Ασαφής γραμμική παλινδρόμηση

Μ.Σπηλιώτης

Παλινδρόμηση

- Κλασσική γραμμική παλινδρόμηση
- Ασαφής γραμμική παλινδρόμηση
- Επέκταση σε μη γραμμική παλινδρόμηση
- Παλινδρόμηση με ασαφή δεδομένα
- Παλινδρόμηση και κριτήριο παλινδρόμησης (συνάρτηση στόχου)
- Παλινδρόμηση και δείκτες αξιολόγησης

Παλινδρόμηση

- Παλινδρόμηση: **μοντέλου μαύρου κουτιού**
  - Μπορεί όμως να συνεπικουρηθεί, ως προς τη διατύπωσή της από μοντέλο φυσικής βάσης
- Δεν υποδηλώνει απαραίτητα **αιτιότητα**: π.χ. παράδειγμα πωλήσεων ομπρελών και απορροής

Γραμμική παλινδρόμηση

Η ανάλυση της γραμμικής παλινδρόμησης είναι μια μοντελοποίηση της σχέσης μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών X με την εξαρτημένη μεταβλητή Y σε μία γραμμική σχέση.

Είναι μια μεθοδολογία που διερευνά τη συσχέτιση δύο (ή/και περισσότερων) μεταβλητών ως προς το πώς (θετική ή αρνητική) και το πόσο

Τα λαμβανόμενα δεδομένα είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και το εξαγόμενο του μοντέλου της παλινδρόμησης θα πρέπει να προσεγγίζει τα λαμβανόμενα εξαγόμενα σύμφωνα με κριτήρια που ορίζει ο αναλυτής.

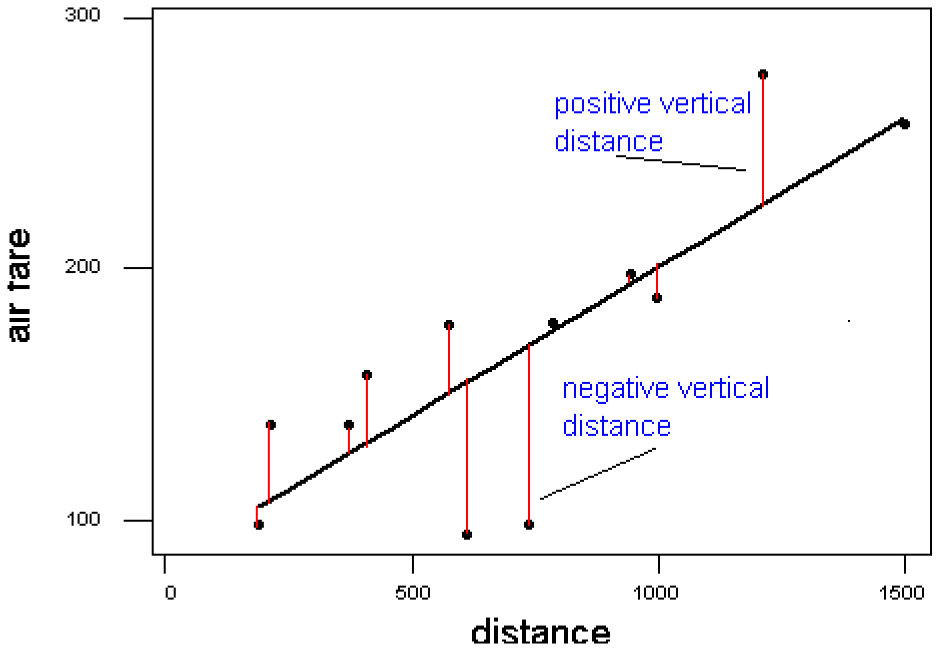
Επιλογή γραμμής παλινδρόμησης

- Σφάλμα κατακόρυφη απόσταση= (Y –Y’)
  - Θετικό ή αρνητικό
- Γραμμή παλινδρόμησης,

$Y' = \beta_0 + \beta_1 X$,

ώστε

$\sum(Y - Y')^2$, ελάχιστο



Γραμμική παλινδρόμηση, ασαφής επέκταση

- Η ανάλυση της γραμμικής παλινδρόμησης μοντελοποιήση της σχέσης μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών με την εξαρτημένη μεταβλητή σε μία γραμμική σχέση.
- Τα λαμβανόμενα δεδομένα είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και το εξαγόμενο του μοντέλου της παλινδρόμησης θα πρέπει να προσεγγίζει τα λαμβανόμενα εξαγόμενα σύμφωνα με κριτήρια που ορίζει ο αναλυτής.

- Στο μοντέλο της ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης ή μοντέλο παλινδρόμησης δυνατοτήτων η διαφορά ανάμεσα στα δεδομένα και τις πραγματικές τιμές υποτίθεται ότι είναι μια αμφιβολία που οφείλεται στη δομή του συστήματος και το προτεινόμενο μοντέλο μεταφέρει την αμφιβολία αυτή πίσω στους συντελεστές του ή με άλλα λόγια η αδυναμία μας να κατασκευάσουμε μια ακριβή σχέση εισάγεται άμεσα στο μοντέλο πάνω στις ασαφείς παραμέτρους. Με βάση τον παραπάνω συλλογισμό επιλέγεται οι συντελεστές για τις ανεξάρτητες μεταβλητές να είναι ασαφείς αριθμοί.

ασαφής γραμμική παλινδρόμηση (fuzzy regression)

•Οι συντελεστές α_i των ανεξάρτητων μεταβλητών X_i θεωρούνται ως ασαφείς συμμετρικοί τριγωνικοί αριθμοί (ΑΣΤΑ)

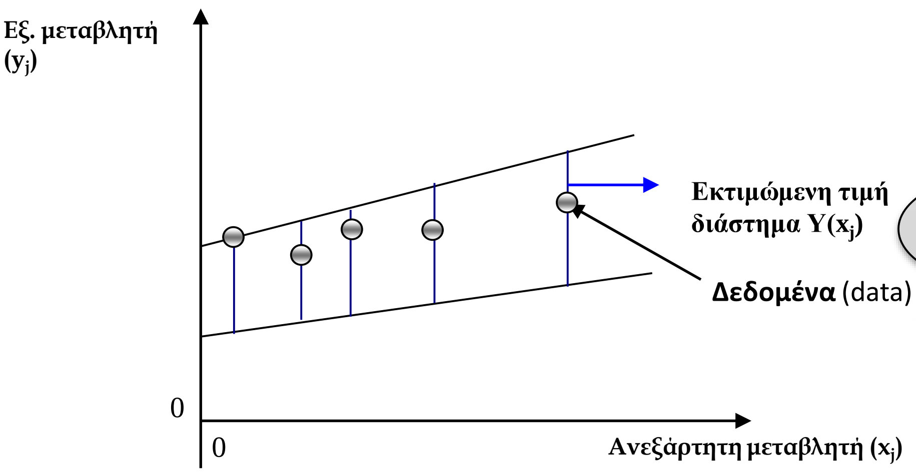
•Η έννοια του σφάλματος δεν υφίσταται, καθώς παράγεται μια ασαφής ζώνη που περικλείει όλα τα εξαγόμενα Y_j του μοντέλου, ήτοι η εξαρτημένη μεταβλητή Y_j είναι ασαφής αριθμός :

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X$$

όπου x= ανεξάρτητη μεταβλητή (συμβατικός αριθμός)

$\tilde{A}_1$= ασαφής συντελεστής

$\tilde{A}_o$=σταθερός όρος



Σχήμα 5.1: Γραμμικό μοντέλο $Y(x_j)$ διαστημάτων.

