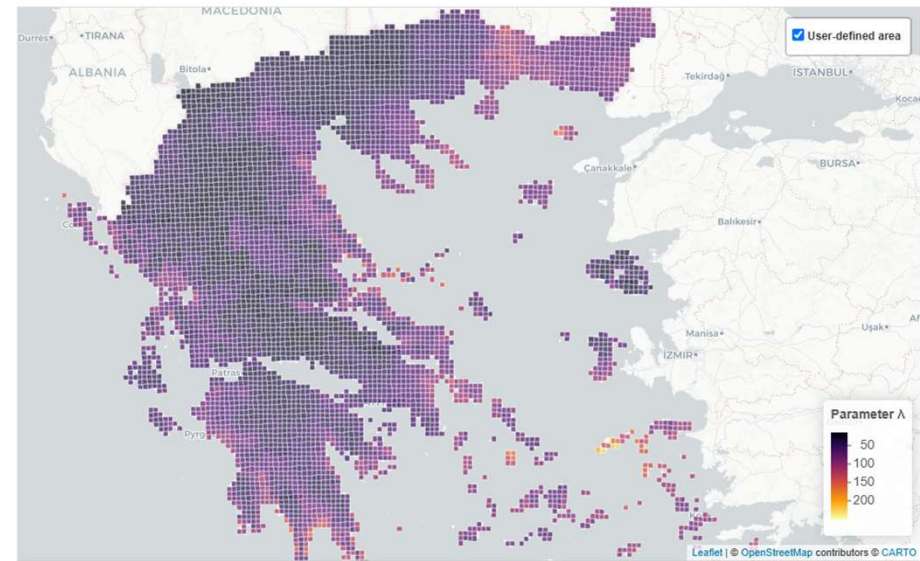
- Όμβριες καμπύλες (5 παραμέτρων) με βάση την ΓΑΤ
- Δίνονται παράμετροι για σταθμούς σε όλη την Ελλάδα
- Πληροφορίες: <https://floods.ypeka.gr/sdkp-lap/omvries-2round/>
- Δείτε και: <https://www.itia.ntua.gr/el/docinfo/2273/>

Βασική έκφραση:

$$i(d, T) = \lambda_* \frac{\left(\frac{T}{\beta_*}\right)^\xi - 1}{\left(1 + \frac{d}{\alpha}\right)^{\eta_*}}$$

T : έτη, d : ώρες και i : mm/h

με ενιαίες παραμέτρους $\alpha = 0.18$ h και $\xi = 0.18$ για το σύνολο της χώρας, ΚΑΙ γεωγραφικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους λ_* , β_* και η_*



https://itsoukal.shinyapps.io/IDFs_GR/

Όμβριες καμπύλες στην Ελλάδα: Παράδειγμα

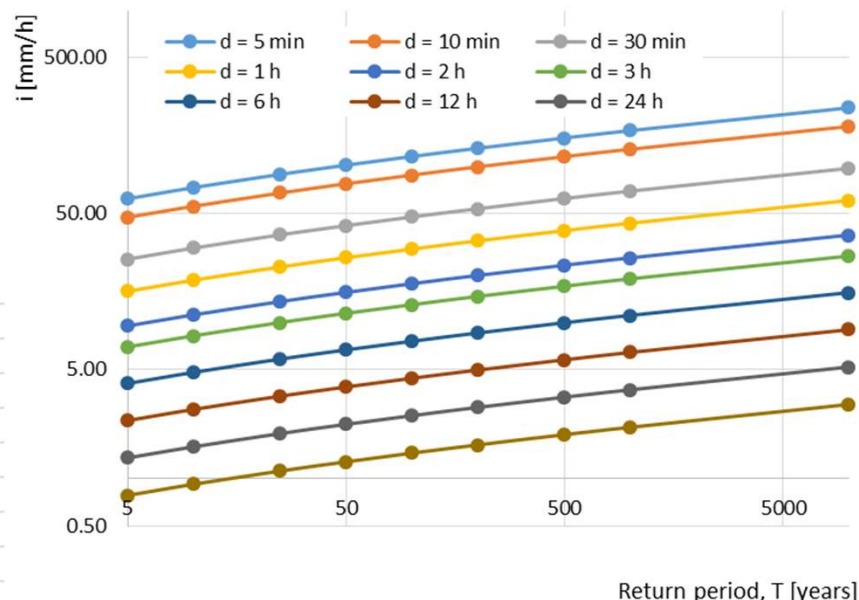
Βασική έκφραση:

