α-τομή, γέφυρα από ασαφή σε συμβατικά σύνολα

Κάθε ασαφές σύνολο μπορεί να θεωρηθεί σαν μία οικογένεια από συμβατικά σύνολα τα οποία παράγονται από το ασαφές σύνολο με τη διαδικασία της α-τομής. Η α- τομή (α - cut) χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό α που δεν υπερβαίνει ποτέ τη μονάδα και ποτέ δεν είναι μικρότερος του μηδενός, περιορισμοί που απορρέουν από το πεδίο τιμών της συνάρτησης συμμετοχής των ασαφών συνόλων. Μια α - τομή είναι ένα συμβατικό σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του γενικού συνόλου X για τα οποία η συνάρτηση συμμετοχής έχει τιμές:

${}^{\alpha}A = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0,1]$ για την ασθενή τομή (Σχ.2.3) (2.8)

${}^{\alpha+}A = \{x / \mu_A(x) > \alpha\}$ $\alpha \in [0,1)$ για την ισχυρή τομή (2.9)

Από τον παραπάνω ορισμό απορρέουν διάφορες ιδιότητες των α – τομών. Παρατίθενται μερικές αντιπροσωπευτικές ιδιότητες των α- τομών (Klir and Yuan, 1995):

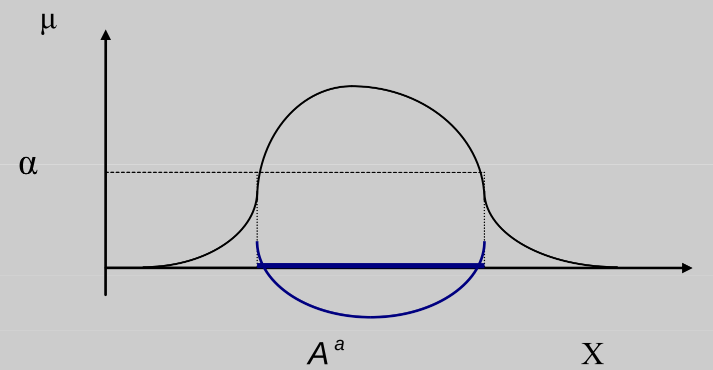
Έστω $A, B \in F(X)$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για όλα τα $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

(i) ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha}A$ (2.10)

(ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow {}^{\alpha}A \supseteq {}^{\beta}A$ και ${}^{\alpha+}A \supseteq {}^{\beta+}A$ (μονοτονία) (2.11)

(iii) ${}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$ και ${}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$ (2.12)

(iv) ${}^{\alpha+}(A \cup B) = {}^{\alpha+}A \cup {}^{\alpha+}B$ και ${}^{\alpha+}(A \cap B) = {}^{\alpha+}A \cap {}^{\alpha+}B$ (2.13)



Σχήμα 2.8 :α-τομή και αναπαρίσταται ως το μπλε υποσύνολο του X

Μέσω των α-τομών είναι δυνατή η σύνδεση μεταξύ ασαφών και των συμβατικών συνόλων. Το θεώρημα της σύνθεσης καταδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό. Σύμφωνα με το θεώρημα της σύνθεσης κάθε ασαφές σύνολο μπορεί να παρασταθεί μοναδικά είτε από μία οικογένεια α- ασθενών τομών, είτε από μία οικογένεια α- ισχυρών τομών. Ακολουθούν τα δύο θεωρήματα της σύνθεσης, το πρώτο για τις ασθενείς τομές και το δεύτερο για τις ισχυρές τομές:

1ος κανόνας σύνθεσης:

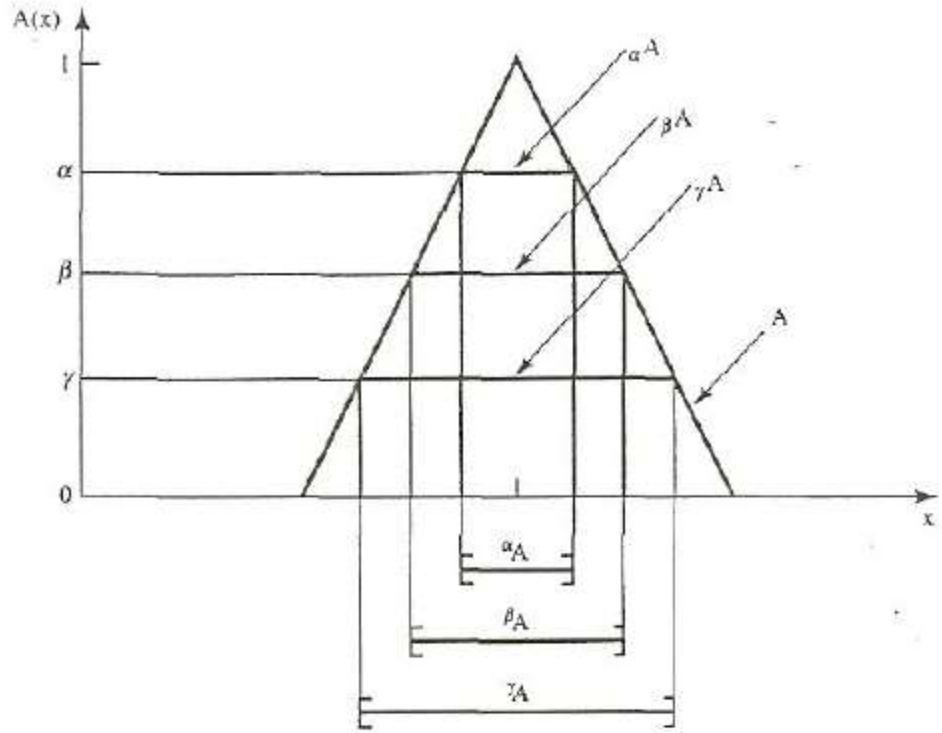
Για κάθε $A \in \Box(X)$

$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}A \quad \text{όπου} \quad {}_{\alpha}A = \alpha \cdot {}^{\alpha}A \tag{2.14}$$

2ος κανόνας σύνθεσης:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} {}_{\alpha+}A \quad \text{όπου} \quad {}_{\alpha+}A = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A \tag{2.15}$$

Θα ήταν λάθος να δοθεί η εντύπωση ότι το ασαφές σύνολο είναι μία απλή ακολουθία συμβατικών συνόλων εφόσον η έννοια της α - τομής εμπεριέχει από μόνη της την έννοια του βαθμού συμμετοχής (Karray and Silva, 2004).