Το γραμμικό μοντέλο διαστημάτων προσδιορίζεται θεωρώντας τους συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών αριθμούς διαστήματα

Ασαφή γραμμική παλινδρόμηση

- Συμβατικοί αριθμοί ως δεδομένα
- Συμβατικοί και ασαφείς αριθμοί ως δεδομένα
- Ασαφείς αριθμοί ως δεδομένα
- Διάφορα μοντέλα πιο κλασσικό του Tanaka et al., 1987:
  - Ακόμη και για το γραμμικό μοντέλο καταλήγει σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (βελτιστοποίησης με περιορισμούς)

Ασαφή γραμμική παλινδρόμηση του Tanaka

- Ένα ασαφές μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης έχει τη μορφή σύμφωνα με τους Tanaka et al., 1982:
- $\mathbf{Y = A_o + A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_nX_n}$
- Όπου A_i είναι ένας L - ασαφής αριθμός (δηλαδή συμμετρικός ασαφής αριθμός).
- Στο μοντέλο της ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης η διαφορά ανάμεσα στα δεδομένα και τις πραγματικές τιμές υποτίθεται ότι είναι μια αμφιβολία που οφείλεται στη δομή του συστήματος και το προτεινόμενο μοντέλο μεταφέρει την αμφιβολία αυτή πίσω στους συντελεστές του ή με άλλα λόγια η αδυναμία μας να κατασκευάσουμε μια ακριβή σχέση εισάγεται άμεσα στο μοντέλο πάνω στις ασαφείς παραμέτρους

Ασαφείς συμμετρικοί αριθμοί

Επιλέγονται ασαφείς L αριθμοί (δηλαδή L – R συμμετρικοί αριθμοί) που έχουν την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_A(x) = L\left(\frac{x-\mathrm{a}}{c}\right), c > 0 \qquad (5.7)$$

Οι αριθμοί a, c είναι το κέντρο και ακτίνα του ασαφούς αριθμού, αντίστοιχα. Συνήθης εφαρμογή έχει η εξής L συνάρτηση: L(x)=max{0, 1-|x|} που οδηγεί στους συμμετρικούς τριγωνικούς αριθμούς και γραμμικοποιεί την τελική κατάληξη της παλινδρόμησης.

I.2.2 Πράξεις στους L-R ασαφείς αριθμούς

Είναι προφανές ότι δεν είναι υπολογιστικά απλό να ακολουθείται ο ορισμός για τις πράξεις μεταξύ ασαφών αριθμών. Για ειδικές περιπτώσεις ασαφών αριθμών, όπως οι L- R ασαφείς αριθμοί, έχουν προταθεί διάφορες σχέσεις που πολλές φορές είναι προσεγγιστικές. Παρατίθενται παρακάτω οι πιο κλασσικές εξισώσεις, που έχουν προταθεί για τους L –R ασαφείς αριθμούς από τους Dubois and Prade, 1980.

Έστω A,B LR ασαφείς αριθμοί όπου m η κεντρική τιμή και α, β το αριστερό και το δεξί ημιπλάτος του LR ασαφούς αριθμού A. Όμοια για τον ασαφή αριθμό B n, γ, δ. Τότε ορίζονται οι παρακάτω πράξεις των ασαφών αριθμών:

Πρόσθεση μεταξύ των ασαφών αριθμών A,B:

$$(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} + (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} = (m+n,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\delta)_{LR}$$

Αφαίρεση μεταξύ των ασαφών αριθμών A,B:

$$(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} - (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} = (m-n,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma)_{LR}$$

Πολλαπλασιασμός μεταξύ των ασαφών αριθμών A,B:

Διακρίνω περιπτώσεις:

1. $m, n \geq 0$, τότε

$$(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \otimes (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx (m \cdot n,\ m\gamma + n\alpha,\ m\delta + n\beta)_{LR} \quad \text{(I.}$$

2. $m, n < 0$, τότε

$$(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \otimes (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx (m \cdot n,\ -m\delta - n\beta,\ -m\gamma + n\alpha)_{LR} \quad \text{(I.}$$

3. $m<0$, $n \geq 0$, τότε

$$(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \otimes (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx (m \cdot n,\ n\alpha - m\delta,\ n\beta - m\gamma)_{LR} \quad \text{(I.}$$

Πολλαπλασιασμός κλασσικού αριθμού λ με ασαφή αριθμό.

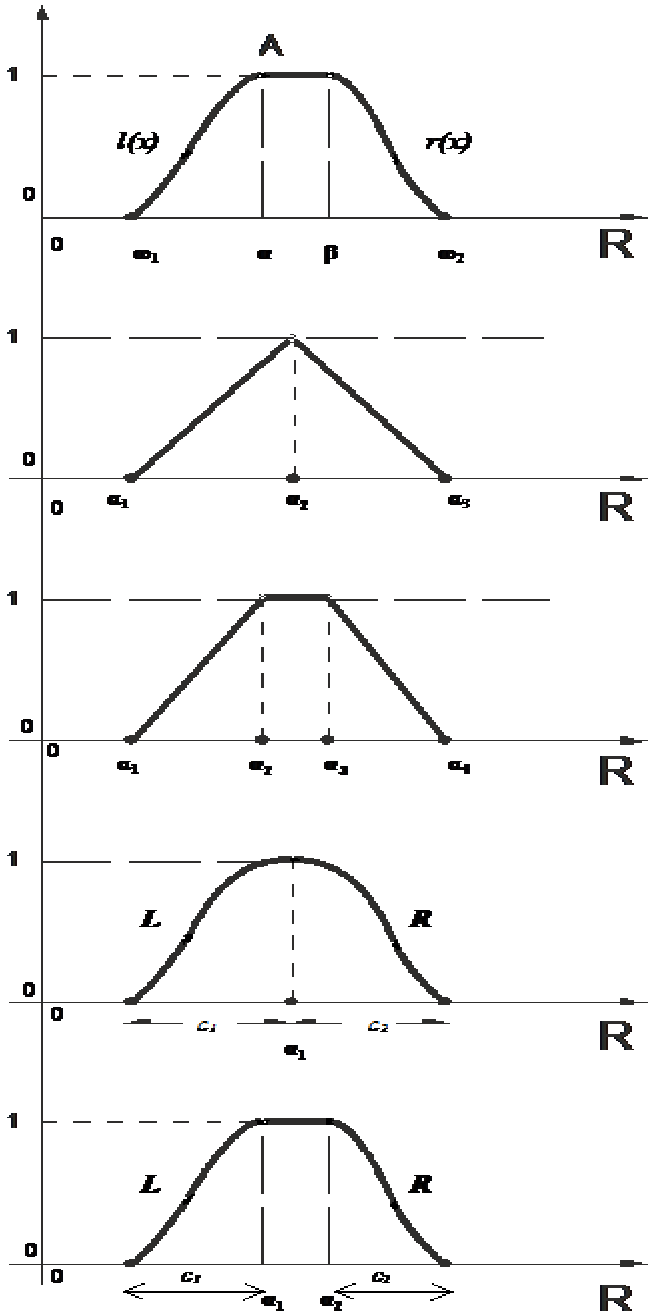
Διακρίνω περιπτώσεις:

1. Αν $\lambda \geq 0$, τότε

$$\lambda \otimes (m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} = (\lambda m,\ \lambda\alpha,\ \lambda\beta)_{LR} \quad \text{(I.}$$

2. Αν $\lambda < 0$, τότε

$$\lambda \otimes (m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} = (\lambda m,\ -\lambda\alpha,\ -\lambda\beta)_{LR} \quad \text{(I.}$$