$$i(d, T) = \frac{\lambda(T^\kappa - \psi)}{\left(1 + \frac{d}{\theta}\right)^\eta}, \quad T: \text{έτη}, d: \text{ώρες}$$

Παράμετροι των όμβριων καμπυλών

Παράμετρος	Σχήματος κ	Κλίμακας λ'	Θέσης ψ'	διάρκειας θ	διάρκειας η
	0.1	200	0.7	0.12	0.8
T [years]	50				
d [h]	2				
i(d,T)	15.66				
h(d,T)	31.31				

	d[h] / T[y]	5	10	25	50	100	200	500	1000	10000
5	0.083	62.25	73.31	89.15	102.14	116.06	130.98	152.36	169.89	237.65
10	0.167	47.30	55.70	67.73	77.60	88.18	99.51	115.76	129.07	180.55
30	0.5	25.52	30.05	36.54	41.87	47.57	53.69	62.45	69.63	97.41
60	1	15.90	18.72	22.77	26.09	29.64	33.45	38.91	43.39	60.69
120	2	9.54	11.24	13.67	15.66	17.79	20.08	23.36	26.04	36.43
180	3	7.00	8.25	10.03	11.49	13.06	14.74	17.14	19.12	26.74
360	6	4.09	4.81	5.85	6.70	7.62	8.60	10.00	11.15	15.60
720	12	2.37	2.79	3.39	3.88	4.41	4.98	5.79	6.46	9.03
1440	24	1.36	1.61	1.95	2.24	2.54	2.87	3.34	3.72	5.21
2880	48	0.78	0.92	1.12	1.29	1.46	1.65	1.92	2.14	3.00



Δείτε κάτι αντίστοιχο για της ΗΠΑ:
<https://hdsc.nws.noaa.gov/pfds/>

Περισσότερες πληροφορίες – Ενδεικτική βιβλιογραφία

- Coles S (2001) An introduction to statistical modeling of extreme values. Springer
 - de Haan L (1971) A form of regular variation and its application to the domain of attraction of the double exponential distribution. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 17:241–258
 - Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T (1997) Modelling Extremal Events. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg
 - Fréchet M (1927) Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. Ann Soc Math Pol 6:93–116
 - Galambos J (1972) On the distribution of the maximum of random variables. Ann Math Stat 516–521
 - Greenwood JA, Landwehr JM, Matalas NC, Wallis JR (1979) Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. Water Resour Res 15:1049–1054. doi: 10.1029/WR015i005p01049
 - Gumbel EJ (1958) Statistics of extremes. Columbia University Press, New York, USA
 - Hao Z, Singh VP (2009) Entropy-based parameter estimation for extended Burr XII distribution. Stoch Environ Res Risk Assess 23:1113–1122. doi: 10.1007/s00477-008-0286-7
 - Hosking JRM (1990) L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics. J R Stat Soc Ser B 52:105–124
 - Koutsoyiannis D (2020) Stochastics of Hydroclimatic Extremes – A Cool Look at Risk, Edition 0. National Technical University of Athens, Athens, Greece
 - Leadbetter MR (1974) On extreme values in stationary sequences. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. doi: 10.1007/BF00532947
 - von Mises R (1936) La distribution de la plus grande de n valeurs. Am Math Soc
 - Κουτσογιάννης Δ (1999) Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων. Σημειώσεις.
-