A(x)
1
α
β
γ
0
x
αA
βA
γA
A
αA
βA
γA

Ασαφείς αριθμοί

Οι ασαφείς αριθμοί στη γενική περίπτωση μπορούν να ορισθούν αξιωματικά με βάση τον παρακάτω ορισμό (Klir and Yuan, 1995):

Ορισμός 2.4.1: Ένα ασαφές σύνολο A στο 🕛 είναι ένας *ασαφής αριθμός* αν ικανοποιεί τουλάχιστον τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

1. A είναι κανονικό σύνολο
2. $^{\alpha}A$ είναι ένα κλειστό σύνολο για κάθε $\alpha \in (0, 1]$
3. Το σύνολο υποστήριξης είναι πεπερασμένο (Klir and Yuan, 1995)

Μορφή ασαφών αριθμών

Θεώρημα 2.4.2: Έστω A ασαφές σύνολο, $A \in F(M)$. Τότε A είναι ένας ασαφής αριθμός αν κα μόνο αν υπάρχει ένα κλειστό διάστημα [α, β]🕒⇗, τέτοιο ώστε (Σχ.2.5.α):

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x \in [\alpha, \beta] \\ l(x) & \text{για } x \in (-\infty, \alpha) \\ r(x) & \text{για } x \in (\beta, \infty) \end{cases} \quad (2.16.\alpha)$$

όπου l είναι μία συνάρτηση μονοτόνως αύξουσα από το $(-\infty, \alpha)$ στο [0, 1), συνεχής από τα δεξιά της και ισχύει $l(x) = 0$ για $x \in (-\infty, \omega_1)$. Η συνάρτηση r είναι μονοτόνως φθίνουσα, συνεχής από τα αριστερά της και ισχύει $r(x) = 0$ για $x \in (\omega_2, \infty)$. (2.16.β)

Ορισμός 2.4.3: Ο ασαφής αριθμός $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_T$ με $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$ είναι ένας *τριγωνικός ασαφής αριθμός* όταν έχει την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής (2.5.β):

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x<\alpha_1 \\ \dfrac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} & \text{αν } \alpha_1 \le x < \alpha_2 \\ \dfrac{\alpha_3-x}{\alpha_3-\alpha_2} & \text{αν } \alpha_2 \le x \le \alpha_3 \\ 0 & \text{αν } x>\alpha_3 \end{cases} \tag{2.17}$$

Το υποστηρίζον διάστημα του τριγωνικού ασαφούς αριθμού είναι το διάστημα (α_1,α_3).

Ορισμός 2.4.4: Ο ασαφής *συμμετρικός* τριγωνικός αριθμός (ΑΣΤΑ) είναι ένας ασαφής τριγωνικός αριθμός $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_T$, όπου ισχύει:

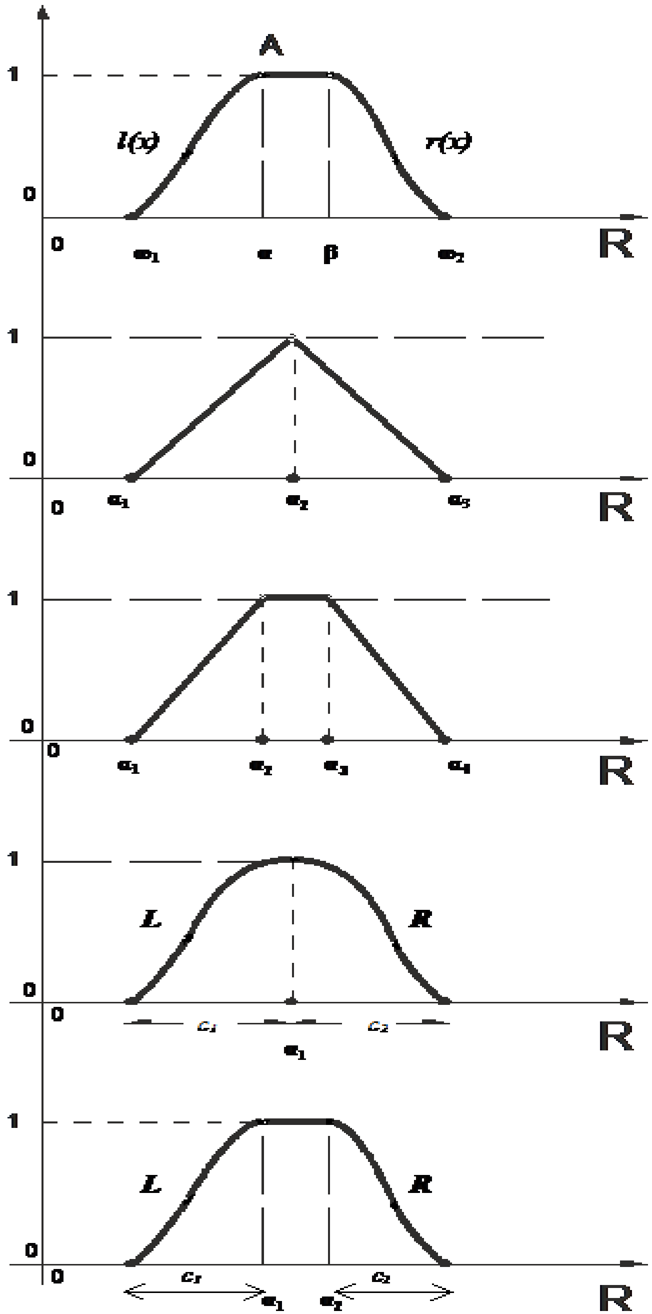
$$\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2 . \tag{2.18}$$

Ως ημιπλάτος ή ακτίνα του συμμετρικού τριγωνικού αριθμού, ονομάζεται η απόσταση c = $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ *(πολλές φορές το πλάτος συμβολίζεται με w και το κέντρο με a_2 = r).*

Η συνάρτηση συμμετοχής για τους συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς μπορεί να γραφεί ισοδύναμα (2.6):

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & \alpha\nu \;\; x \le r-c \\ 1+\dfrac{x-r}{c} & \alpha\nu \;\; r-c \le x \le r \\ 1+\dfrac{-x+r}{c} & \alpha\nu \;\; r \le x \le r+c \\ 0 & \alpha\nu \;\; x \ge r+c \end{cases} \tag{2.19}$$