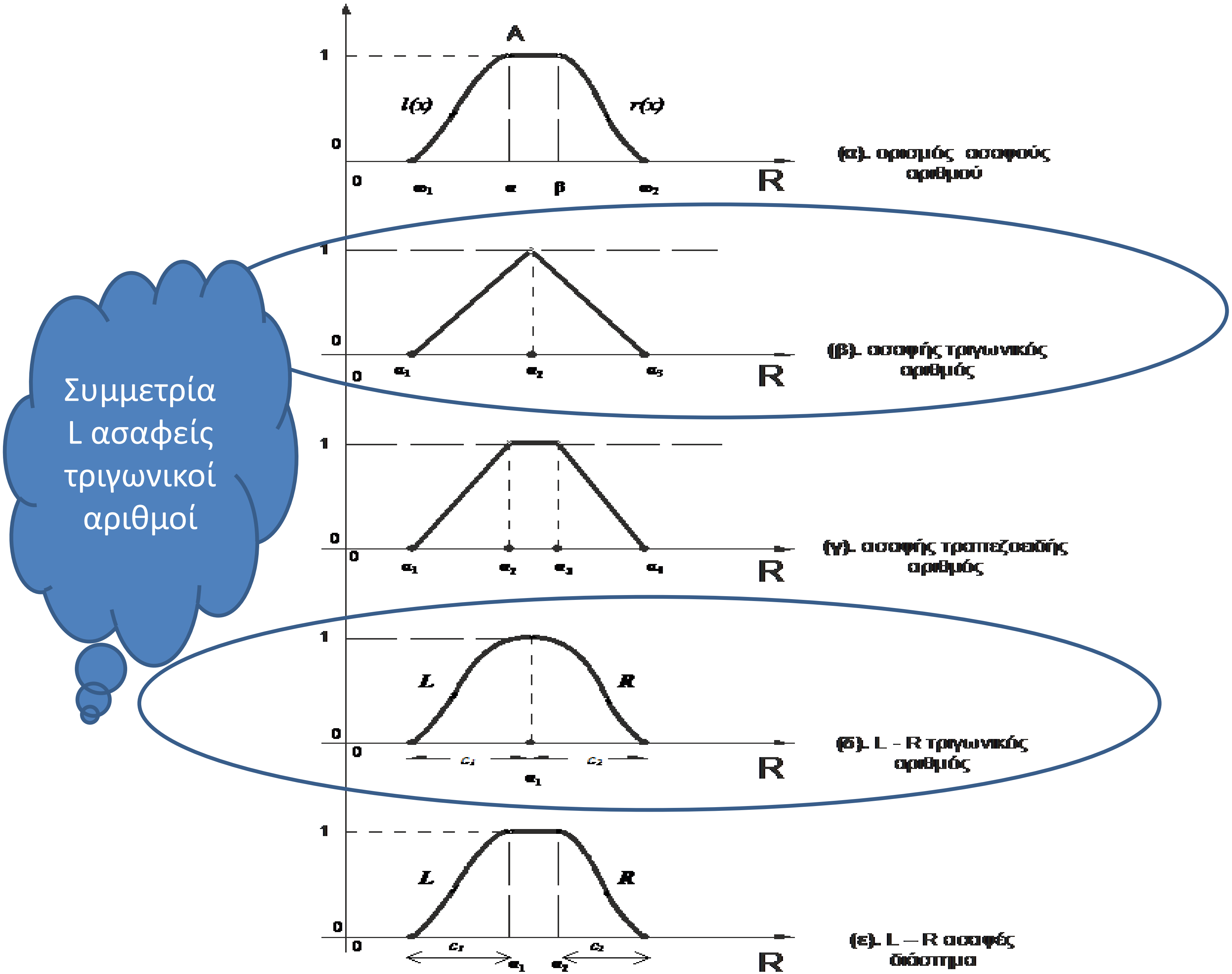
(α). ορισμός ασαφούς αριθμού

(β). ασαφής τριγωνικός αριθμός

(γ). ασαφής τραπεζοειδής αριθμός

(δ). L - R τριγωνικός αριθμός

(ε). L – R ασαφές διάστημα


Συμμετρία
L ασαφείς
τριγωνικοί
αριθμοί
(α). ορισμός ασαφούς αριθμού
(β). ασαφής τριγωνικός αριθμός
(γ). ασαφής τραπεζοειδής αριθμός
(δ). L - R τριγωνικός αριθμός
(ε). L – R ασαφές διάστημα

L-ΑΣΑΦΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

L Φθίνουσα συνάρτησης κανονικοποιημένης απόστασης από κεντρική τιμή

- Εξ’ ορισμού συμμετρικοί

Για την περίπτωση των ασαφών L- αριθμών η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

$$\mu_A(x) = L\left(\frac{\alpha_2 - x}{c}\right) \qquad (2.25.\alpha)$$

όπου:

L(α)=L(-α)

$$L:[0,1] \to [0,1] \qquad (2.21.\beta)$$

$$L(0) = 1$$

και L(α) αυστηρώς φθίνουσα συνάρτηση για μη αρνητικές τιμές

Για την περίπτωση των ασαφών συμμετρικά αριθμών η συνάρτηση συμμετοχής είναι:

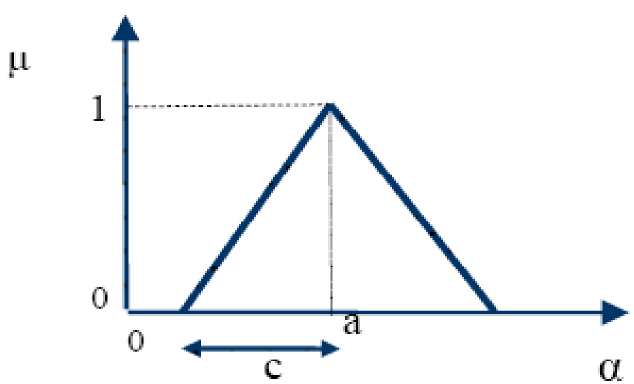
$$\mu_A(x) = L\left(\frac{\alpha_2 - x}{c}\right) \qquad (2.25.\alpha)$$

όπου $L(x) = \max\left(0, 1 - |x'|\right)$ (2.25.β)

Ασαφής συμμετρικά τριγωνικός αριθμός (ΑΣΤΑ)

$$\mu_A(a)=\begin{cases}1-\dfrac{|a-a_i|}{c_i}, & if \quad a_i-c_i\le a\le a_i+c_i\\ 0\end{cases}$$

$$\pi.\chi.\mu_A(a_i+c_i)=1-\frac{|a_i+c_i-a_i|}{c_i}=1-\frac{|+c_i|}{c_i}=1-1=0$$



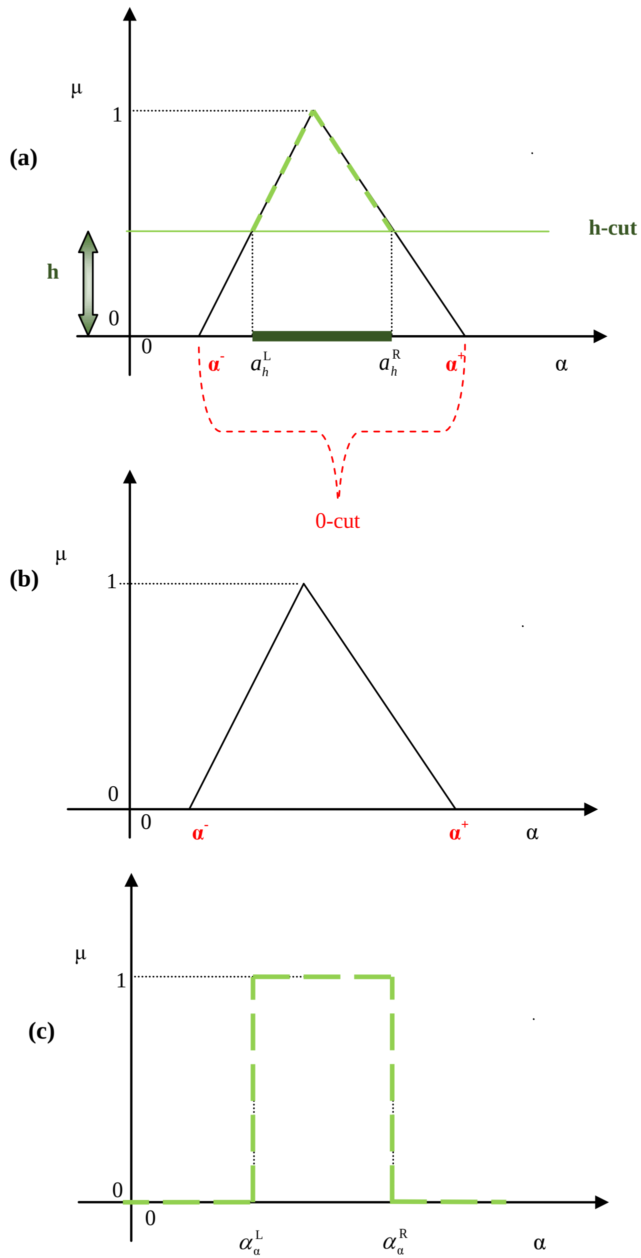
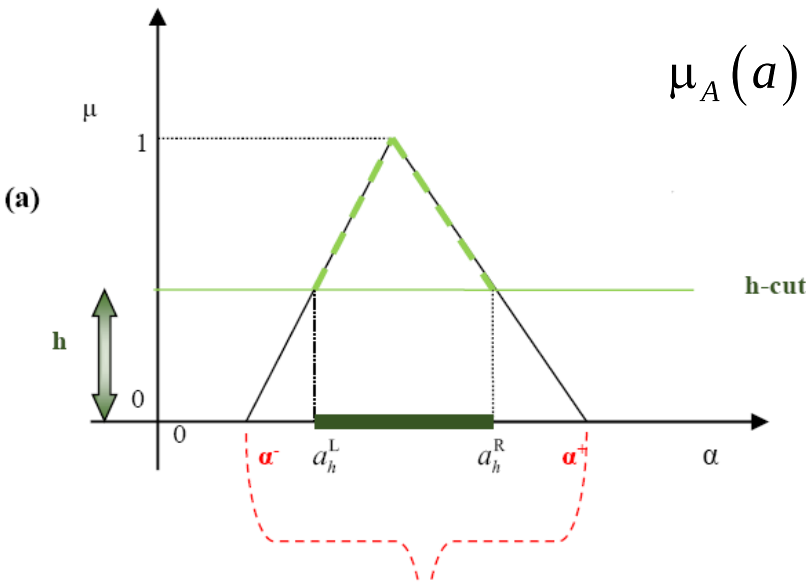


Figure 5: (a) triangular fuzzy number, its h-cut and zero-cut, (b) the fuzzy set alone, (c) the h-cut which is a crisp set.

h-cut ασαφών ΑΣΤΑ



$$\mu_A(a) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|a - a_j|}{c_i}, & if \quad a_j - c_i \le a \le a_j + c_i \\ 0 & \end{cases}$$

$$1 - \frac{\left|a_i^{L \ or \ R} - a_j\right|}{c_i} = h \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{-a_i^L + a_j}{c_i} = h \Leftrightarrow a_i^L = a_j - c_i(1-h), & a_i^L - a_j \le 0 \\ 1 - \dfrac{a_i^R - a_j}{c_i} = h \Leftrightarrow \quad a_i^R = a_j + c_i(1-h), & a_i^R - a_j \ge 0 \end{cases}$$

Προσδιορισμός μορφής: ασαφής αριθμητική

- Πολλαπλασιασμός ασαφούς αριθμού με συμβατικό αριθμό
- Πρόσθεση ασαφών αριθμών

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις για τους L ασαφείς αριθμούς ως συντελεστές, με βάση την επέκταση του κανόνα, ο $\tilde{Y}_j$ είναι ένας ασαφής L αριθμός με κέντρο:

$$y_j = a_0 + a_1 x_{1j} + \ldots + a_n x_{nj} \tag{5.8}$$

και ακτίνα:

$$c_j = c_0 + c_1 \left| x_{1j} \right| + \ldots + c_n \left| x_{nj} \right| \tag{5.9}$$

Μορφή ασαφούς εξαγόμενου ---ΑΣΤΑ

Μία ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\tilde{Y}_j = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_j, \quad \tilde{A}_0 = \left(a_0, c_c\right) \text{και } \tilde{A}_1 = \left(a_1, c_1\right)$$

$$\tilde{Y}_j = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_j = \left(a_0, c_c\right) + \left(a_1, c_1\right) x_j = \left(a_0, c_c\right) + \left(x_j \cdot a_1, \left|x_j\right| c_1\right) =$$

$$= \left(a_0 + x_j \cdot a_1, c_c + \left|x_j\right| c_1\right)$$

… σε αντίθεση με την πιθανότητες

- Π.χ. άθροισμα κανονικών μεταβλητών

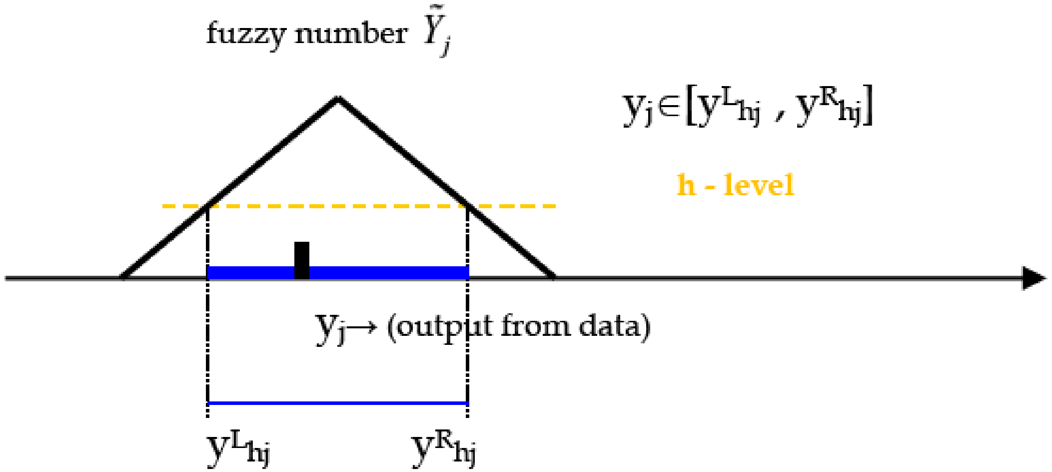
Comparing a possibilistic linear equation to a probabilistic linear equation whose coefficients are independent Gaussian distributions $N(e_i, \sigma_i)$, we have the following symbolical expressions:

$$\begin{aligned} &\text{Possibility:} \quad Y = \sum_i (\alpha_i, c_i)_L x_i = (\alpha^t x, c^t |x|)_L, \\ &\text{Probability:} \quad y = \sum_i N(e_i, \sigma_i^2) x_i = N(e^t x, (\sigma^2)^t x^2), \end{aligned} \tag{16}$$

where $(\sigma^2)^t x^2 = \sum_i \sigma_i^2 x_i^2$.

The possibilistic output Y is calculated by a possibility measure, while the probabilistic output y is calculated by a probability measure. A similar discussion is found in [9]. Linear systems with symmetric fuzzy numbers defined by $L(x)$ can be calculated by (15).