Ο παραπάνω ΑΣΤΑ συμβολίζεται και ως $A=\langle r,\ w\rangle_T$



(α). ορισμός ασαφούς αριθμού

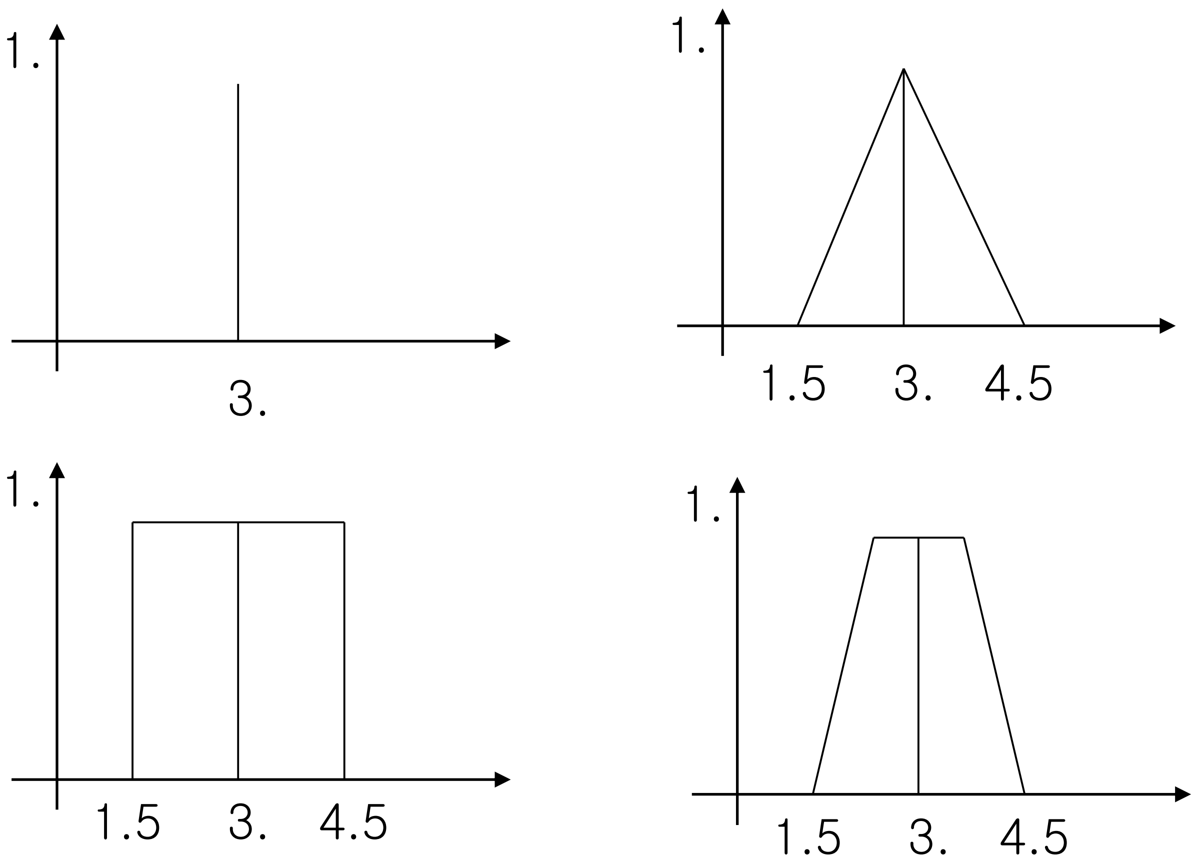
(β). ασαφής τριγωνικός αριθμός

(γ). ασαφής τραπεζοειδής αριθμός

(δ). L – R τριγωνικός αριθμός

(ε). L – R ασαφές διάστημα

Παράδειγμα ασαφών αριθμών



Ορισμός 2.4.5: Ένα *ασαφές διάστημα είναι L - R* - μορφής αν υπάρχουν L – R συναρτήσεις και $\alpha_2, \alpha_3 \in \{-\infty, +\infty\}$, $c_1 \geq 0$ και $c_2 \geq 0$ παράμετροι (ημιπλάτη) ώστε η συνάρτηση συμμετοχής να έχει την παρακάτω μορφή (Σχ2.5.ε):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha_2 - x}{c_1}\right) & \text{αν } x \leq \alpha_2 \\ 1 & \text{αν } \alpha_3 \leq x \leq \alpha_4 \\ R\left(\dfrac{x - \alpha_3}{c_2}\right) & \text{αν } \alpha_3 < x \end{cases} \qquad (2.21.\alpha)$$

Όπου L, R προτείνονται συνεχείς και μη αύξουσες συναρτήσεις με τις παρακάτω επιπλέον ιδιότητες:

$$L : [0,1] \to [0,1] \text{ και} : R\,[0,1] \to [0,1]$$

$$L(0) = R(0) = 1 \qquad (2.21.\beta)$$

$$L(1) = R(1) = 0$$

Παράδειγμα 2.4.1: Ο κλασσικός αριθμός, έστω $r \in M$ *μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω χαρακτηριστική συνάρτηση:*

$$\mu_r(x) = \begin{cases} \mu_r(x) = 1 \ \text{αν} \quad x = r \\ \mu_r(x) = 0 \ \text{αν} \quad x \neq r \end{cases} \tag{2.23}$$

Παράδειγμα 2.4.2: Οι ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί είναι L – R ασαφείς αριθμοί με την εξής συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha_2 - x}{c_1}\right) & \text{αν } x \leq \alpha_2 \\ R\left(\dfrac{x - \alpha_2}{c_2}\right) & \text{αν } \alpha_2 < x \end{cases} \tag{2.24}$$

με τις εξής L, R συναρτήσεις:

$$L(x) = \max\left(0, 1 - x'\right), R(x) = \max\left(0, 1 - x''\right)$$

$$x' = \frac{\alpha_2 - x}{c_1}, \ x'' = \frac{x - \alpha_2}{c_2}$$

όπου $\alpha_1 = \alpha_2 - c_1, \alpha_3 = \alpha_2 + c_2$

Παράδειγμα 2.4.3: Για την περίπτωση των ασαφών συμμετρικά L αριθμών ισχύει:

$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_4 - \alpha_2 = \mathrm{w}(\text{ή } \mathrm{c})$, *όπου c το ημιπλάτος.*

Για την περίπτωση των ασαφών συμμετρικά τριγωνικών αριθμών η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

$$\mu_A(x) = L\left(\frac{\alpha_2 - x}{c}\right) \tag{2.25.α}$$

όπου $L(x) = \max\left(0, 1 - \left|x'\right|\right)$ (2.25.β)

Επέκταση του κανόνα (χρήση **κλασσικών συναρτήσεων** με εισόδους ασαφείς αριθμούς)