Περικλεισμός, ΑΣΤΑ



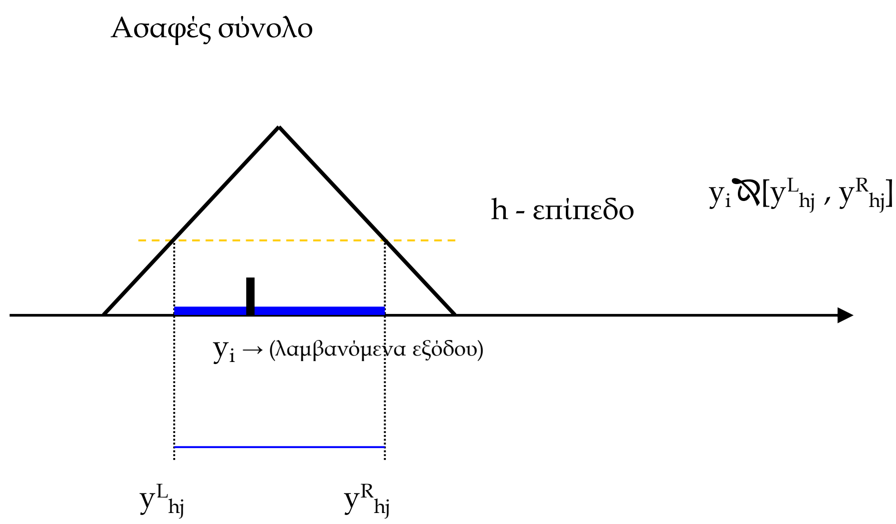
Μία ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\left(a_1 x_j + a_0\right) - (1-h)\left(c_1 \left|x_j\right| + c_0\right) \le y_j \le \left(a_1 x_j + a_0\right) + (1-h)\left(c_1 \left|x_j\right| + c_0\right),\ j = 1,\dots,m$$

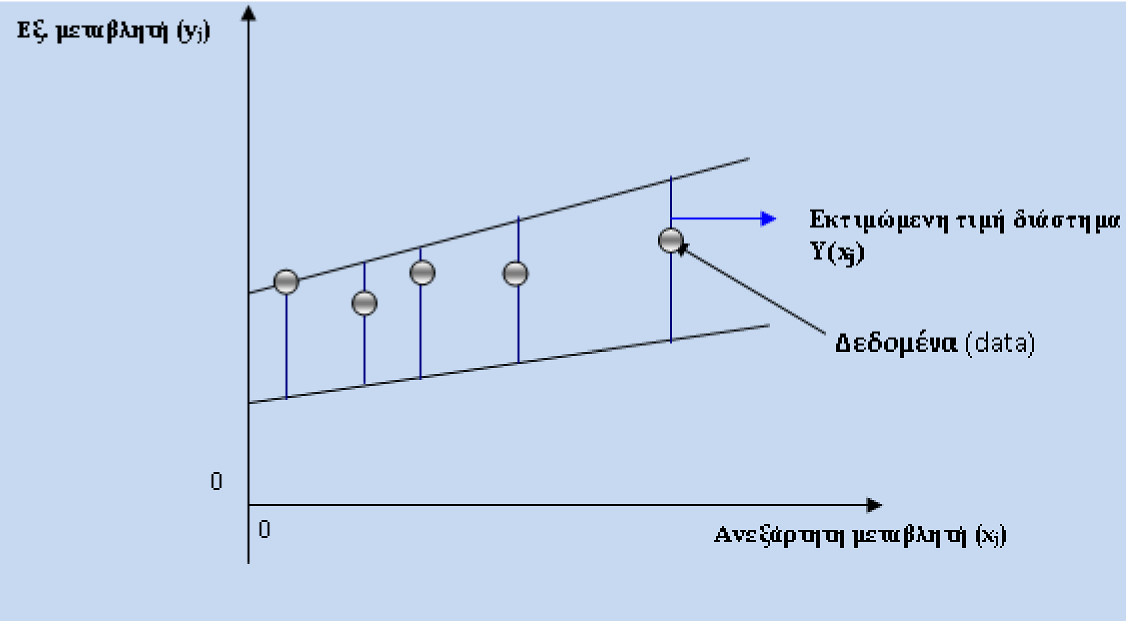
Για n ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, x_{ij} - (1-h)\sum_{i=0}^{n} c_i \mid x_{ij} \mid = y_h^L \le y_j$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} + (1-h)\sum_{i=0}^{n} c_i \mid x_{ij} \mid = y_h^R \ge y_j$$



Σχήμα 5.2: Αναπαράσταση των περιορισμών.



Σχήμα 5.1: Γραμμικό μοντέλο $Y(x_i)$ διαστημάτων.

Περικλυσμός στην ασαφή παλινδρόμηση, ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

- **Τα δεδομένα θα πρέπει (όλα) να περικλείονται στο ασαφές μοντέλο για ένα επιλεγέν επίπεδο h (συνήθως h =0)**

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} - |L^{-1}(h)| \sum_{i=0}^{n} c_i |x_{ij}| = y_h^L \le y_j \\
&\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} + |L^{-1}(h)| \sum_{i=0}^{n} c_i |x_{ij}| = y_h^R \ge y_j
\end{aligned} \tag{5.14}$$

όπου $c_i \geq 0$, για $i = 0, 1, \ldots, n$ και $L^{-1}(x)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $L(x)$.

Περιορισμοί στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης

Στην περίπτωση που $L(x) = \max\{0, 1-|x|\}$, δηλαδή στην περίπτωση όπου οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών επιλεγούν ως ασαφείς συμμετρικά τριγωνικοί αριθμοί,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} - (1-h) \sum_{i=0}^{n} c_i |x_{ij}| = y_h^L \le y_j \\
&\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} + (1-h) \sum_{i=0}^{n} c_i |x_{ij}| = y_h^R \ge y_j
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Συνάρτηση συμμετοχής

Η συνάρτηση συμμετοχής του $\tilde{Y}_j$ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\mu_Y(y_j) = L\left[\frac{y_j - (\alpha_o + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ij})}{c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, x_{ij} \,|}\right] >= h \qquad (5.10)$$

Προσοχή: x_{ij} , *j* δεδομένο, *i* μεταβλητή (δεδομένα εισαγόμενα) και y_j το αντίστοιχο δεδομένο εξαγόμενο

Πίνακας 5.1: Τακτοποίηση των δεδομένων για την ασαφή γραμμική παλινδρόμηση.

Δείγμα	Εξ. Μεταβλητή	Ανεξάρτητες μεταβλητές
1	y_1	$x_{11}, x_{21},\ldots,x_{n1}$
2	y_2	$x_{12}, x_{22},\ldots,x_{n2}$
.	.	.
m	y_m	$x_{1m}, x_{2m},\ldots, x_{nm}$

Σε άλλη ορθογραφία…

- Τα δεδομένα πρέπει να περικλείονται από την επιλεχθείσα h-τομή
- Άρα για τα δεδομένα θα πρέπει η συνάρτηση συμμετοχής να είναι μεγαλύτερη του h, ώστε το σημείο y_j να ανήκει στη **h – τομή**

$$\mu_Y(y_j) = L\left[\frac{y_j - (a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij})}{c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, x_{ij} \,|}\right] \geq h$$

Έλεγχος για κάθε ζεύγος δεδομένων j

Συνάρτηση στόχου

- Τι ελαχιστοποιώ? Την ασάφεια

$$J = \min\left\{ mc_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_i \left| x_{ij} \right| \right\}$$

Σχόλιο: Η συνάρτηση στόχου ισούται με το ήμισυ του αθροίσματος των διαφορών του άνω ορίου με του κάτω ορίου του $\tilde{Y}_j^h$ για κάθε *j*:

$$1/2\left(\sum_{j=1}^{m} (Y_j^R - Y_j^L) \right) = \left\{ mc_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_i \left| x_{ij} \right| \right\} \qquad (5.16)$$

Η μαθηματική έκφραση της συνάρτησης στόχου και των περιορισμών (στην περίπτωση που ως ασαφείς συντελεστές χρησιμοποιούνται **ασαφείς συμμετρικοί τριγωνικοί αριθμοί)** είναι:

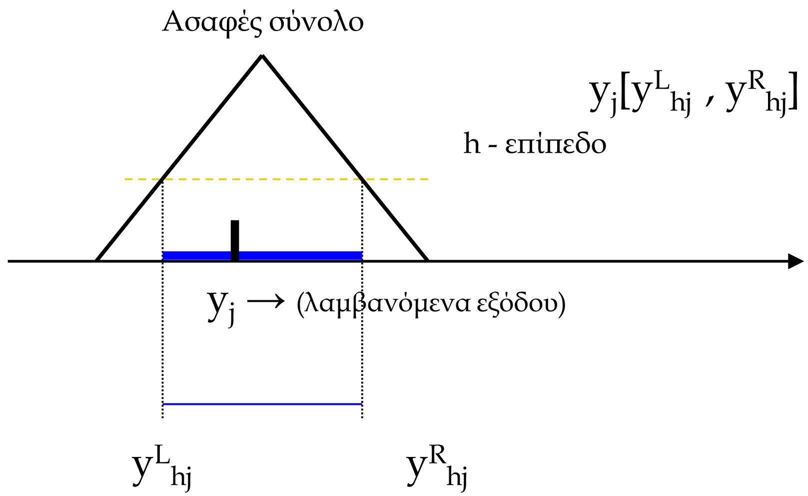
1) $$\min\left\{mc_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_i \left|x_{ij}\right|\right\}$$ Συνάρτηση στόχου

2) $$\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} - (1-h)\sum_{i=0}^{n} c_i \,|\, x_{ij} \,|= y_h^L \le y_j$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_{ij} + (1-h)\sum_{i=0}^{n} c_i \,|\, x_{ij} \,|= y_h^R \ge y_j$$

Ανισότητες που προκύπτουν από τον περιορισμό περικλεισμού

3) $c_i \geq 0$ τα ημιπλάτη (ακτίνες) λαμβάνουν πάντα τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός



Αναπαράσταση των περιορισμών

m= αριθμός εξαρτημένων μεταβλητών

y_h^L=αριστερό όριο

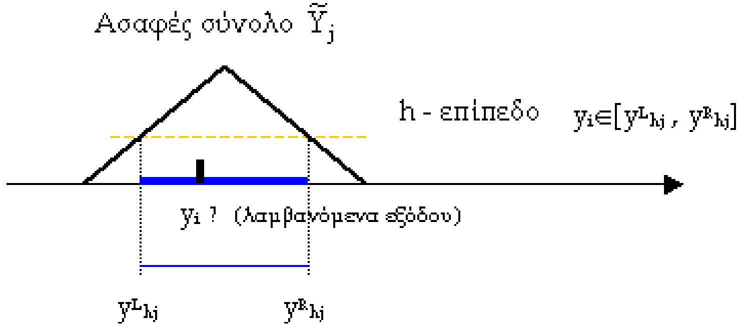
y_h^R=δεξί όριο

h= α-τομή (a-cut)

σε περίπτωση πολλών δεδομένων λαμβάνεται h=0 , θεωρείται ότι τα δεδομένα έχουν όλες τις δυνατότητες-μέγιστη ασάφεια

Ασαφής γραμμική παλινδρόμηση

- Η ασαφής γραμμική παλινδρόμηση χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει τη σχέση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών με την εξαρτημένη μεταβλητή σε γραμμική σχέση.
- Βασική απαίτηση: Για κάποιο βαθμό κατά τον οποίο επιθυμούμε τα δεδομένα μας
  $((x_{ij}, x_{2j},\ldots,x_{nj}), y_j)$ να περικλείονται στον εκτιμώμενο αριθμό Y_j:
  μ_{Y_j} $(\mathbf{y_j}) \geq \mathbf{h},$ $j = 1,\ldots,m$
- Ελαχιστοποίηση αθροίσματος ημιπλατών
- Για δεδομένα εξαγόμενα – εισαγόμενα συμβατικούς αριθμούς και γραμμική σχέση και Α.Σ.Τ.Α. Το πρόβλημα καταλήγει σε ένα συμβατικό γραμμικό προγραμματισμό
- ***Άλλη πρόταση: Τροποποίηση της συνάρτησης στόχου (άθροισμα των ημιπλατών) και περιορισμοί μη αρνητικότητας***



Συζήτηση

- Το μοντέλο περιέχει όλα τα δεδομένα
- Σημαντική ιδιότητα όταν έχουμε μικρό ζεύγος δεδομένων
- Ουσιαστικά παράγεται ένα διάστημα
- Πολλές φορές παρουσιάζεται μεγάλη ευαισθησία από κάποια σημεία → μοντέλα με μεγάλη ασάφεια
- Δεν ενσωματώνεται το μοντέλο της ελάχιστης απόστασης π.χ. των κεντρικών τιμών από τη δεδομένα εξαγόμενα (έννοια της συμβατικής παλινδρόμησης).

Ύπαρξη λύσης και h-τομή

- *Θεώρημα:* Όταν στο πρόβλημα της παλινδρόμησης υπάρχουν ως δεδομένα συμβατικοί αριθμοί και δεδομένα εξαγόμενα συμβατικοί αριθμοί υπάρχει πάντα η ζητούμενη βέλτιστη λύση $A^h_j = (r^h_j, c^h_j)$, $j = 1,\dots,m$ για $0 \leq \alpha < 1$.

- Ο βαθμός h μπορεί να ερμηνευθεί με τον παρακάτω τρόπο. Αν υπάρχουν αρκετά δεδομένα, επιλέγεται επίπεδο $h = 0$. Με άλλα λόγια, καθώς τα δεδομένα μας συμπεριλαμβάνουν όλες τις δυνατότητες, είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο αυτές τις δυνατότητες. Αν έχουμε λιγότερα δεδομένα, τότε τα δεδομένα αυτά συμπεριλαμβάνουν λιγότερες δυνατότητες. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα μας, περιέχουν μόνο τις μισές δυνατότητες τότε επιλέγεται $h = 0.5$.

Θεώρημα: Η βέλτιστη λύση για $h \neq h'$ προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις αλλαγής επιπέδου h:

$$A_{h'} = \left(a_h , \frac{|L^{-1}(a)|}{|L^{-1}(a')|} c_o \right), \qquad (5.17)$$

$$\text{δηλαδή } \; c_{h'} = \frac{|L^{-1}(a)|}{|L^{-1}(a')|} c_0$$

Ειδικά για την περίπτωση που $h = 0$ έχω:

$$A_{h'} = \left(a_h , \frac{|L^{-1}(0)|}{|L^{-1}(a')|} c_0 \right) \text{δηλαδή } \; c_{h'} = \frac{|L^{-1}(0)|}{\left|L^{-1}(a')\right|} c_o \qquad (5.18)$$

Όμοια για την J που είναι το άθροισμα όλων των ακτινών θα ισχύει:

$$J(c_{h'}) = \frac{L^{-1}(a)|}{\left|L^{-1}(a')\right|} J(c_h) \qquad (5.19)$$

Για την ειδική περίπτωση που $L(x) = L_1(x) = \max(0, 1-|x|)$

$$J(c_h) = (1 - \alpha)^{-1} J(c_0) \qquad (5.20)$$

Μπορώ να λύσω ως προς h =0, η κεντρική τιμή θα παραμείνει η ίδια ενώ το ημοπλάτος θα αυξηθεί ανάλογα με την η τομή

Συζήτηση

- Άσαφής γραμμική παλινδρόμηση
- Πρόβλημα όχι ισχυρά ορισμένο
- Πάντα υπάρχει λύση στο πρόβλημα των Tanaka et al, 1987
- Πολλές φορές ένα γενικό διάστημα μη λειτουργική λύση
- Συμμετρική λύση
- Εξάρτηση από τα outliers σημεία
- Δύσκολη η χειροκίνητη επιλογή με βάση τη συνάρτηση στόχου J.