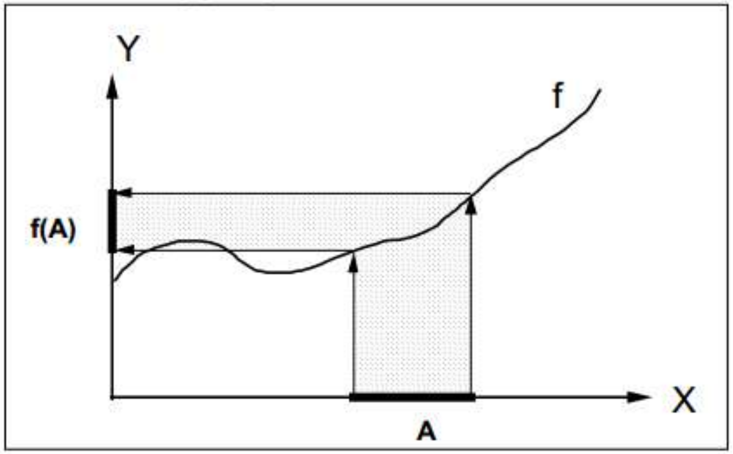
Θεώρημα 2.10.1 (Η επέκταση του κανόνα σε συνάρτηση μιας μεταβλητής): Έστω δύο γενικά σύνολα X και Y. Έστω η συνάρτηση:

$$f : X \to Y$$

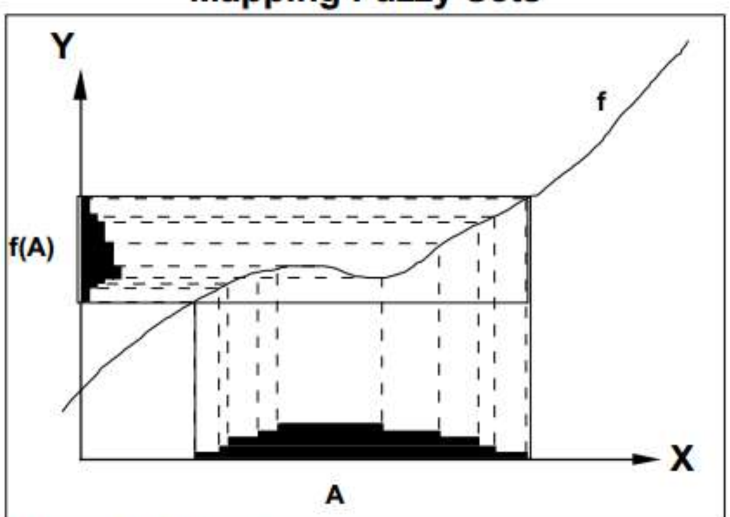
Έστω $\mu_A(x)$ η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου A, τότε η εικόνα του A στο Y θα είναι το ασαφές σύνολο B με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής (π.χ Bardossy and Duckstein 1995):

$$\mu_B(y) = \sup_{x \mid y=f(x)} \mu_A(x) \qquad \text{(I.48)}$$

Mapping Conventional Sets



Mapping Fuzzy Sets



2.3 Extension principle for fuzzy set

$$[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} A(x)$$

for all $A \in \mathcal{F}(X)$ and

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x))$$

for all $B \in \mathcal{F}(Y)$.

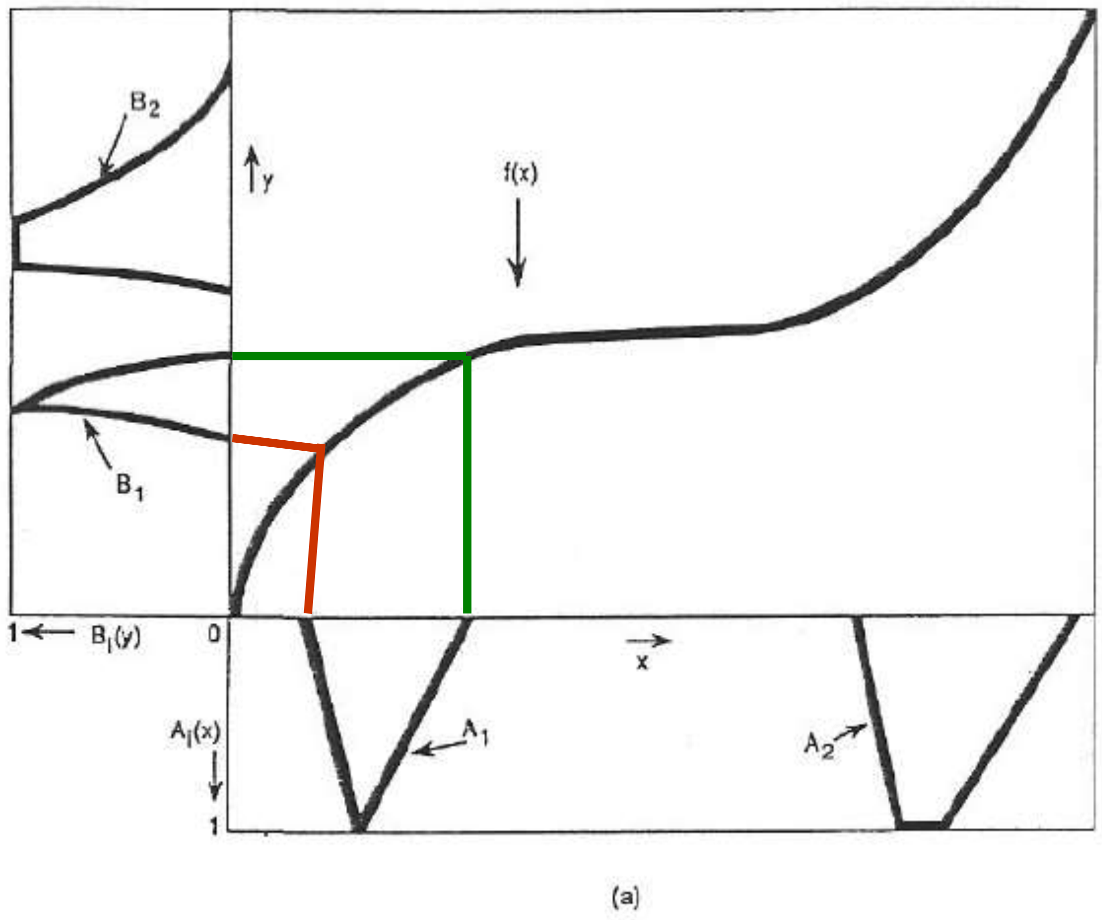


Figure 2.5 Illustration of the extension principle when f is continuous.

Example 12.3. Let a fuzzy set $\underset{\sim}{A}$ be defined on the universe $U = \{1, 2, 3\}$. We wish to map elements of this fuzzy set to another universe, V, under the function

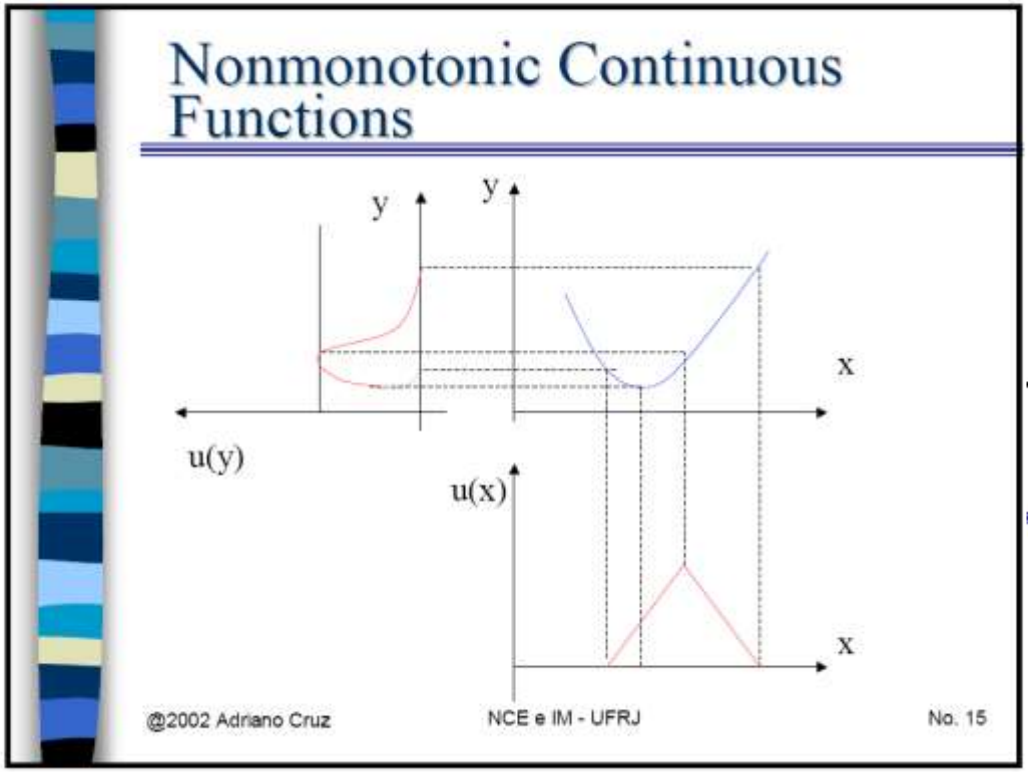
$$v = f(u) = 2u - 1.$$

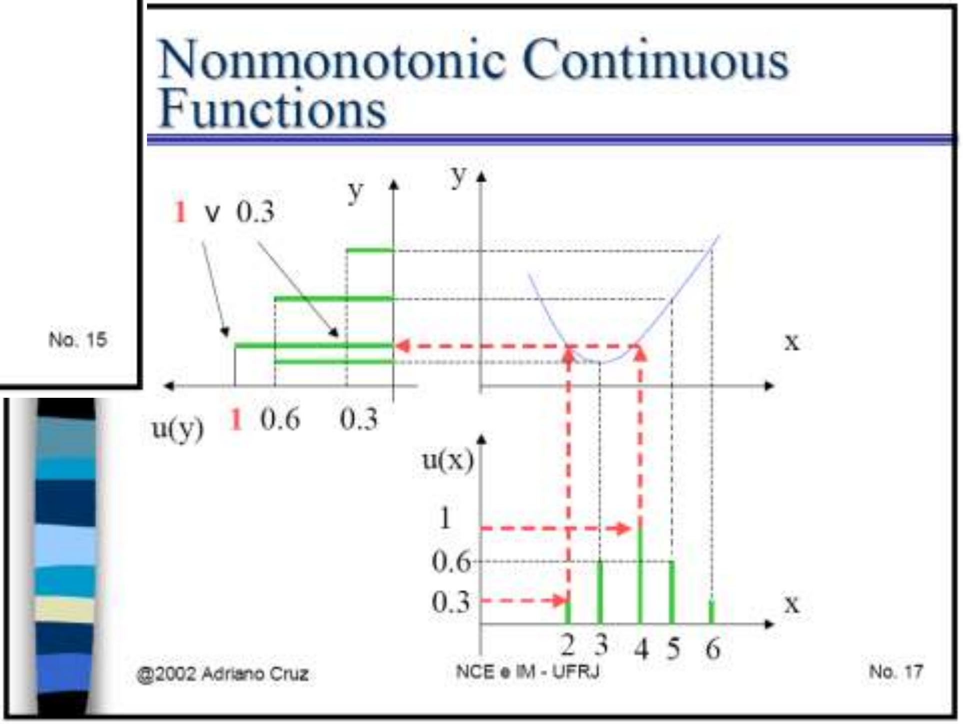
We see that the elements of V are $V = \{1, 3, 5\}$. Suppose the fuzzy set $\underset{\sim}{A}$ is given as

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}\right\}.$$

Then, the fuzzy membership function for $v = f(u) = 2u - 1$ would be

$$f(\underset{\sim}{A}) = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{3} + \frac{0.8}{5}\right\}.$$


Nonmonotonic Continuous Functions
y
y
x
u(y)
u(x)
x
@2002 Adriano Cruz
NCE e IM - UFRJ
No. 15

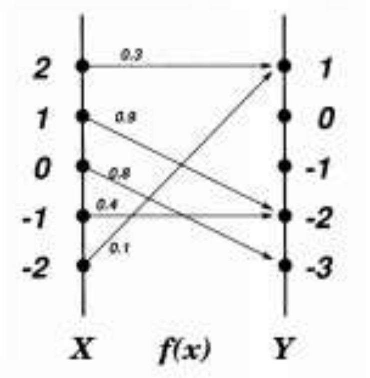

Nonmonotonic Continuous Functions
1 v 0.3
y
y
x
u(y)
1 0.6 0.3
u(x)
1
0.6
0.3
x
2 3 4 5 6
@2002 Adriano Cruz
NCE e IM - UFRJ
No. 17

Extension Principle: Example

Let A=0.1/-2+0.4/-1+0.8/0+0.9/1+0.3/2
And $f(x) = x^2-3$

Upon applying the extension principle,
we have

B = 0.1/1+0.4/-2+0.8/-3+0.9/-2+0.3/1
= 0.8/-3+max(0.4, 0.9)/-2+
max(0.1, 0.3)/1
= 0.8/-3+0.9/-2+0.3/1



Η επέκταση κανόνα στο διάστημα του καρτεσιανού γινομένου με βάση μία κλασσική απεικόνιση, δηλαδή για συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών επιτυγχάνεται με βάση το παρακάτω θεώρημα που είναι γενικότερο του προηγουμένου.