Άλλες κατευθύνσεις

- Μη συμμετρικοί αριθμοί
- Χαλαρότητα στην υποστήριξη των περιορισμών εγκλεισμού
- Ενσωμάτωση σε μοντέλα (π.χ. προσθέτω περιορισμούς ισότητας)
  - Περιορισμοί μη αρνητικότητας και για κεντρικές τιμές
  - Περιορισμοί μη αρνητικότητας και για το διάστημα πρόβλεψης
  - Μη συμπερίληψη σταθερού όρου (θέματα υδατικού ισοζυγίου)
- Ενσωμάτωση της συμβατικής παλινδρόμησης

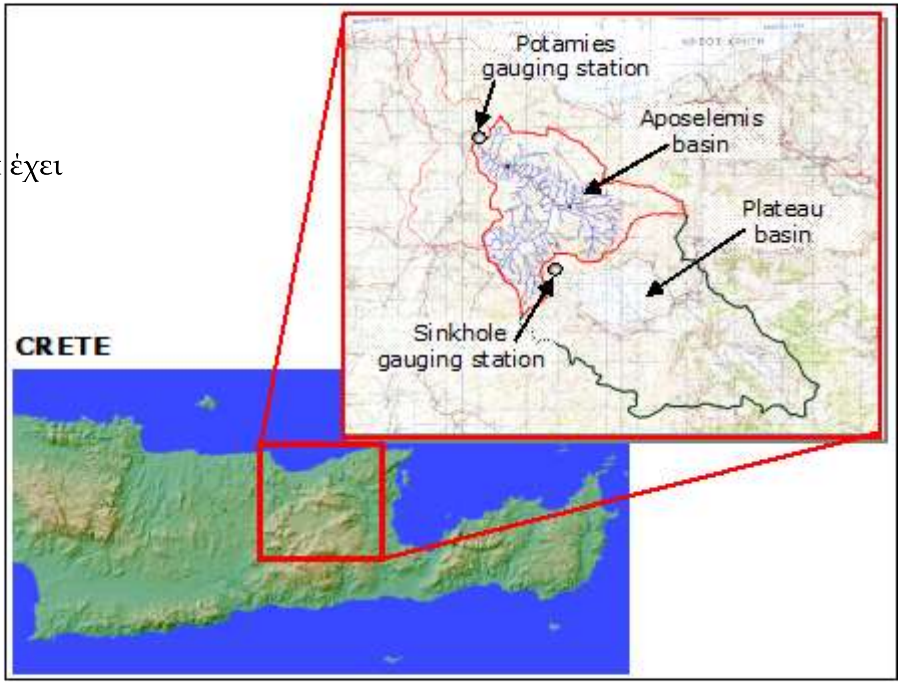
Διερεύνηση της διασύνδεσης λεκανών με τη χρήση της ασαφούς γραμμικής

Μοντέλο:

$$\tilde{Q}_j = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 Q_{1j} + \tilde{A}_2 Q_{2j} + \tilde{A}_3 Q_{3j} + \tilde{A}_4 Q_{4j} + \tilde{A}_5 Q_{5j}$$

όπου

$Q_{1j}, Q_{2j}, Q_{3j}, Q_{4j}$ οι μετρημένες μηνιαίες απορροές στην καταβόθρα β1, τον τρέχοντα μήνα, ένα μήνα πριν, δύο μήνες πριν και τρεις μήνες πριν, αντίστοιχα και Q_{5j} οι μηνιαίες μετρημένες βροχοπτώσεις στη λεκάνη Α μετατρεπόμενες σε μονάδες παροχής (Tsakiris et al., 2005)



Επιλέγοντας ασαφείς συμμετρικά τριγωνικούς αριθμούς το πρόβλημα έχει την παρακάτω διατύπωση:

$$J = \min \left\{ mc_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{5} Q_i x_{ij} + ma_0 \right\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$y_j \geq a_0 + \sum_{i=1}^{5} a_i Q_{ij} - (1-h)(c_0 + \sum_{i=1}^{5} c_i Q_{ij})$$

$$y_j \leq a_0 + \sum_{i=1}^{5} a_i Q_{ij} + (1-h)(c_0 + \sum_{i=1}^{5} c_i Q_{ij})$$

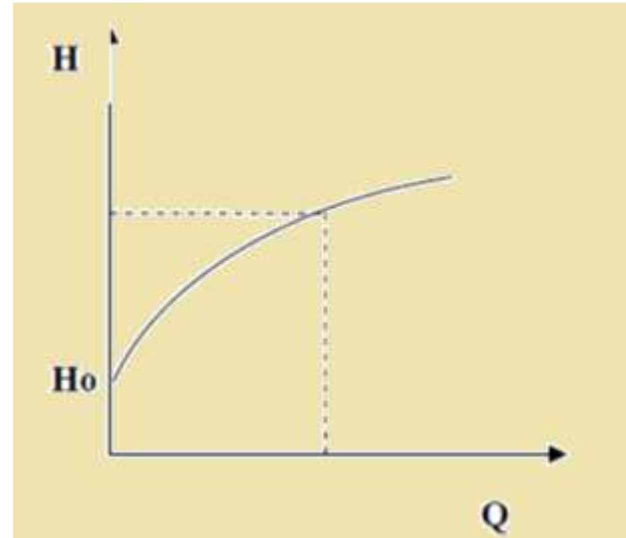
c θετικό

$$a_i - (1-h) \cdot c_i \geq 0$$

όπου i = 1,…,n και j =1,…,m

Παράδειγμα Εφαρμογής
Καμπύλη Στάθμης (H) – Παροχής (Q)

Η συσχέτιση παραμέτρων Στάθμης - Παροχής ποταμού συμβάλλει στον προσδιορισμό της Απορροής. Πραγματοποιείται μέσω διαγράμματος Στάθμης – Παροχής σε μια διατομή ενός υδατορρέματος



Καμπύλη στάθμης -παροχής

$$Q = a \cdot H^b \quad (\varepsilon\kappa\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \mu\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ a, b = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

$$\Lambda o\gamma\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{\iota}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma :$$

$$\log Q = \log(a \cdot H^b) = \log a + \log H^b = \log a + b \cdot \log H$$

Παράδειγμα εφαρμογής

α/α	X Στάθμη (m)	Y Παροχή (m /s)
1	1,14	7,7
2	1,23	12
3	1,53	18,9
4	1,66	24,8
5	1,78	28,4
6	1,99	39,6
7	2,2	55
8	2,64	73,3
9	2,66	80
10	3,03	102,3
11	3,21	112,3

Δεδομένα

logh	logQ
0,056905	0,886491
0,089905	1,079181
0,184691	1,276462
0,220108	1,394452
0,25042	1,453318
0,298853	1,597695
0,342423	1,740363
0,421604	1,865104
0,424882	1,90309
0,481443	2,009876
0,506505	2,05038

3,277738

$\Sigma abs(x_j)$

Lingo

- Για h=0

min=11*c0+3.28*c1;

0.056905*a1+a0-0.056905*c1-c0<=0.886491;
0.056905*a1+a0+0.056905*c1+c0>=0.886491;

0.089905*a1+a0-0.089905*c1-c0<=1.079181;
0.089905*a1+a0+0.089905*c1+c0>=1.079181;

Lingo 19.0 - [Lingo Model - Lingo1]

File Edit Solver Window Help

```
min=11*c0+3.28*c1;



0.056905*a1+a0-0.056905*c1-c0<=0.886491;
0.056905*a1+a0+0.056905*c1+c0>=0.886491;


0.089905*a1+a0-0.089905*c1-c0<=1.079181;
0.089905*a1+a0+0.089905*c1+c0>=1.079181;



!
```

0,056905	0,886491
0,089905	1,079181
0,184691	1,276462
0,220108	1,394452
0,25042	1,453318
0,298853	1,597695
0,342423	1,740363
0,421604	1,865104
0,424882	1,90309
0,481443	2,009876
0,506505	2,05038

For Help, press F1

Μερική ισχύς των περιορισμών...

The basic model as well as the basic structure of the fuzzy constraints remain the same. However, a divergence (error) is permitted for each inequality constraint:

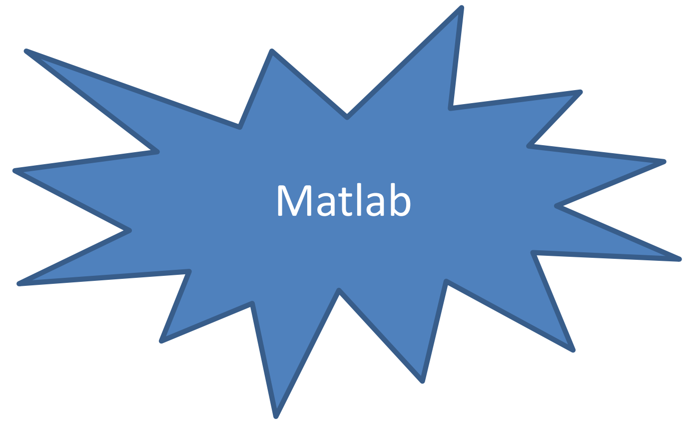
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - (1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} c_{h,i} x_{ij}\right) - d_j^+ \leq y_j \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} + (1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} c_{h,i} x_{ij}\right) + d_j^- \geq y_j \end{cases} \tag{11.a}$$

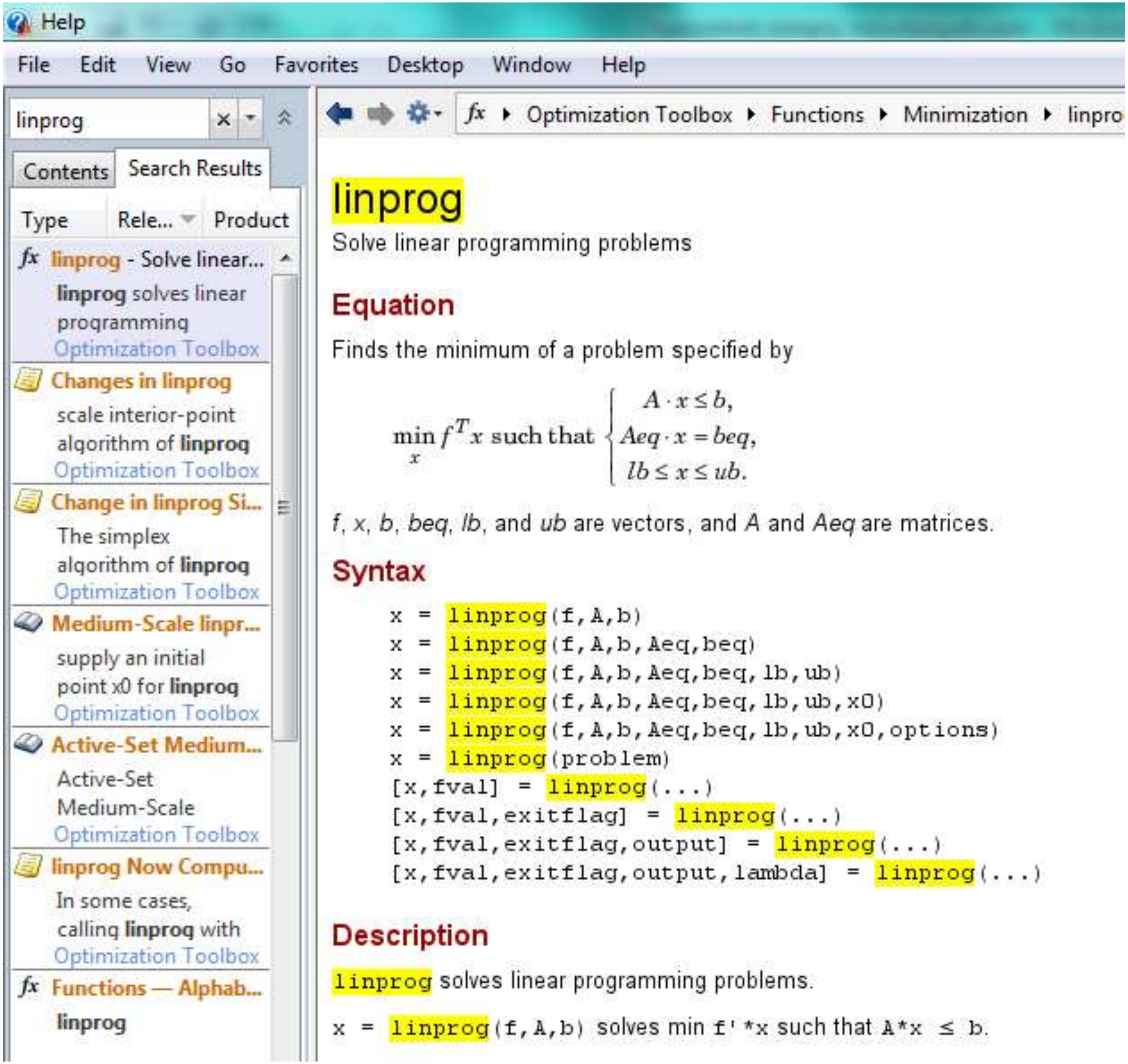
Finally, the scope of the final optimization problem is to minimize the total fuzzy spread as well as the sum of the error (distance) terms d_j^+, d_j^-:

$$J = \min\left\{ w_1 \sum_{j=1}^{m} \left(d_j^+ + d_j^-\right) + w_2 \sum_{i=1}^{n} c_{h,i} \right\} \tag{11.b}$$

in which, $d_j^+, d_j^-, c_{h,i}, w_1, w_2 \geq 0, \quad w_1 + w_2 = 1$ (11.c)

```
Φορτώνω δεδομένα από εξέλ
k5=xlsread('xxx4000.xls')
t5=xlsread('yyy4000.xls')
[number_data5,m1]=size(t5)
[number_data5,nn]=size(k5)



 διαμορφώνω τους πίνακες για τους περιορισμούς

    A5=k5';
A5=[A5;-abs(A5);];
 A5=A5';

   B5=k5';
 B5=[-B5;-abs(B5);];
 B5=B5';



 για περιορισμό μη αρνητικότητας
    A6=k5';
A6=[A6;-abs(A6);];
 A6=A6';

  για περιορισμό μη αρνητικότητας σε παραμέτρους και κάτω
όριο (υποχρεωτικά μόνο στα ημιπλάτη)
CC5=[zeros(nn,nn);-eye(nn,nn);];
 CC5=CC5';

 Σύνολο περιορισμών
  A=[A5;B5; CC5];
 b=[t5;-t5;zeros(nn,1)];
% αυτη θα αλλαξει οσο αφορα το σκελος των αποκλισεων
f=[zeros(1,nn) sum(k5) ];


 Βελτιστοποίηση
 [x3,fval3] =  linprog(f,A,b);
```




Help
File Edit View Go Favorites Desktop Window Help
linprog
Contents
Search Results
Type
Rele...
Product
linprog - Solve linear...
linprog solves linear programming
Optimization Toolbox
Changes in linprog
scale interior-point algorithm of linprog
Optimization Toolbox
Change in linprog Si...
The simplex algorithm of linprog
Optimization Toolbox
Medium-Scale linpr...
supply an initial point x0 for linprog
Optimization Toolbox
Active-Set Medium...
Active-Set Medium-Scale
Optimization Toolbox
linprog Now Compu...
In some cases, calling linprog with
Optimization Toolbox
Functions — Alphab...
linprog
Optimization Toolbox ▸ Functions ▸ Minimization ▸ linpro
linprog
Solve linear programming problems
Equation
Finds the minimum of a problem specified by
$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$
f, x, b, beq, lb, and ub are vectors, and A and Aeq are matrices.
Syntax
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)
Description
linprog solves linear programming problems.
x = linprog(f,A,b) solves min f'*x such that A*x ≤ b.