Θεώρημα 2.10.2 (Η επέκταση του κανόνα σε συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών): Έστω το καρτεσιανό γινόμενο X των γενικών συνόλων X = $X_1 \times \ldots \times X_n$. Έστω Y γενικό σύνολο και η απεικόνιση:

$f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$

Η λειτουργία της f επεκτείνεται για το καρτεσιανό γινόμενο των ασαφών υποσύνολων A_1, A_2,...A_n, που είναι υποσύνολα των γενικών συνόλων X_1, ...X_n στο Y. Η εικόνα του καρτεσιανού γινομένου $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ στο Y θα είναι το ασαφές σύνολο B με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής (π.χ. Zimmermann, 1991):

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \\ f^{-1}(y)}} \min\left(\mu_{A_n}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\right) & \text{αν } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{αν } f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases} \tag{I.49}$$

Σε όσα αναφέρθησαν προηγουμένως η συνάρτηση f ήταν μία κλασσική απεικόνιση. Συνεπώς για την περίπτωση όπου η είσοδος είναι ένα κλασσικό σύνολο, η έξοδος θα είναι επίσης κλασσικό σύνολο. Για μία κλασσική απεικόνιση αν η είσοδος είναι ένα ή περισσότερα ασαφή σύνολα η έξοδος θα είναι ένα ασαφές σύνολο.

Αριθμητικές πράξεις με βάση την επέκταση του κανόνα

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} \min[\, A(x), B(y)]$$

– * Κάθε αλγεβρική πράξη

Παράδειγμα
με βάση την **επέκταση του κανόνα**

- $A = \{ 1/2 , 0.5/3\}$, $B = \{ 1/3, \ 0.8/4\}$

- $A+B = \{\min(1, 1)/(2+3),$

  $\max\{\min(1, 0.8)/(2+4),$

  $\min(0.5,1)/(3+3)\},$

  $\min(0.5, 0.8)/(3+4) \}=$

$1/5+0.8/6+0.5/7$

Παράδειγμα

- *A*+*B* = {1/5, 0.8/6, 0.5/7 }

$i) z < 5$

$$\mu_{A(+)B}(z) = 0$$

$ii) z = 5$

$$x + y = 2 + 3$$

$$\mu_A(2) \wedge \mu_B(3) = 1$$

$iii) z = 6$

$$x + y = 3 + 3 \quad \acute{\eta} \quad x + y = 2 + 4$$

$$\mu_A(3) \wedge \mu_B(3) = 0.5$$

$$\mu_A(2) \wedge \mu_B(4) = 0.8 \qquad \mu_{A(+)B}(6) = \bigvee_{\substack{6=3+3 \\ 6=2+4}} (0.5,\ 0.8) = 0.8 \ \ (\max\{0.5, 0.8\}) = 0.8$$

$iv) z = 7$

$$\mu_A(3) \wedge \mu_B(4) = \min(0.5,\ 0.8) = 0.5$$

Πράξεις αριθμών διαστημάτων

- $A = [\, a_1, a_3 \,]$, $B = [\, b_1, b_3 \,]$

$$\text{Πρόσθεση}$$

$$[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3]$$

$$\text{Αφαίρεση}$$

$$[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1]$$

$$\text{Πολλαπλασιασμός}$$

$$[a_1, a_3](\bullet)[b_1, b_3] = [a_1 \bullet b_1 \wedge a_1 \bullet b_3 \wedge a_3 \bullet b_1 \wedge a_3 \bullet b_3, \quad a_1 \bullet b_1 \vee a_1 \bullet b_3 \vee a_3 \bullet b_1 \vee a_3 \bullet b_3]$$

$$\text{διαίρεση}$$

$$[a_1, a_3](/)[b_1, b_3] = [a_1 / b_1 \wedge a_1 / b_3 \wedge a_3 / b_1 \wedge a_3 / b_3, \quad a_1 / b_1 \vee a_1 / b_3 \vee a_3 / b_1 \vee a_3 / b_3]$$

$$execpt \;\; b_1 = b_3 = 0$$

Παράδειγμα

- πρόσθεση

  [2,5]+[1,3]=[3,8]   [0,1]+[-6,5]=[-6,6]

- αφαίρεση

  [2,5]-[1,3]=[-1,4]   [0,1]-[-6,5]=[-5,7]

- πολλαπλασιασμός

  [-1,1]*[-2,-0.5]=[-2,2]   [3,4]*[2,2]=[6,8]

- διαίρεση

  [-1,1]/[-2,-0.5]=[-2,2]   [4,10]*[1,2]=[2,10]

Αριθμητικές πράξεις ασαφών αριθμών με διάστημα

- Κλειδί: α-τομή

$$^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B \quad \forall \in (0,1].$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \ * = /,\ 0 \notin {}^{\alpha}B \ \forall \ \alpha \in (0,1].$$

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}(A * B)$$

- Αποτέλεσμα Ασαφής αριθμός

Τομή ασαφών συνόλων (figure from Klir&Yuan)

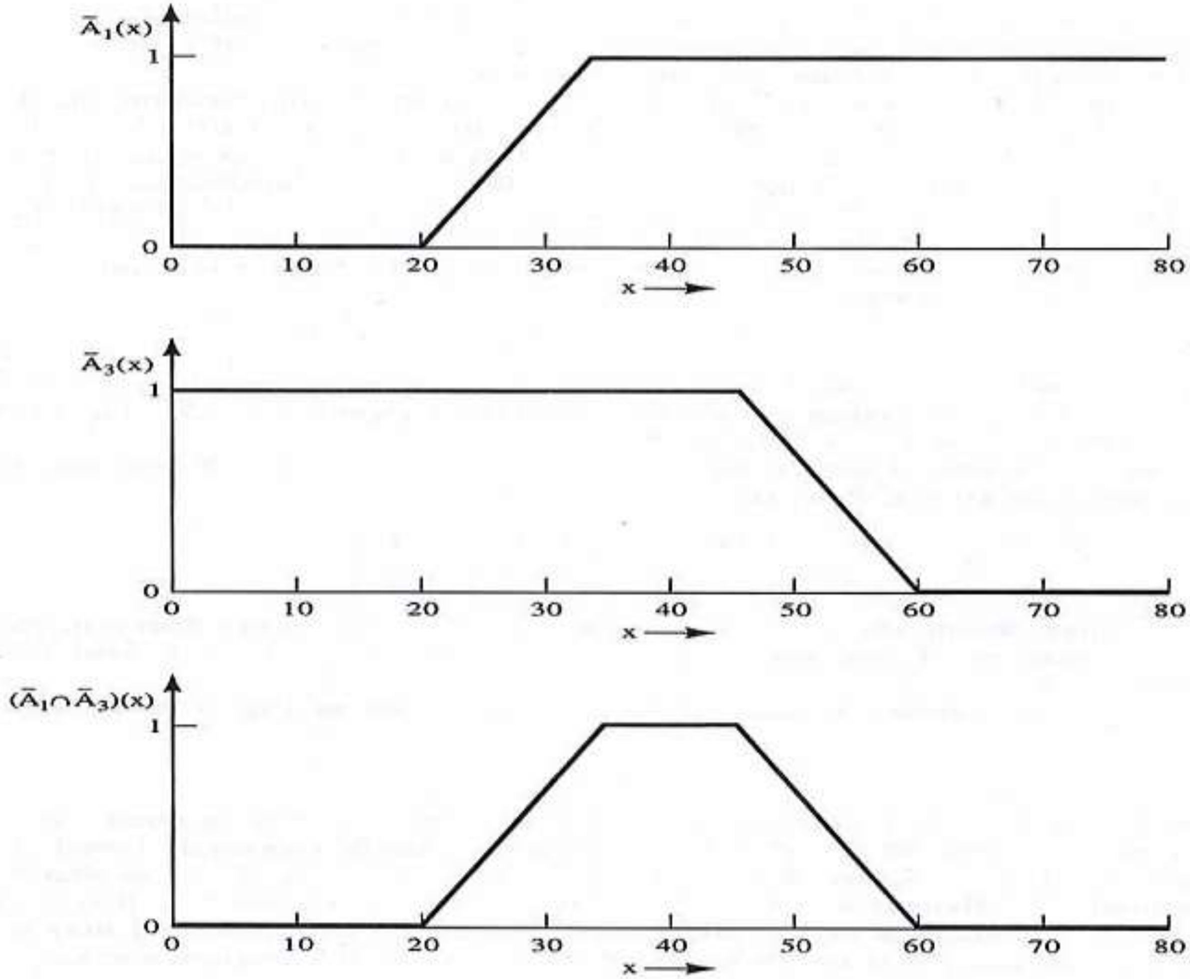


Illustration of standard operations on fuzzy sets (A_1, A_2, A_3).

Ένωση και συμπλήρωμα (figure from Klir&Yuan)

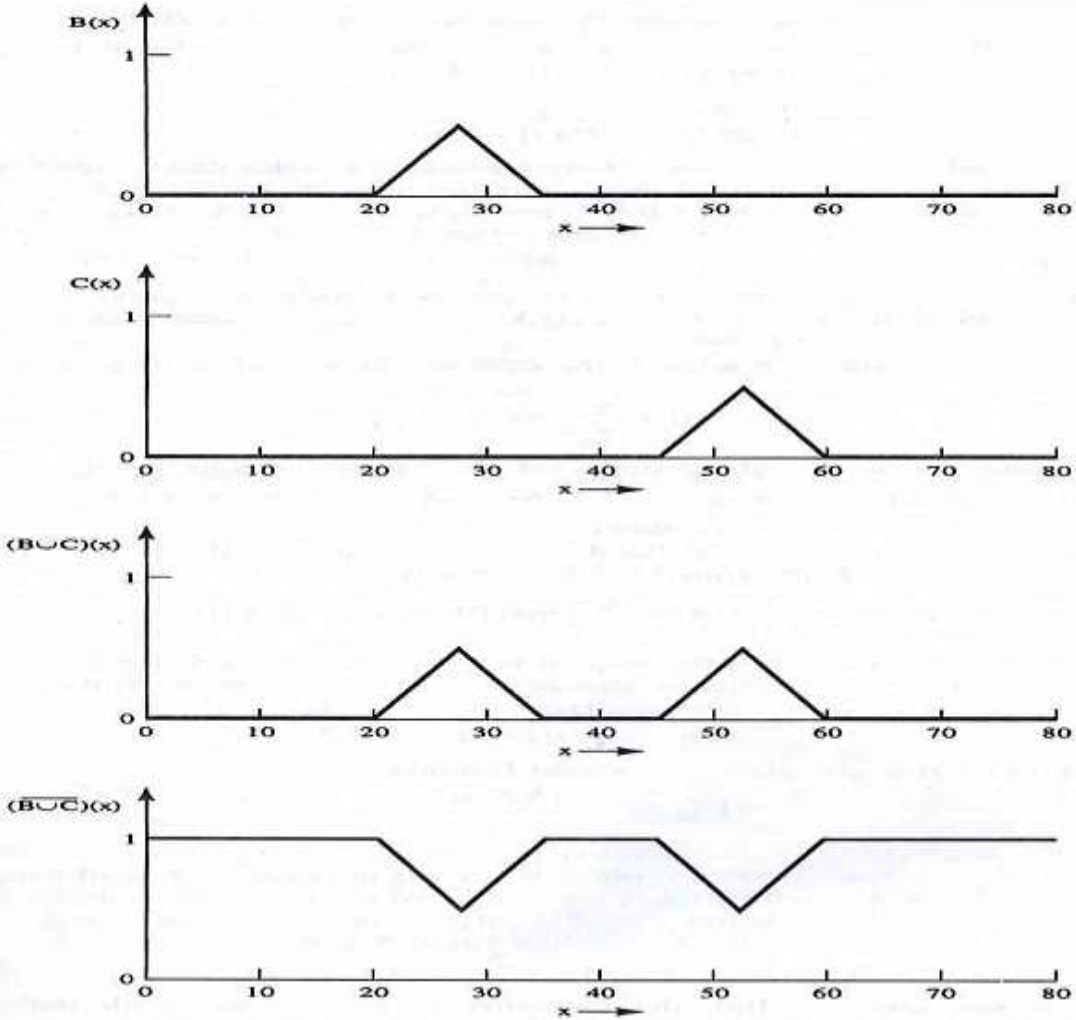


Illustration of standard operation on fuzzy sets $B = A_1 \cap A_2$ and $C = A_2 \cap A_3$

C. Πρόσθεση και αφαίρεση ασαφών αριθμών (figure from Klir&Yuan)

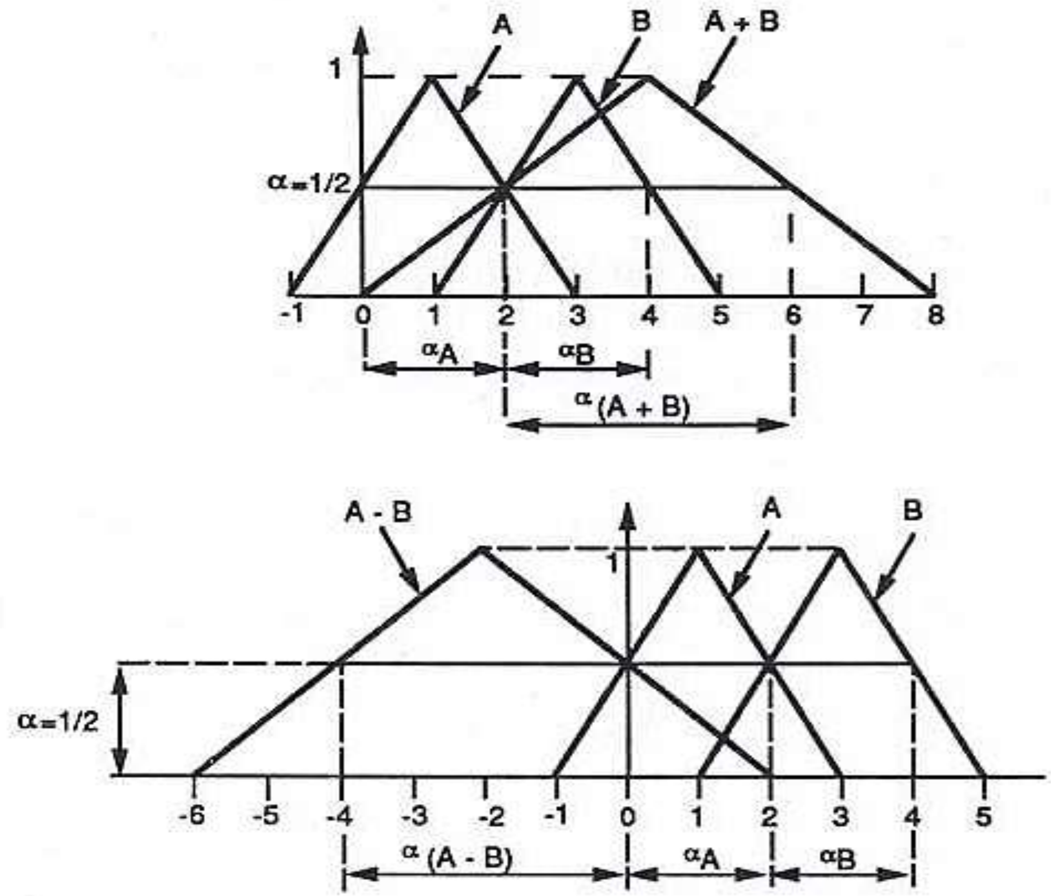
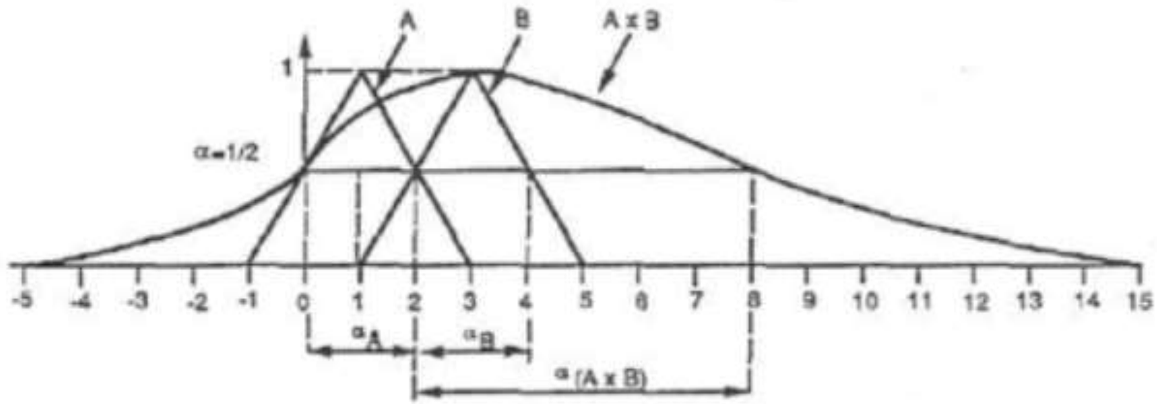
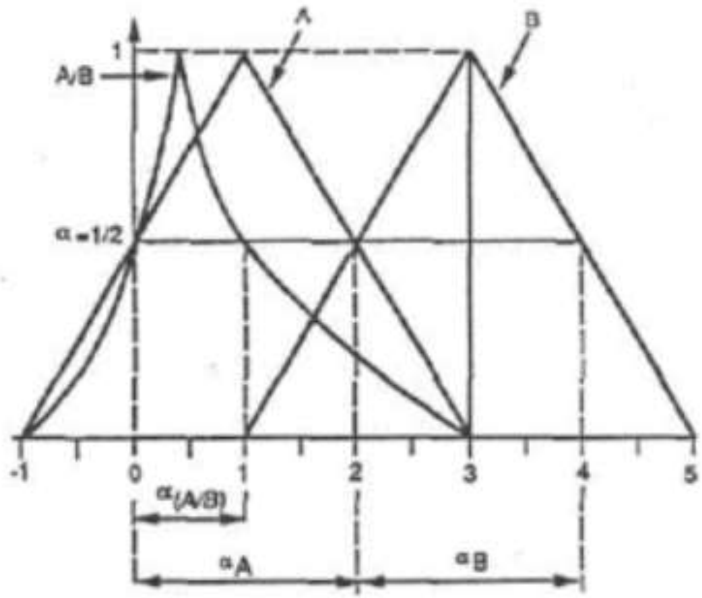


Illustration of arithmetic operations on fuzzy numbers.


A
B
A x B
1
α=1/2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
αA
αB
α(A x B)


A
B
1
A/B
α=1/2
-1 0 1 2 3 4 5
α(A/B)
αA
αB

Θέματα προς συζήτηση